Министерство транспорта России
Дальневосточная государственная морская академия
имени адмирала Г.И. Невельского

Кафедра судовождения

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ СУДОВОЖДЕНИЯ

Специальность 2402

Составил А.П. Домбинский

Владивосток
1999

Позиция № 9
в плане издания
учебной литературы
ДВГМА на 1998 г.

Рецензент Д.Н. Рубинштейн

Составил Александр Павлович Домбинский

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ СУДОВОЖДЕНИЯ

Редактор — О.А. Зубкова
Компьютерная верстка и графика — С.В. Коркишко

Лицензия ЛР № 021060 от 19.06.96

3,3 уч.-изд. л. Формат $60 \times 84^1/_{16}$
Тираж 150 экз Заказ №

Отпечатано в типографии ДВГМА им. адм. Г.И. Невельского
Владивосток, 59, Верхнепортовая, 50а

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

На лабораторных занятиях по математическим основам судовождения отрабатывается решение практических задач с применением микрокалькуляторов. Микрокалькуляторы могут быть любого типа, но они должны обеспечивать возможность вычисления тригонометрических функций.

Решение всех задач выполняется в тетрадях для лабораторных работ (не менее 48 листов), на титульном листе которой подписывается номер группы и фамилия курсанта.

Для выполнения схематических рисунков в некоторых задачах на лабораторных занятиях необходимо иметь следующие принадлежности: простой карандаш, стиральную резинку, линейку, транспортир, циркуль.

Срок и порядок сдачи на проверку выполненных работ оговаривается преподавателем, ведущим лабораторные занятия.

1. СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

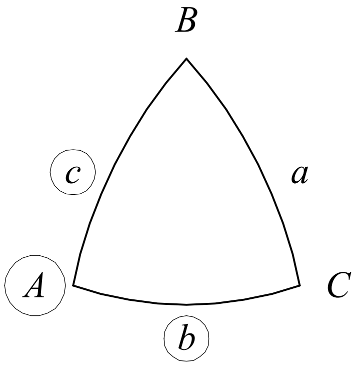
а) КОСОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Сферическим треугольником называется фигура на сфере, образованная тремя попарно пересекающимися дугами больших кругов. Углы сферического треугольника обозначаются прописными буквами латинского алфавита A, B, C, а противолежащие им стороны – соответствующими строчными a, b, c (всего 6 элементов сферического треугольника).

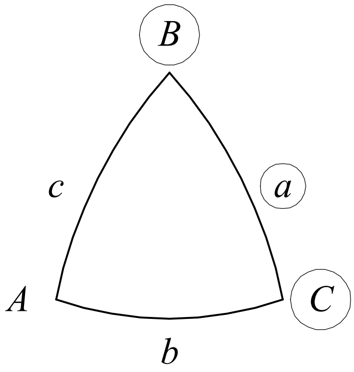
Треугольник считается заданным, если известны какие-либо три его элемента. Отыскание неизвестных элементов по заданным называется решением сферического треугольника. Решение выполняется с использованием формул сферической тригонометрии, в которых элементы сферического треугольника лежат в пределах от 0° до 180° (треугольник Эйлера). Решение треугольника выполняется с использованием в качестве исходных данных только заданных элементов. Для решения применяются основные формулы: косинуса стороны, косинуса угла, котангенсов (4-х рядом лежащих элементов).

