МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математических методов и моделей в экономике

О.С. БРАВИЧЕВА, В.И. ВАСЯНИНА, В.П. ЧУГУНОВ

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2005

УДК 519.22(07)
ББК 22.172 я7
Б 87

Рецензент
кандидат технических наук, доцент А.Г. Реннер

Бравичева О.С., Васянина В.И., Чугунов В.П.
Б 87 **Оценивание параметров распределения и проверка гипотез о параметрах распределения многомерной генеральной совокупности [Текст]: методические указания к лабораторному практикуму и самостоятельной работе студентов / О.С.Бравичева, В.И. Васянина, В.П. Чугунов. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. – 25 с.**

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы и самостоятельной работы студентов специальностей 061800, 061700 и других экономических специальностей по дисциплине «Многомерные статистические методы» на тему «Оценивание параметров распределения и проверка гипотез о параметрах распределения многомерной генеральной совокупности».

ББК 22.172 я7

Содержание

Введение

В большинстве случаев на практике объектом исследования является многомерная генеральная совокупность. В связи с этим одна из важнейших задач исследования заключается в том, чтобы по выборочным данным из многомерной генеральной совокупности рассчитать оценки числовых характеристик положения, вариации, связи и др., а также определить точность этих оценок (построить доверительные области). Чаще всего исследования проводятся в рамках нормально распределенной генеральной совокупности.

Целью лабораторной работы является овладение навыками точечного и доверительного оценивания параметров и проверки гипотез о параметрах многомерной генеральной совокупности в пакетах прикладных программ.

1 Содержание лабораторной работы

Лабораторная работа включает следующие этапы:

– постановку задачи;

– ознакомление с порядком решения задачи в пакетах прикладных программ;

– выполнение расчетов на компьютере;

– анализ результатов;

– подготовку письменного отчета по лабораторной работе;

– защиту лабораторной работы.

2 Постановка задачи

Исходные данные: две выборки из многомерных нормально распределенных генеральных совокупностей $\vec{X} = \left(X_1, X_2, X_3\right)^T$, $\vec{Y} = \left(Y_1, Y_2, Y_3\right)^T$.

На основе выборочных данных из генеральной совокупности $\vec{X}$:

1) найти оценки параметров распределения генеральной совокупности;

2) с вероятностью 0,95 построить доверительную область для вектора математических ожиданий в форме эллипсоида;

3) с вероятностью 0,95 построить доверительную область для подвектора математических ожиданий $(a_1, a_2)^T$ при нивелировании признака X_3;

4) с вероятностью 0,95 построить доверительную область для вектора математических ожиданий в форме прямоугольного параллелепипеда;

5) на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о равенстве вектора математических ожиданий стандарту ($H_0 : \vec{a} = \vec{a}_0$).

На уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу об однородности генеральных совокупностей $\vec{X}$ и $\vec{Y}$.

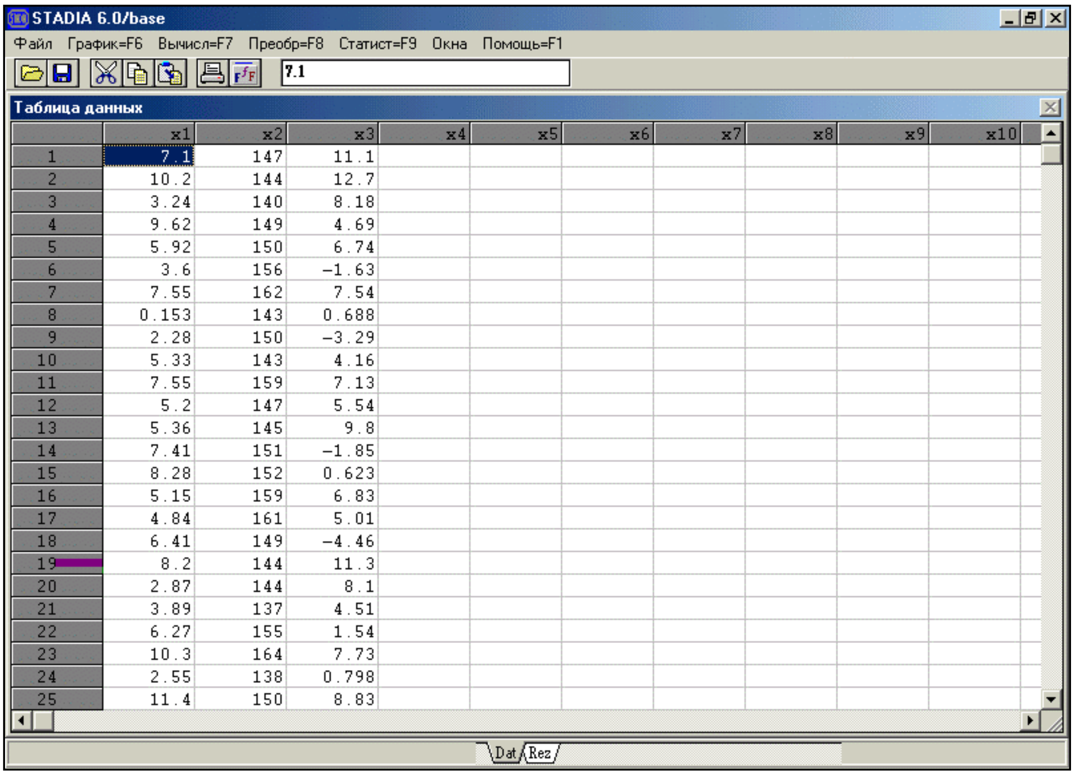
3 Порядок выполнения работы

Порядок выполнения лабораторной работы рассмотрен на основании данных нулевого варианта таблиц А.1, А.2.

Нахождение оценок параметров распределения генеральной совокупности

Параметрами многомерного нормального закона распределения являются вектор математических ожиданий $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)^T$ и ковариационная матрица Σ /1/ - /3/.

Оценкой вектора математических ожиданий является вектор средних арифметических $\overline{X} = (\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_n)^T$. Для нахождения оценки вектора математических ожиданий воспользуемся пакетом Stadia /4/. Для этого необходимо запустить диалоговую систему Stadia и ввести выборочные данные так, как показано на рисунке 1.



	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
1	7.1	147	11.1							
2	10.2	144	12.7							
3	3.24	140	8.18							
4	9.62	149	4.69							
5	5.92	150	6.74							
6	3.6	156	-1.63							
7	7.55	162	7.54							
8	0.153	143	0.688							
9	2.28	150	-3.29							
10	5.33	143	4.16							
11	7.55	159	7.13							
12	5.2	147	5.54							
13	5.36	145	9.8							
14	7.41	151	-1.85							
15	8.28	152	0.623							
16	5.15	159	6.83							
17	4.84	161	5.01							
18	6.41	149	-4.46							
19	8.2	144	11.3							
20	2.87	144	8.1							
21	3.89	137	4.51							
22	6.27	155	1.54							
23	10.3	164	7.73							
24	2.55	138	0.798							
25	11.4	150	8.83							

Рисунок 1 – Исходные данные в системе Stadia

Для нахождения оценки математического ожидания для каждого признака следует выбрать пункт меню «Статист=F9» или нажать кнопку F9. Затем в форме «Статистические методы» нажать кнопку «1=Описательная статистика» из группы «Параметрические тесты». В окне «Анализ переменных» выбрать все признака для анализа и нажать кнопку «Утвердить». Результаты расчетов представлены на рисунке 2. Оценка вектора математических ожиданий имеет вид: $\overline{X} = (6{,}76;150;4{,}2)^T$.

Аналогичные результаты можно получить с помощью пакета Statistica 6.0 /5/. Таблица с выборочными данными представлена на рисунке 3.

Для нахождения оценки математического ожидания для каждого признака следует выбрать пункт меню «Statistics», подпункт «Basic Statistics/Tables». В появившейся форме выбрать «Descriptive statistics» и нажать кнопку «ОК». Для отбора признаков для анализа нажать кнопку «Variables», выбрать все признаки (1-3) и нажать «ОК». Для получения результатов расчета нажать кнопку «Summary». Оценка математического ожидания каждого признака представлена в столбце «Mean» таблицы, изображенной на рисунке 4.