Формула косинуса стороны связывает три стороны и один из углов сферического треугольника. Удобна для нахождения неизвестного угла или стороны, противолежащей этому углу, и читается следующим образом: *“в сферическом треугольнике косинус стороны равен произведению косинусов двух других сторон плюс произведение синусов этих сторон на косинус угла между ними”*. Например: b, c, A – заданные элементы, тогда



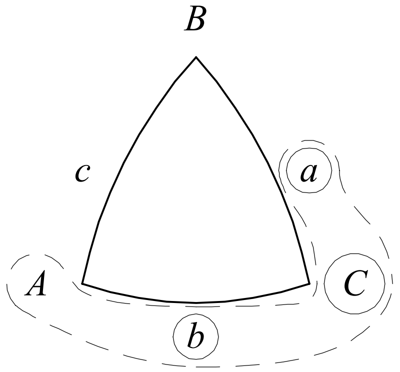
$$\underline{\cos a} = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \underline{\cos A}$$

Формула косинуса угла связывает три угла и сторону сферического треугольника, удобна для нахождения неизвестной стороны или угла, противолежащего этой стороне, и читается так: *“косинус угла сферического треугольника равен отрицательному произведению косинусов двух других углов* *плюс произведение синусов этих углов на косинус стороны между ними”*. Например: a, B, C – заданные элементы, тогда



$$\underline{\cos A} = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \underline{\cos a}$$

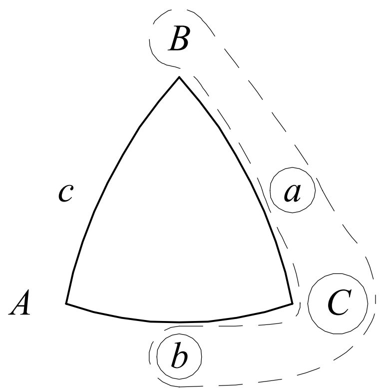
Формула котангенсов (4-х рядом лежащих элементов) связывает 4 рядом лежащих элемента, используется для нахождения крайних элементов и читается следующим образом: *“произведение котангенса крайнего угла на синус среднего угла равно произведению котангенса крайней стороны на синус средней стороны минус произведение косинусов средних элементов”*. Например: a, b, C – заданные элементы, тогда, объединив 4 рядом лежащих элемента A, b, C, a согласно формулировке можно записать формулу:



$$\underline{\operatorname{ctg} A} \cdot \sin C = \underline{\operatorname{ctg} a} \cdot \sin b - \cos b \cdot \cos C,$$

где A и a – крайние элементы;
b и C – средние элементы.

Кроме того, в этом случае можно объединить следующие 4 рядом лежащих элемента: B, a, C, b, тогда согласно формулировке будет



$$\underline{\operatorname{ctg} B} \cdot \sin C = \underline{\operatorname{ctg} b} \cdot \sin a - \cos a \cdot \cos C,$$

где B и b – крайние элементы;
a и C – средние элементы.

1.2. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ КОСОУГОЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

При решении косоугольных сферических треугольников целесообразно придерживаться следующего порядка действий:

1. Записать исходные данные и выделить их на условной схеме.
2. Выписать формулы, связывающие один из искомых элементов с заданиями.
3. Вывести рабочие формулы, в которых в левой части – функция искомого элемента, в правой – функции заданных элементов.
4. Исследовать рабочую формулу на знаки, проставляя знаки соответствующих функций сверху. Это позволит вести визуальный контроль за правильностью расчета промежуточных параметров и иногда заранее определить четверть, в которой находится искомый элемент (меньше или больше 90°).
5. Выполнить расчет, вводя исходные данные в градусах и выписывая по необходимости промежуточные значения не менее, чем с 6 знаками после запятой. Если значение искомой тригонометрической функции отрицательно, то искомый элемент лежит во второй четверти, то есть в пределах 90-180° (для функций cos, tg, ctg). При расчете на калькуляторе для отрицательного значения функции будет выдаваться отрицательный угол (в IV четверти), к которому для перехода во II четверть нужно добавить 180°
6. Выполнить проверку полученных результатов с помощью соотношений:

— против больших углов лежат большие стороны;

— сумма двух сторон больше третьей, а их разность меньше;

— сумма трех сторон лежит в пределах от 0° до 360°, сумма трех углов – в пределах от 180° до 540°;

— по формуле синусов, например:

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}; \qquad \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

После этого необходимо выписать значения искомых элементов сферических треугольников с точностью 0,1' без пропусков разрядов.

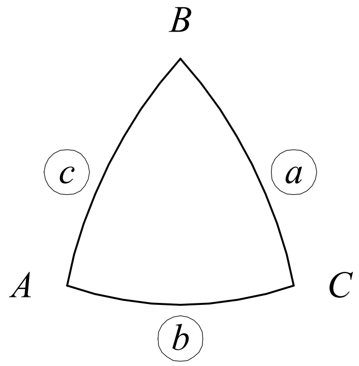
Примечание: если одна из сторон сферического треугольника равна 90°, то удобнее в основных формулах сразу исключить слагаемые, равные нулю, и сократить вычисления.

Пример 1.

Вычислить угол B сферического треугольника, если известны три его стороны: a = 62°42,8'; b = 105°38,9'; c = 81°14,9'.

Решение:

$$B \longrightarrow \cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$



$$\overset{-}{\cos B} = \underbrace{\overset{-}{\cos b} \cdot \overset{+}{\operatorname{cosec} a} \cdot \overset{+}{\operatorname{cosec} c}}_{I} - \underbrace{\overset{+}{\operatorname{ctg} a} \cdot \overset{+}{\operatorname{ctg} c}}_{II},$$

$$\left(\begin{matrix} - \quad + \\ I - II \end{matrix}\right), \quad B > 90^\circ$$

$I = -0{,}30708$; $II = 0{,}0794113$; $\cos B = -0{,}3864913$; $B = 112°44{,}2'$.

1.3. ЗАДАНИЯ

В табл. 1, 2 представлены исходные данные для решения сферических треугольников. Порядок выбора нужных элементов определяется номером задачи, где первая цифра означает номер варианта (табл. 1), а три следующие – номера столбцов для выборки соответствующего элемента. Например, запись «задача № 2/132» – означает, что решается задача второго варианта (заданы элементы: сторона b, сторона c, угол A), в которой сторона b выбирается из 1-го столбца, сторона c – из 3-го столбца, угол A – из 2-го столбца:

№ 2/132 → bcA

$b = 120°33{,}6'$

$c = 102°44{,}3'$

$A = 61°11{,}6'$

Таблица 1

Варианты задания сферических треугольников							
1	2	3	4	5	6	7	8
a, b, c	*b, c, A*	*c, A, B*	*A, B, C*	*a, c, B*	*a, B, C*	*a, b, C*	*b, A, C*

Таблица 2

Элемент	1	2	3	4
a	67°18,6'	65°00,6'	68°58,3'	64°16,2'
b	120°33,6'	118°44,8'	116°27,3'	115°13,5'
c	106°11,2'	90°00,0'	102°44,3'	87°44,1'
A	72°50,3'	61°11,6'	72°38,2'	60°04,4'
B	116°54,2'	122°02,8'	113°43,8'	119°30,3'
C	95°58,2'	75°11,2'	94°09,7'	74°00,4'

б) ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

1.4. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

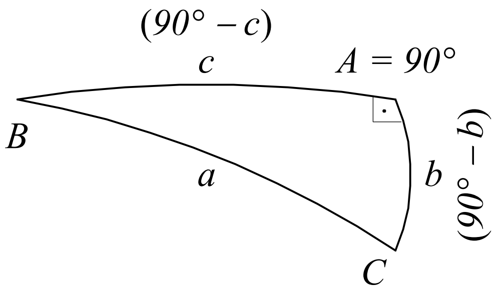
Прямоугольным называется такой сферический треугольник, у которого один из углов равен 90°. Прямоугольные сферические треугольники более рационально решать по правилам Модюи-Непера:

1) *в прямоугольном сферическом треугольнике косинус любого среднего элемента равен произведению котангенсов крайних смежных с ним элементов;*

2) *косинус отдельно лежащего элемента сферического треугольника равен произведению синусов двух не смежных с ним рядом лежащих элементов.*

Примечание: в обоих правилах принято, что катеты лежат рядом друг с другом и что вместо катетов надо брать их дополнения до 90°, изменяя соответственно наименования тригонометрических функций.