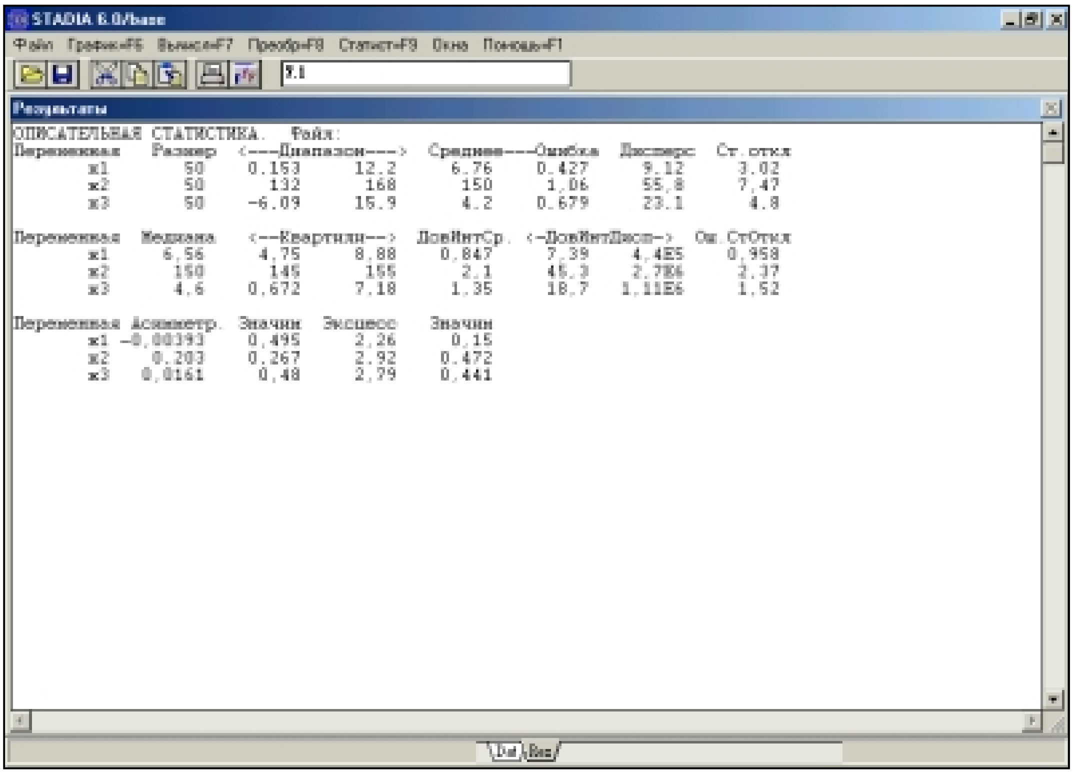


Рисунок 2 – Результаты расчетов в системе Stadia

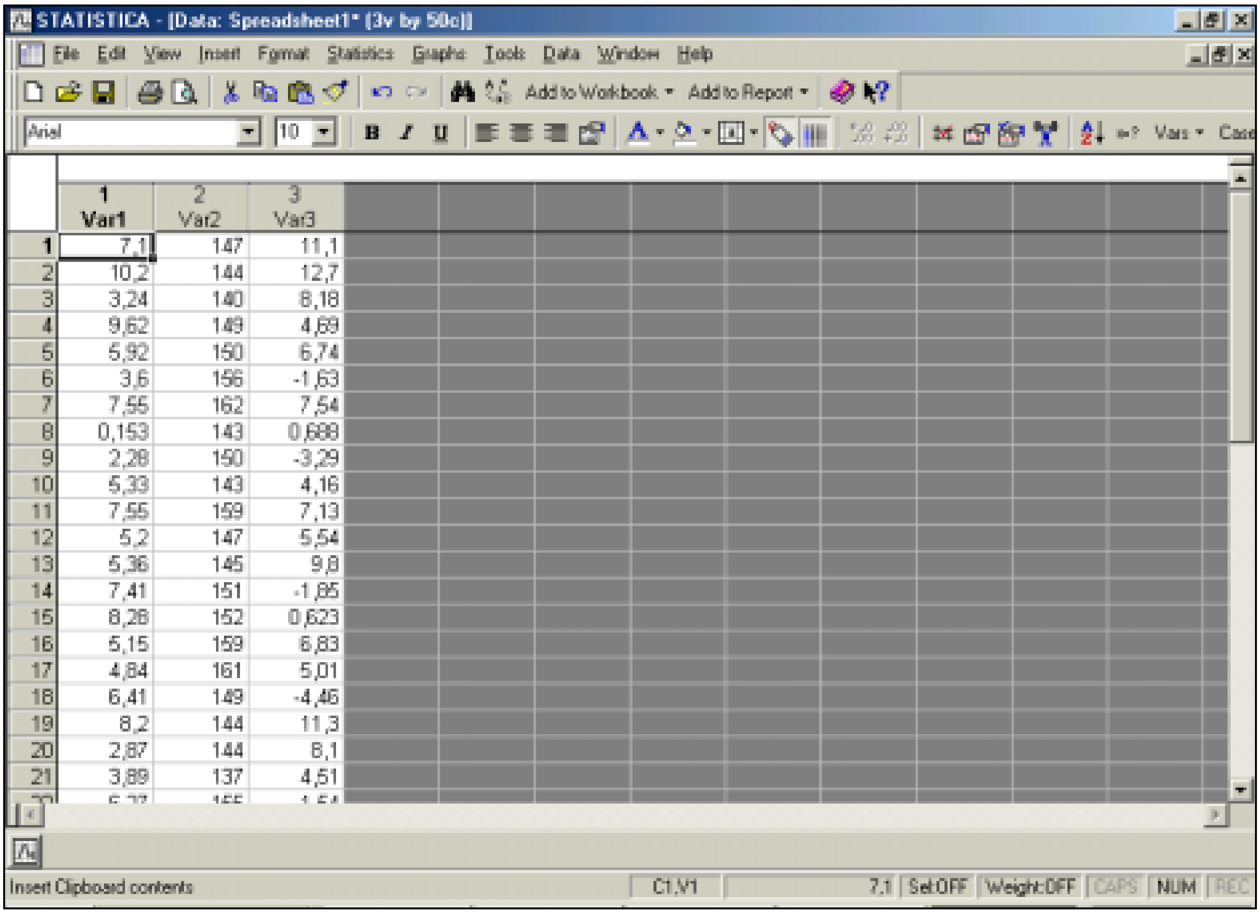


Рисунок 3 – Исходных данных в пакете Statistica

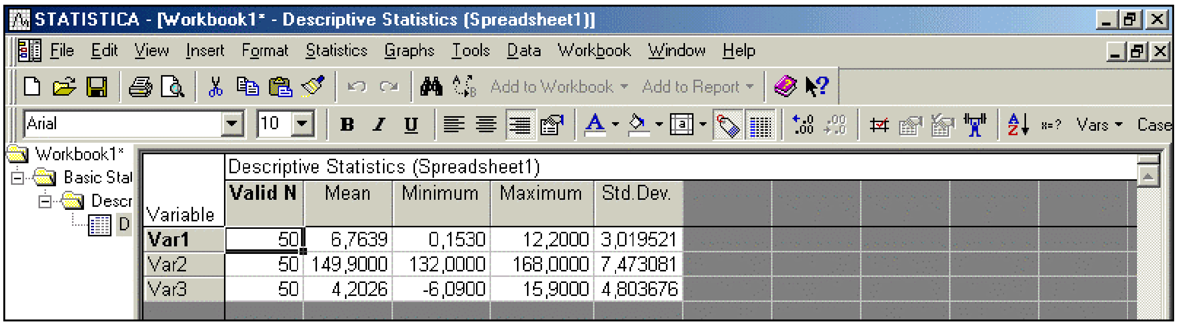


Рисунок 4 – Результаты расчетов в пакете Statistica

Оценка ковариационной матрицы Σ обозначается $\hat{\Sigma}$ и рассчитывается по формуле:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} Y^T Y, \qquad (1)$$

где Y – матрица центрированных значения исходных признаков.