Пусть в сферическом треугольнике угол A равен 90°, тогда согласно правилам Модюи-Непера



$$\left.\begin{aligned}\cos a &= \operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C\\ \cos B &= \operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg}(90^\circ - c)\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\cos(90^\circ - c) &= \sin C \cdot \sin a\\ \cos a &= \sin(90^\circ - b)\cdot \sin(90^\circ - c)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

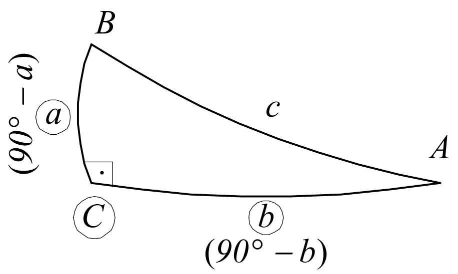
Формулы (1) упрощаются с помощью равенств:

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos\varphi; \quad \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi; \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Порядок действий при решении прямоугольных сферических треугольников остается аналогичным порядку решения косоугольных сферических треугольников. Исследование же рабочей формулы на знаки в любом случае дает возможность определить заранее четверть, в которой находится искомый элемент (меньше или больше 90°).

Проконтролировать результаты решения можно, используя следующее свойство: величины катета и противолежащего угла должны быть в одной четверти (оба эти элемента должны быть или меньше, или же больше 90°).

Пример 2.



Дано: $C = 90°$; $a = 61°24{,}6'$
$b = 112°47{,}3'$

Найти угол B

Решение:

$B \to \cos(90° - a) = \mathrm{ctg}\, B \cdot \mathrm{ctg}\,(90° - b);$

$\ominus \qquad \oplus \qquad \ominus$

$\mathrm{ctg}\, B = \sin a \cdot \mathrm{ctg}\, B;$

$90° < B < 180°;$

$\mathrm{ctg}\, A = -0{,}36889457;$

$B = -69°45{,}1' = 110°14{,}9'$

1.5. ЗАДАНИЯ

В таблицах 3-8 приведены исходные данные для решения прямоугольных сферических треугольников. Порядок выбора нужных элементов определяется номером задачи, который представляет собой дробь.

Первая цифра числителя определяет, какой из 3-х углов сферического треугольника прямой: 1 — A = 90°; 2 — B = 90°; 3 — C = 90°.

Вторая цифра числителя обозначает, какие элементы прямоугольного сферического треугольника заданы (см. табл. 3, 5, 7). *По двум цифрам знаменателя* из табл. 4, 6, 8 выбираются численные значения заданных элементов прямоугольного сферического треугольника.

Например, задача № 23/41 – это означает, что B = 90° и заданные элементы c и C, которые выбираются: c из 4-го столбца, а C из 1-го столбца табл. 6.

№ 23/41 $\qquad c = 48°43{,}6'$

$B = 90°$ $\quad cC$ $\qquad C = 70°20{,}0'$

Таблица 3

1) A = 90°

1	2	3	4	5	6
b, c	*c, B*	*b, B*	*a, b*	*a, C*	*B, C*

Таблица 4

	1	2	3	4
a	120°21,4'	125°14,8'	130°16,4'	128°37,7'
b	43°41,5'	36°24,3'	47°38,8'	45°08,6'
c	118°34,7'	98°55,6'	115°45,7'	104°06,6'
B	72°14,3'	61°34,5'	74°41,4'	65°57,7'
C	116°24,8'	112°47,3'	108°24,4'	110°36,5'