Исправленная оценка ковариационной матрицы рассчитывается по формуле:

$$\hat{\Sigma}_{ucn} = \frac{1}{N-1} Y^T Y. \qquad (2)$$

Оценку ковариационной матрицы можно рассчитать в математическом пакете Mathcad 2001. Порядок расчетов представлен на рисунке 5.

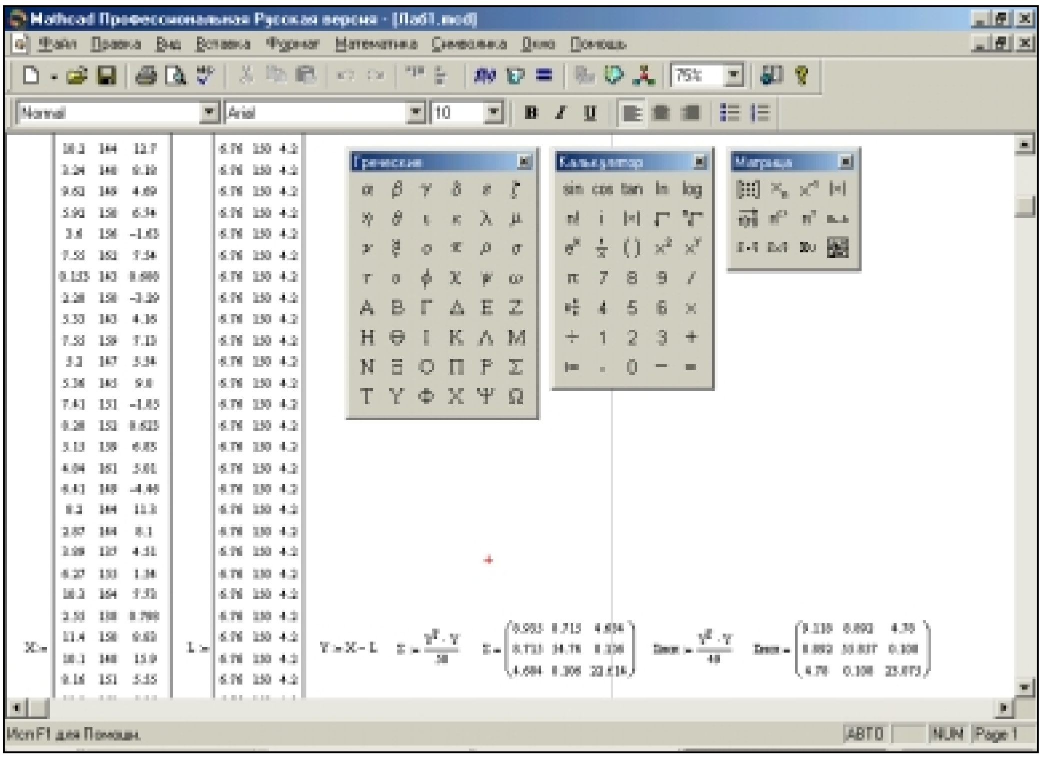


Рисунок 5 – Оценка ковариационной матрицы в пакете Mathcad

Построение доверительной области для вектора математических ожиданий в форме эллипсоида

Доверительной областью вектора параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)^T$ многомерной генеральной совокупности называется случайная область, полностью определяемая результатами наблюдений, которая с близкой к 1 доверительной вероятностью γ содержит неизвестное значение вектора $\vec{\theta}$ /2/.

Для построения доверительной области для вектора математических ожиданий нормально распределенной генеральной совокупности в случае, когда ковариационная матрица не известна, используется статистика Хотеллинга $T^2 = N(\overline{X} - \vec{a})^T \hat{\Sigma}_{исп}^{-1} (\overline{X} - \vec{a})$, которая связана с F-статистикой соотношением:

$$T^2_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = \frac{n(N-1)}{N-n} F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}, \tag{3}$$

где F_{α,ν_1,ν_2} – значение, найденное по таблице критических точек распределения Фишера-Снедекора, соответствующее уровню значимости $\alpha = 1 - \gamma$, и числам степеней свободы $\nu_1 = n$, $\nu_2 = N - n$.

Уравнение поверхности, ограничивающей доверительную область для вектора математических ожиданий с вероятностью γ, имеет вид:

$$(\overline{X} - \vec{a})^T \hat{\Sigma}_{исп}^{-1} (\overline{X} - \vec{a}) = \frac{n(N-1)}{N(N-n)} F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}. \tag{4}$$

Уравнение (4) определяется n-мерный эллипсоид с центром в точке с координатами $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_n)$.

По таблице критических точек F-распределения или с помощью функции FРАСПОБР(α, ν_1, ν_2) пакета Excel найдем $F(0{,}05;3;47) = 2{,}8$. С помощью математического пакета Mathcad рассчитаем $\hat{\Sigma}_{исп}^{-1}$. Расчеты приведены на рисунке 6.

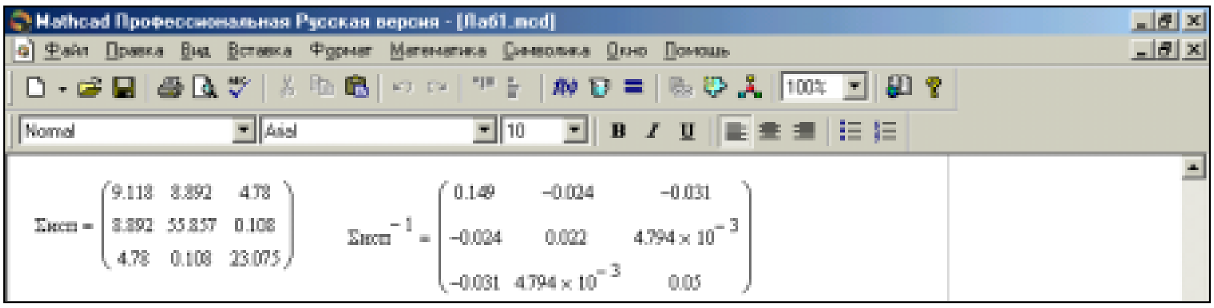


Рисунок 6 – Расчет обратной матрицы

Подставив $\overline{X}, \vec{a}$, $\hat{\Sigma}_{исп}^{-1}$ в левую часть выражения (4) и рассчитав правую часть, получим:

$$\begin{pmatrix} 6{,}76 - a_1 \\ 150 - a_2 \\ 4{,}2 - a_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0{,}149 & -0{,}024 & -0{,}031 \\ -0{,}024 & 0{,}022 & 0{,}005 \\ -0{,}031 & 0{,}005 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6{,}76 - a_1 \\ 150 - a_2 \\ 4{,}2 - a_3 \end{pmatrix} = 0{,}175 .$$

Перенесем начало координат в центр эллипсоида. Для этого сделаем замену переменных ($z_i = \overline{X}_i - a_i$, $i = 1,2,3$):

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0{,}149 & -0{,}024 & -0{,}031 \\ -0{,}024 & 0{,}022 & 0{,}005 \\ -0{,}031 & 0{,}005 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = 0{,}175 . \qquad (5)$$

Левая часть выражения (5) представляет собой квадратичную форму относительно вектора $\vec{z} = (z_2, z_2, z_3)^T$. Приведем квадратичную форму к каноническому виду. Для этого найдем собственные числа и собственные вектора матрицы $\hat{\Sigma}_{исп}^{-1}$. Расчеты в пакете Mathcad приведены на рисунке 7.