Таблица 5

2) $B = 90°$

1	2	3	4	5	6
a, c	*a, C*	*c, C*	*b, c*	*b, A*	*A, C*

Таблица 6

	1	2	3	4
a	103°02,5'	107°17,8'	116°29,4'	123°31,2'
b	121°42,5'	114°53,5'	110°37,8'	103°26,4'
c	55°18,3'	57°09,6'	39°52,7'	48°43,6’
A	100°00,0'	105°30,0'	110°40,0'	120°50,0'
C	70°20,0'	65°15,5'	62°10,4'	76°20,6'

Таблица 7

3) $C = 90°$

1	2	3	4	5	6
a, b	*b, A*	*a, A*	*a, c*	*c, B*	*A, B*

Таблица 8

	1	2	3	4
a	40°54,7'	45°32,1'	51°23,8'	38°47,6'
b	124°36,5'	130°21,2'	135°40,8'	136°54,9'
c	128°05,4'	110°20,0'	112°33,3'	105°44,4'
A	63°08,4'	65°21,5'	70°37,3'	73°27,0’
B	126°35,0'	118°47,8'	130°16,5'	137°43,0'

2. ГЕОМЕТРИЯ ЗЕМНОГО СФЕРОИДА

2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Для построения карт разные страны или группы стран используют различные референц-эллипсоиды (земные сфероиды). В нашей стране в качестве референц-эллипсоида принят эллипсоид Красовского с параметрами:

большая полуось a = 6 378 245 м; малая полуось b = 6 356 863 м;

квадрат эксцентриситета $\varepsilon^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = 0{,}0066934.$

В связи с появлением глобальных радионавигационных систем, особенно спутниковых, возникла необходимость создания эллипсоида, удовлетворяющего поверхности всей Земли. По результатам многочисленных измерений в США и других странах в 1972 году был принят эллипсоид WGS-72 (World Geodetic Survey) с параметрами:

a = 6 378 135 м; b = 6 356 750 м; ε^2 = 0,0066945.

Затем параметры этого эллипсоида были уточнены и в 1984 году был принят эллипсоид WGS-84 с параметрами:

a = 6 378 137 м; b = 6 356 752 м; ε^2 = 0,0066945.

Форма и размеры земного сфероида определяют значения *радиусов кривизны* различных сечений. Величина радиусов кривизны зависит от положения точки на сфероиде или от географической широты φ. Радиусы кривизны используются для расчета длин дуг соответствующих сечений на основании общих формул:

$S = R\varphi_{\text{рад}}$ – для дуги окружности;

$dS = R\, d\varphi_{\text{рад}}$ – для дуги сечения переменной кривизны.

Для перевода радианной меры измерения в градусную и наоборот служат величины arc 1° и arc 1' – это длины дуги окружности величиной 1° и 1', выраженные в радианах:

$$\operatorname{arc} 1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{1}{57{,}29578^\circ} \approx \frac{1}{57{,}3^\circ};$$

$$\operatorname{arc} 1' = \frac{2\pi}{360 \cdot 60'} = \frac{1}{3437{,}7468'} \approx \frac{1}{3438'}.$$

2.2. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Радиус параллели r используется для расчета длин дуг параллелей, определяющих расстояния между меридианами

$$r = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} = \frac{a\cos\varphi}{W}, \text{ где } W = \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}.$$

2. Длина дуги параллели P показывает расстояние между двумя меридианами в заданной широте.

$$P = r\cdot\Delta\lambda_{\text{рад}} = r\cdot\Delta\lambda^\circ\cdot\operatorname{arc}1^\circ = r\cdot\Delta\lambda'\cdot\operatorname{arc}1'.$$

3. Длина 1 минуты дуги параллели P' рассчитывается для $\Delta\lambda = 1'$.

4 Длина дуги экватора P_0 показывает расстояние между двумя меридианами на экваторе

$$P_0 = a\cdot\Delta\lambda_{\text{рад}} = a\cdot\Delta\lambda^\circ\cdot\operatorname{arc}1^\circ = a\cdot\Delta\lambda'\cdot\operatorname{arc}1'.$$

5. Длина 1 минуты дуги экватора P_0 (экваториальная миля) рассчитывается для $\Delta\lambda = 1'$.