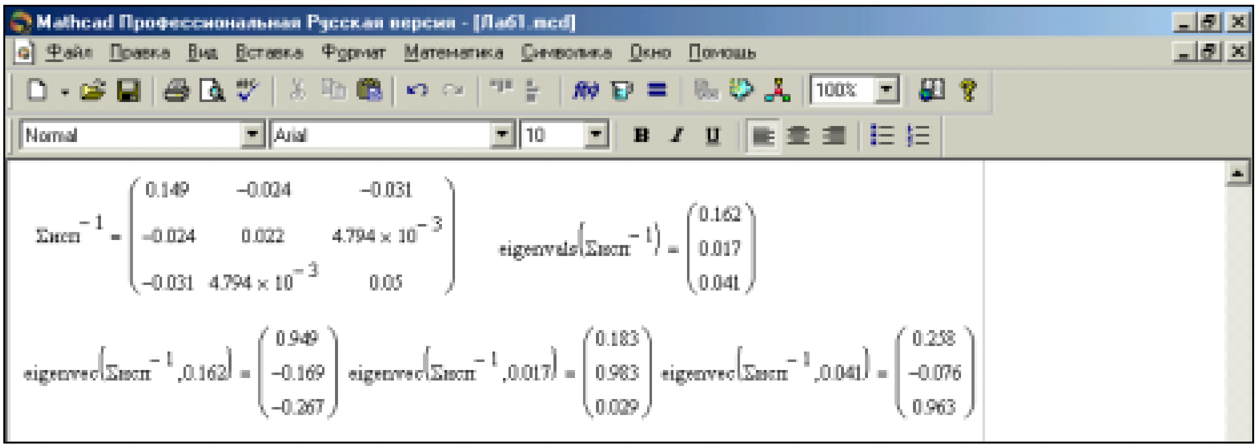


Рисунок 7 – Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Подставив в выражение (5) вместо вектора $\vec{z}$ произведение $\begin{pmatrix} 0.949 & 0.183 & 0.258 \\ -0.169 & 0.983 & -0.076 \\ -0.267 & 0.029 & 0.963 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$, получаем уравнение эллипсоида в каноническом виде:

$$0{,}162 y_1^2 + 0{,}017 y_2^2 + 0{,}041 y_3^2 = 0{,}175 ,$$

$$\frac{y_1^2}{1{,}08}+\frac{y_2^2}{10{,}29}+\frac{y_3^2}{4{,}27}=1. \qquad (6)$$

Знаменатели выражения (6) представляют квадраты длин полуосей эллипсоида.

Построение доверительной области для подвектора математических ожиданий

Для построения доверительной области для подвектора математических ожиданий $(a_1, a_2)^T$ при нивелировании признака X_3 введем в рассмотрение матрицу $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T$. Статистика Хотеллинга примет вид:

$$T^2 = N(C^T\,\overline{X}-C^T\vec{a})^T\,(C^T\,\hat{\Sigma}_{исп}\,C)^{-1}(C^T\,\overline{X}-C^T\,\vec{a}). \qquad (7)$$

Статистика (7) связана с F-статистикой в данном примере соотношением:

$$T^2_{\alpha,\nu_1,\nu_2}=\frac{2(N-1)}{N-2}F_{\alpha,\nu_1,\nu_2},$$

где $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = N-2$.

Тогда уравнение кривой, ограничивающей доверительную область для вектора математических ожиданий $(a_1, a_2)^T$ с вероятностью γ, определяется следующим образом:

$$(C^T\,\overline{X}-C^T\,\overline{a})^T\,(C^T\,\hat{\Sigma}_{исп}\,C)^{-1}(C^T\,\overline{X}-C^T\,\overline{a})=\frac{2(N-1)}{N(N-2)}F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}. \qquad (8)$$

Уравнение (8) в данном примере определяет эллипс с центром в точке с координатами $(\overline{X}_1, \overline{X}_2)$.

По таблице критических точек F-распределения или с помощью функции FРАСПОБР(α,ν_1,ν_2) пакета Excel найдем $F(0{,}05;2;48)=3{,}2$. С помощью математического пакета Mathcad рассчитаем $(C^T\,\hat{\Sigma}_{исп}\,C)^{-1}$. Расчеты приведены на рисунке 8.

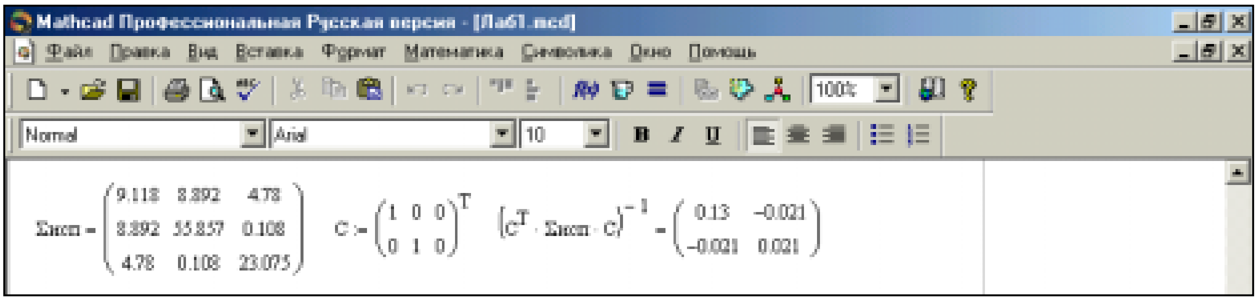


Рисунок 8 – Расчет обратной матрицы

Подставив $\overline{X}, \vec{a}$, C, $(C^T \hat{\Sigma}_{исп} C)^{-1}$ в левую часть выражения (8) и рассчитав правую часть, получим:

$$\begin{pmatrix} 6{,}76 - a_1 \\ 150 - a_2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0{,}13 & -0{,}021 \\ -0{,}021 & 0{,}021 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6{,}76 - a_1 \\ 150 - a_2 \end{pmatrix} = 0{,}131 .$$

Перенесем начало координат в центр эллипса. Для этого сделаем замену переменных ($z_i = \overline{X}_i - a_i$, $i = 1{,}2$):

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0{,}13 & -0{,}021 \\ -0{,}021 & 0{,}021 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0{,}131 . \qquad (9)$$

Левая часть выражения (9) представляет собой квадратичную форму относительно вектора $\bar{z} = (z_2, z_2)^T$. Приведем квадратичную форму к каноническому виду. Для этого найдем собственные числа и собственные вектора матрицы $(C^T \hat{\Sigma}_{исп} C)^{-1}$. Расчеты в пакете Mathcad приведены на рисунке 9.

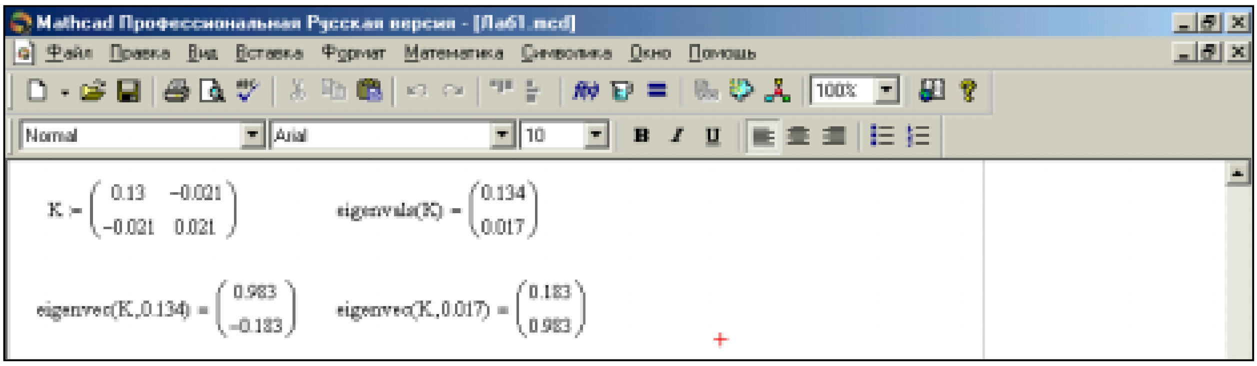


Рисунок 9 – Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Подставив в выражение (9) вместо вектора $\vec{z}$ произведение $\begin{pmatrix} 0{,}13 & -0{,}021 \\ -0{,}021 & 0{,}021 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}$, получаем уравнение эллипса в каноническом виде:

$$0{,}134y_1^2 + 0{,}017y_2^2 = 0{,}131,$$

$$\frac{y_1^2}{0{,}98} + \frac{y_2^2}{7{,}71} = 1. \qquad (10)$$

Знаменатели выражения (10) представляют квадраты длин полуосей эллипса.

График эллипса в новой системе координат построен в пакете Mathcad. Результаты представлены на рисунке 10.

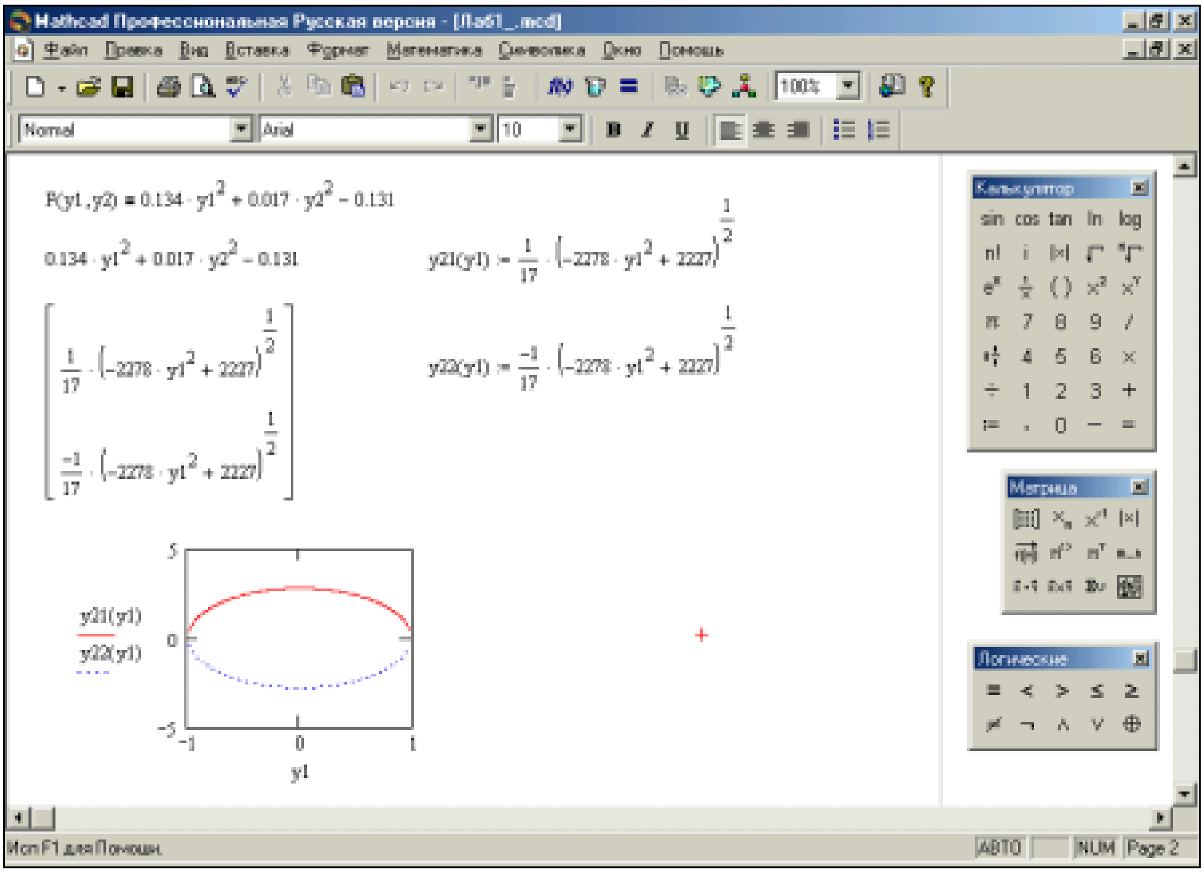


Рисунок 10 – Построение графика эллипса

Построение доверительной области для вектора математических ожиданий в форме прямоугольного параллелепипеда

Для построения доверительной области для вектора математических ожиданий в форме прямоугольного параллелепипеда рассчитаем доверительную вероятность, с которой будем строить доверительные интервалы для математического ожидания каждого признака отдельно:

$$\gamma^* = 1 - \frac{1}{n}(1-\gamma) = 1 - \frac{1}{3}(1-0{,}95) = 0{,}98.$$

Для построения доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности при неизвестной дисперсии используется статистика $t = \frac{\overline{X} - a}{S}\sqrt{N-1} = \frac{\overline{X} - a}{\hat{S}}\sqrt{N}$, имеющая распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = N - 1$.

Из уравнения $P(|t| < \delta) = \gamma^*$ находим $\delta = St^{-1}(\alpha, \nu)$, где $\alpha = 1 - \gamma^*$. Доверительный интервал имеет вид: $\overline{X} - \frac{\delta \hat{S}}{\sqrt{N}} < a < \overline{X} + \frac{\delta \hat{S}}{\sqrt{N}}$.

По таблице критических точек распределения Стьюдента или с помощью функции СТЬЮДРАСПОБР(α, ν) пакета Excel находим $\delta = St^{-1}(0{,}02;49) = 2{,}4$.

Оценки средних квадратических отклонений рассчитаны в диалоговой системе Stadia (рисунок 2) и пакете Statistica (рисунок 4): $\hat{S}_{X_1} = 3{,}02$; $\hat{S}_{X_2} = 7{,}47$; $\hat{S}_{X_3} = 4{,}8$. С вероятностью 0,98 доверительные интервалы для математического ожидания признаков X_1, X_2, X_3 имею вид:

$$5{,}73 < a_1 < 7{,}78,$$

$$147{,}46 < a_2 < 152{,}53,$$

$$2{,}57 < a_3 < 5{,}83.$$

Тогда с вероятностью 0,95 доверительная область для вектора математических ожиданий имеет вид прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке 11.

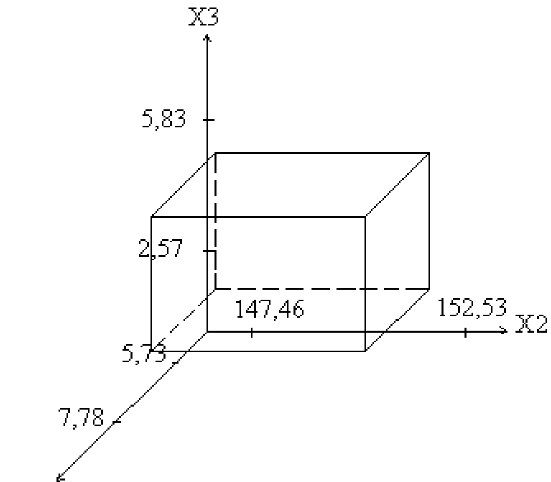


Рисунок 11 – График доверительной области в виде прямоугольного параллелепипеда

Проверка гипотезы о равенстве вектора математических ожиданий стандарту

Проверим гипотезу о равенстве вектора математических ожиданий постоянному вектору $\vec{a}_0 = (7;148;5)^T$ (смотри таблицу А.2). Выдвигаем гипотезы:

$H_0 : \vec{a} = \vec{a}_0$,

$H_1 : \vec{a} \neq \vec{a}_0$.

Для проверки гипотезы H_0 при неизвестной ковариационной матрицы Σ используется статистика Хотеллинга $T^2 = N(\overline{X} - \vec{a}_0)^T \hat{\Sigma}_{исп}^{-1}(\overline{X} - \vec{a}_0)$, закон распределения которой при справедливости нулевой гипотезы связан с распределением Фишера-Снедекора соотношением (3).

По таблице критических точек F-распределения или с помощью функции FРАСПОБР(α, ν_1, ν_2) пакета Excel найдем $F(0{,}05;3;47) = 2{,}8$. По формуле (3) рассчитаем критическое значение статистики T^2:

$$T_{кр}^2 = \frac{3 \cdot 49}{47} \cdot 2{,}8 = 8{,}76.$$

С помощью математического пакета Mathcad рассчитаем наблюденное значение статистики T^2. Расчеты приведены на рисунке 12.

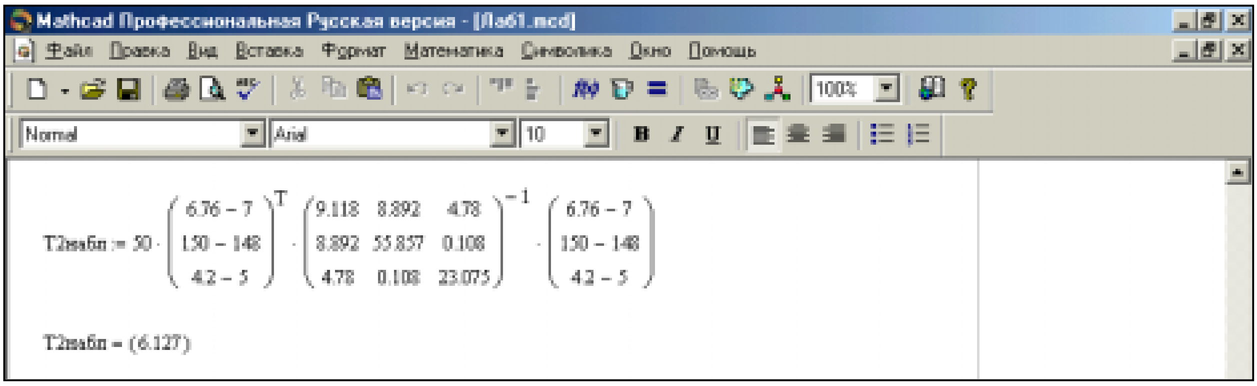


Рисунок 12 – Проверка гипотезы о равенстве вектора математических ожиданий стандарту

Так как $T_{набл}^2 < T_{кр}^2$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Проверка гипотезы об однородности генеральных совокупностей

Проверим гипотезу о равенстве ковариационных матриц:

$H_0 : \Sigma_X = \Sigma_Y$,

$H_1 : \Sigma_X \neq \Sigma_Y$.

Для проверки гипотезы H_0 используется статистика $W = ba$, где:

$$b = 1 - \left(\frac{1}{n_X - 1} + \frac{1}{n_Y - 1} - \frac{1}{n_X + n_Y - 2} \right) \cdot \frac{2n^2 + 3n - 1}{6(n+1)},$$

$$a = (n_X + n_Y - 2)\ln\left|\hat{\Sigma}_{ucnXY}\right| - \left((n_X - 1)\ln\left|\hat{\Sigma}_{ucnX}\right| + (n_Y - 1)\ln\left|\hat{\Sigma}_{ucnY}\right| \right),$$

n_X, n_Y - объем первой и второй выборки соответственно,

$$\hat{\Sigma}_{ucnXY} = \frac{1}{n_X + n_Y - 2}\left((n_X - 1)\hat{\Sigma}_{ucnX} + (n_Y - 1)\hat{\Sigma}_{ucnY} \right).$$

Статистика W при справедливости гипотезы H_0 имеет распределение «Хи-квадрат» с числом степеней свободы $\nu = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Оценка ковариационной матрицы для генеральной совокупности $\vec{Y}$ известна (смотри таблицу А.3):

$$\hat{\Sigma}_{ucnY} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 10 & 60 & 0{,}3 \\ 4 & 0{,}3 & 25 \end{pmatrix}.$$

Наблюденное значение статистики W рассчитано в пакете Mathcad, результаты представлены на рисунке 13.

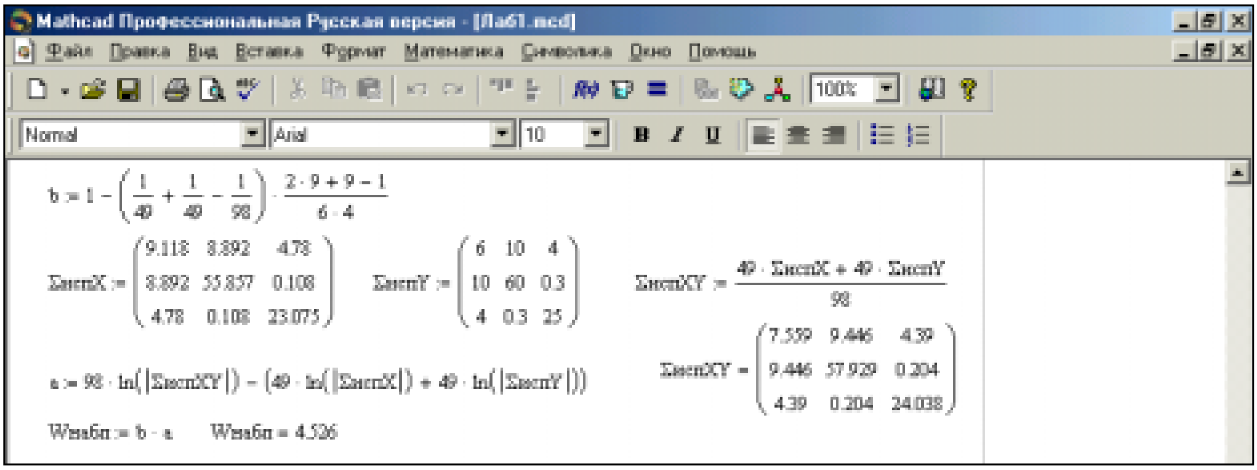


Рисунок 13 – Проверка гипотезы о равенстве ковариационных матриц

Критические значения статистики W найдем по таблице критических точек распределения «Хи-квадрат» или с помощью функции ХИ2ОБР(вероятность, ν) пакета Excel для числа степеней свободы $\nu = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6$:

$$W_{кр1} = Pi^{-1}(0{,}975;6) = 1{,}24,$$

$$W_{кр2} = Pi^{-1}(0{,}025;6) = 14{,}45.$$

Так как $W_{кр1} < W_{набл} < W_{кр2}$, то гипотеза H_0 не отвергается.

Так как гипотеза о равенстве ковариационных матриц не отвергается, то проверим гипотезу о равенстве векторов математических ожиданий генеральных совокупностей $\vec{X}$, и $\vec{Y}$:

$H_0 : \vec{a}_X = \vec{a}_Y$;

$H_1 : \vec{a}_X \neq \vec{a}_Y$.

Для проверки гипотезы H_0 используется статистика Хотеллинга $T^2 = \dfrac{n_X n_Y}{n_X + n_Y}(\overline{X} - \overline{Y})^T \hat{\Sigma}^{-1}_{испXY}(\overline{X} - \overline{Y})$, закон распределения которой при справедливости нулевой гипотезы связан с распределением Фишера-Снедекора соотношением:

$$T^2_{\alpha,\nu_1,\nu_2} = \frac{(n_X + n_Y - 2)n}{n_X + n_Y - n - 1} F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}, \qquad (11)$$

где $\nu_1 = n$, $\nu_2 = n_X + n_Y - n - 1$.

По таблице критических точек F-распределения или с помощью функции FРАСПОБР(α,ν_1,ν_2) пакета Excel найдем $F(0{,}05;3;96) = 2{,}7$. По формуле (11) рассчитаем критическое значение статистики T^2:

$$T^2_{кр} = \frac{98 \cdot 3}{96} \cdot 2{,}7 = 8{,}27.$$

Оценка вектора математических ожиданий генеральной совокупности $\vec{Y}$ известна: $\overline{Y} = (10;80;15)^T$ (смотри таблицу А.3). С помощью математического пакета Mathcad рассчитаем наблюденное значение статистики T^2. Расчеты приведены на рисунке 14.

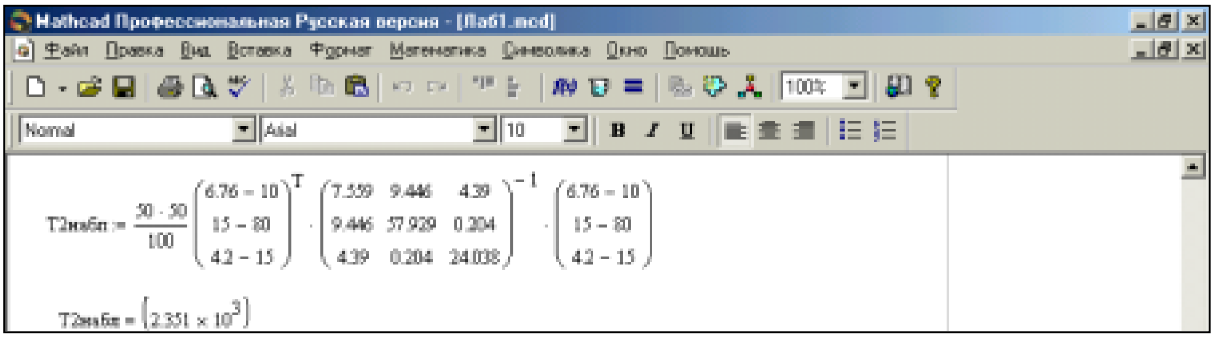


Рисунок 14 – Проверка гипотезы о равенстве векторов математических ожиданий

Так как $T^2_{набл} > T^2_{кр}$, то гипотеза H_0 отвергается. Таким образом, генеральные совокупности $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ неоднородны.

4 Содержание письменного отчета

Отчет должен быть оформлен на листах формата А4 с титульным листом, оформленным соответствующим образом, и содержать следующее:

1) исходные данные для анализа;
2) постановку задачи;
3) краткое изложение теории оценивания параметров и проверки гипотез о параметрах многомерной генеральной совокупности;
4) результаты выполнения лабораторной работы.

5 Вопросы к защите

1) Что является параметрами многомерного нормального закона распределения?
2) Как рассчитать оценки параметров многомерной нормально распределенной генеральной совокупности?
3) Что такое доверительная область?
4) Построение доверительной области для вектора математических ожиданий нормально распределенной генеральной совокупности при известной и неизвестной ковариационной матрицы
5) Построение доверительной области для подвектора математических ожиданий
6) Построение доверительной области для вектора параметров в виде прямоугольного параллелепипеда
7) Проверка гипотезы о равенстве вектора математических ожиданий стандарту при известной и неизвестной ковариационной матрицы
8) Какие две совокупности называются однородными?
9) Проверка гипотезы о равенстве ковариационных матриц двух нормально распределенных генеральных совокупностей
10) Проверка гипотезы о равенстве векторов математических ожиданий двух нормально распределенных генеральных совокупностей

Список использованных источников

1 **Айвазян С.А.** Прикладная статистика и основы эконометрики [Текст]: учебник для вузов / С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022с.

2 **Дубров А.М.** Многомерные статистические методы [Текст]: учебник / А.М.Дубров, В.С. Мхитарян, Л.И. Трошин. – М.: Финансы и статистика, 1998. – 352 с.

3 **Сошникова Л.А.** Многомерный статистический анализ в экономике [Текст]: учеб. пособие для вузов / Л.А. Сошникова, В.Н. Тамашевич, Г.Е. Уебе, М. Шефер. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 598 с.

4 **Тюрин Ю.Н.** Статистический анализ данных на компьютере [Текст] / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров; под ред. В.Э. Фигурнова. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 528 с.

5 **Боровиков В.П.** STATISTICA – Статистический анализ и обработка данных в среде Windows [Текст] / В.П. Боровиков, И.П. Боровиков. – М.: Инф. изд. дом «Филин», 1998. – 608 с.

Приложение А
(обязательное)

Исходные данные для анализа

Таблица А.1 – Выборочные данные

№ объекта	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
1	73	48	99	31	284	68	279	160	243	200	7,1	147	11,1
2	69	40	83	28	265	47	245	164	210	197	10,2	144	12,7
3	72	52	106	30	298	40	354	166	195	201	3,24	140	8,18
4	72	50	107	23	264	35	238	151	224	209	9,62	149	4,69
5	65	39	79	25	232	60	323	156	218	210	5,92	150	6,74
6	67	49	100	26	272	37	285	152	215	206	3,6	156	-1,63
7	56	38	80	25	292	41	240	155	227	204	7,55	162	7,54
8	70	47	96	27	245	46	361	154	233	197	0,153	143	0,688
9	63	41	98	31	274	46	250	166	219	194	2,28	150	-3,29
10	64	50	97	26	256	53	246	172	233	198	5,33	143	4,16
11	70	52	92	28	291	43	357	162	216	204	7,55	159	7,13
12	67	36	90	25	290	53	361	163	233	203	5,2	147	5,54
13	60	55	108	30	257	54	343	174	221	199	5,36	145	9,8
14	63	43	107	28	258	50	390	168	221	215	7,41	151	-1,85
15	80	45	96	28	309	45	208	150	220	205	8,28	152	0,623
16	71	56	86	26	257	50	301	173	227	199	5,15	159	6,83
17	74	45	98	25	316	25	306	166	235	207	4,84	161	5,01
18	68	55	97	28	251	44	334	161	212	218	6,41	149	-4,46
19	65	63	128	26	278	54	342	154	213	217	8,2	144	11,3

Продолжение таблицы А.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
20	73	47	88	26	268	56	274	160	217	203	2,87	144	8,1
21	57	48	117	28	273	48	336	171	221	218	3,89	137	4,51
22	71	55	110	27	280	44	277	163	220	213	6,27	155	1,54
23	66	37	94	25	244	49	320	148	225	199	10,3	164	7,73
24	76	38	82	26	243	50	278	170	223	215	2,55	138	0,798
25	74	46	97	27	269	46	266	155	192	200	11,4	150	8,83
26	68	41	91	28	255	46	294	162	209	210	10,1	148	15,9
27	74	42	118	27	229	47	308	162	243	191	8,16	151	5,55
28	69	53	87	29	272	39	271	161	228	200	11,8	151	5,16
29	68	57	104	24	263	49	228	164	203	209	5,49	143	6,11
30	71	39	89	23	249	44	414	155	222	192	5,41	150	-0,403
31	60	46	71	27	252	49	324	159	234	208	4,48	132	6,31
32	56	56	86	27	229	53	348	172	224	192	2,99	148	-0,794
33	71	47	97	28	284	44	211	158	235	206	12,1	157	-3,07
34	68	42	89	26	265	47	356	169	208	204	5,68	153	5,39
35	66	52	101	29	298	51	350	161	203	201	9,29	146	1,71
36	60	50	93	26	264	56	350	164	221	204	11,7	168	4,3
37	75	47	112	23	232	39	301	156	237	199	1,74	147	0,109
38	69	48	67	27	249	46	338	162	219	206	9,53	163	13,3
39	72	54	97	29	292	57	297	159	217	207	6,39	146	-4,49
40	70	52	82	24	245	45	268	149	223	213	12,2	139	3,95
41	61	47	81	27	274	55	294	159	215	211	1,97	150	-6,09
42	62	57	92	26	256	46	309	161	228	198	6,7	149	3,29
43	63	53	90	29	291	52	284	146	210	197	8,74	156	1,04
44	71	48	110	29	290	45	276	152	243	211	4,22	146	0,059
45	65	46	96	25	257	43	289	155	227	205	6,99	143	7,2

Продолжение таблицы А.1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
46	70	43	110	24	258	48	234	176	224	208	8,41	154	3,58
47	70	49	97	30	309	50	298	146	207	213	11,1	161	4,22
48	68	31	102	25	257	44	264	152	225	201	8,2	147	3,39
49	78	40	101	26	231	38	302	151	244	214	8,46	156	4,92
50	66	49	112	27	288	68	323	144	224	203	5,67	152	7,18

Таблица А.2 – Варианты заданий

Номер варианта	Номера признаков X	$\vec{a}_0$
0	11,12,13	$(7;\ 148;\ 5)^{\mathrm{T}}$
1	1,2,3	$(68{,}1;\ 47;\ 95)^{\mathrm{T}}$
2	1,3,4	$(65;\ 100;\ 25)^{\mathrm{T}}$
3	1,4,5	$(63;\ 28{,}3;\ 260)^{\mathrm{T}}$
4	1,6,7	$(67{,}5;\ 48;\ 301)^{\mathrm{T}}$
5	1,8,9	$(66{,}9;\ 161;\ 223)^{\mathrm{T}}$
6	1,9,10	$(69;\ 222;\ 203{,}9)^{\mathrm{T}}$
7	2,3,4	$(48;\ 97;\ 27{,}2)^{\mathrm{T}}$
8	2,5,6	$(47{,}9;\ 268;\ 46)^{\mathrm{T}}$
9	2,7,8	$(49;\ 304;\ 162)^{\mathrm{T}}$
10	2,9,10	$(45{,}4;\ 226;\ 196)^{\mathrm{T}}$
11	3,4,5	$(92;\ 24{,}6;\ 270)^{\mathrm{T}}$
12	3,4,6	$(100;\ 28{,}3;\ 49)^{\mathrm{T}}$
13	3,8,9	$(95{,}6;\ 154;\ 226)^{\mathrm{T}}$
14	3,9,10	$(103;\ 229;\ 207{,}2)^{\mathrm{T}}$
15	4,5,6	$(28;\ 270;\ 49)^{\mathrm{T}}$
16	4,7,8	$(25;\ 300;\ 162)^{\mathrm{T}}$
17	4,9,10	$(26;\ 221{,}9;\ 205)^{\mathrm{T}}$
18	5,6,7	$(269;\ 48;\ 229)^{\mathrm{T}}$
19	5,8,9	$(268{,}2;\ 161{,}3;\ 196)^{\mathrm{T}}$
20	6,7,8	$(49{,}8;\ 305;\ 165{,}2)^{\mathrm{T}}$

Таблица А.3 – Оценки параметров распределения генеральной совокупности $\vec{Y}$

Номер варианта	$\overline{Y}$	$\hat{\Sigma}_{испY}$
(1)	(2)	(3)
0	$(10;\ 80;\ 15)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 10 & 60 & 0{,}3 \\ 4 & 0{,}3 & 25 \end{pmatrix}$
1	$(70;\ 52;\ 105)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 30{,}53 & -5{,}96 & 10{,}20 \\ -5{,}96 & 43{,}26 & 18{,}95 \\ 10{,}20 & 18{,}95 & 145{,}65 \end{pmatrix}$
2	$(68;\ 95;\ 30)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 35{,}62 & 16{,}30 & -0{,}36 \\ 16{,}30 & 143{,}26 & 1{,}94 \\ -0{,}36 & 1{,}94 & 4{,}66 \end{pmatrix}$

Продолжение таблица А.3

(1)	(2)	(3)
3	$(65{,}1;\ 27;\ 250)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 30{,}20 & -1{,}01 & 9{,}95 \\ -1{,}01 & 4{,}86 & 18{,}02 \\ 9{,}95 & 18{,}02 & 483{,}66 \end{pmatrix}$
4	$(80;\ 52;\ 310)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 25{,}62 & -12{,}30 & -64{,}36 \\ -12{,}30 & 55{,}26 & 55{,}32 \\ -64{,}36 & 55{,}32 & 2134 \end{pmatrix}$
5	$(65;\ 148;\ 219)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 32{,}64 & -18{,}69 & 9{,}36 \\ -18{,}69 & 93{,}26 & -2{,}35 \\ 9{,}36 & -2{,}35 & 146{,}74 \end{pmatrix}$
6	$(77{,}5;\ 248;\ 201)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 30{,}85 & 6{,}33 & 2{,}36 \\ 6{,}33 & 136{,}26 & -7{,}94 \\ 2{,}36 & -7{,}94 & 46{,}74 \end{pmatrix}$
7	$(35;\ 107;\ 29{,}3)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 43{,}12 & 16{,}39 & 3{,}36 \\ 16{,}39 & 146{,}26 & 1{,}94 \\ 3{,}36 & 1{,}94 & 4{,}41 \end{pmatrix}$
8	$(48;\ 297;\ 47{,}1)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 42{,}64 & 19{,}35 & 3{,}89 \\ 19{,}35 & 143{,}26 & 1{,}94 \\ 3{,}89 & 1{,}94 & 4{,}74 \end{pmatrix}$
9	$(51;\ 307;\ 157{,}2)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 52{,}90 & 16{,}30 & 9{,}36 \\ 16{,}30 & 2136 & 52{,}35 \\ 9{,}36 & 52{,}35 & 60{,}74 \end{pmatrix}$
10	$(48;\ 197;\ 207{,}6)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 40{,}85 & -16{,}33 & 4{,}36 \\ -16{,}33 & 136{,}26 & -7{,}94 \\ 4{,}36 & -7{,}94 & 47{,}74 \end{pmatrix}$
11	$(98;\ 28{,}6;\ 265)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 143{,}12 & 1{,}64 & 43{,}36 \\ 1{,}64 & 4{,}26 & 17{,}99 \\ 43{,}36 & 17{,}99 & 485{,}45 \end{pmatrix}$
12	$(102;\ 24{,}6;\ 47)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 144{,}13 & -6{,}32 & 1{,}36 \\ -6{,}32 & 56{,}26 & 55{,}94 \\ 1{,}36 & 55{,}94 & 2138 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы А.3

(1)	(2)	(3)
13	$(142;\ 184{,}6;\ 290)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 152{,}90 & -1{,}66 & 9{,}36 \\ -1{,}66 & 65{,}30 & -2{,}86 \\ 9{,}36 & -2{,}86 & 147{,}56 \end{pmatrix}$
14	$(112;\ 224{,}6;\ 200)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 143{,}12 & 8{,}64 & 10{,}36 \\ 8{,}64 & 133{,}26 & -7{,}99 \\ 10{,}36 & -7{,}99 & 49{,}45 \end{pmatrix}$
15	$(30;\ 272;\ 47)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 5{,}06 & 18{,}64 & 4{,}36 \\ 18{,}64 & 483{,}26 & -6{,}99 \\ 4{,}36 & -6{,}99 & 59{,}45 \end{pmatrix}$
16	$(28;\ 290;\ 149)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 3{,}12 & 4{,}64 & 1{,}36 \\ 4{,}64 & 2135 & 57{,}99 \\ 1{,}36 & 57{,}99 & 65{,}45 \end{pmatrix}$
17	$(25{,}9;\ 220;\ 209)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 4{,}62 & -5{,}33 & -0{,}65 \\ -5{,}33 & 133{,}26 & -7{,}95 \\ -0{,}65 & -7{,}95 & 49{,}45 \end{pmatrix}$
18	$(260;\ 44;\ 299)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 31{,}98 & 8{,}64 & -0{,}89 \\ 8{,}64 & 146{,}26 & 1{,}99 \\ -0{,}89 & 1{,}99 & 5{,}45 \end{pmatrix}$
19	$(232;\ 148;\ 264)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 480{,}90 & -30{,}39 & 67{,}36 \\ -30{,}65 & 65{,}30 & -2{,}86 \\ -67{,}36 & -2{,}86 & 137{,}56 \end{pmatrix}$
20	$(49{,}6;\ 308;\ 163)^{\mathrm{T}}$	$\begin{pmatrix} 55{,}62 & 54{,}33 & 2{,}65 \\ 54{,}33 & 2329 & 47{,}95 \\ 2{,}65 & 47{,}95 & 59{,}45 \end{pmatrix}$