6. Радиус кривизны меридиана M используется для вычисления длины дуги меридиана и разности широт точек на поверхности сфероида

$$M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\left(\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}\right)^3} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{W^3}.$$

7. Радиус кривизны нормального сечения N используется для вычисления длины дуги параллели, разности долгот и разности азимутов

$$N = \frac{a}{W}.$$

8. Длина 1 минуты дуги меридиана Δ' (морская миля) рассчитывается для $\Delta\varphi = 1'$ и служит единицей измерения расстояний в море

$$\Delta_1' = M \cdot \Delta\varphi_{\text{рад}} = M \cdot \Delta\varphi' \cdot \text{arc}1';$$

$$\Delta_2' = 1852{,}25 - 9{,}31\cos 2\varphi \text{ – для эллипсоида Красовского;}$$

$$\Delta_3' = 1852{,}22 - 9{,}32\cos 2\varphi \text{ – для эллипсоида WGS - 84.}$$

9. Приведенная широта u служит для проектирования земного сфероида на шар (вычисляется с точностью до 0,1')

$$\text{tg}\,u = \frac{b}{a}\text{tg}\,\varphi.$$

Примечание: размерность и точность вычислений необходимо соблюдать согласно примеру, приведенному ниже.

Для проверки результатов расчета можно использовать соотношения между радиусами кривизны или законы их изменения в зависимости от широты, наглядно показанные на рис. 1, 2, 3.

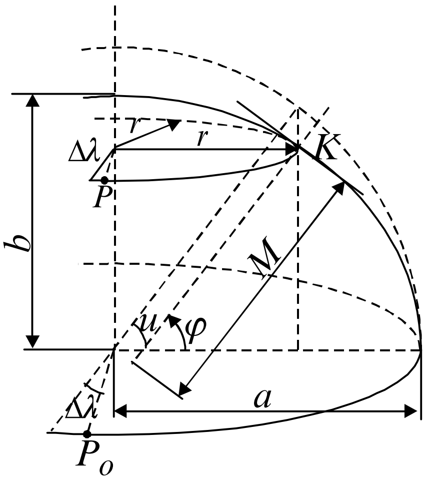


Рис. 1

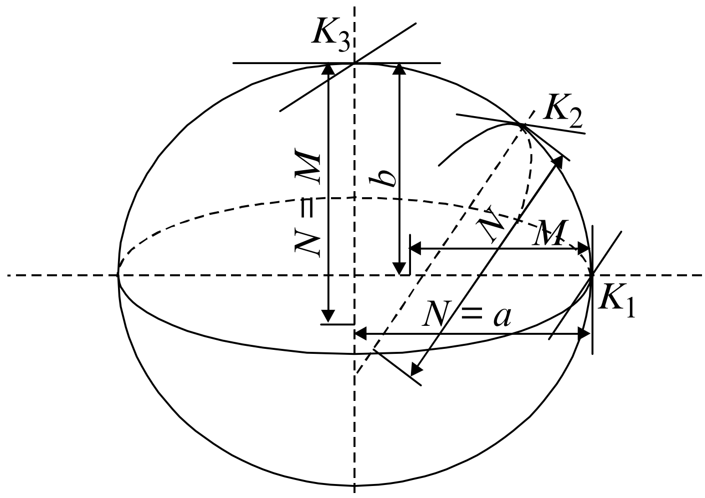


Рис. 2

На экваторе при $\varphi = 0°$ радиус кривизны нормального сечения $N = a$, радиус кривизны меридиана $M = a(1-\varepsilon^2)$, т. е. для эллипсоида Красовского в этом случае M = 6335,6 км, а для эллипсоида WGS-84 M = 6335,4 км. На полюсе при φ = 90°N(S) $N = M$, и для эллипсоида Красовского $N = M$ = 6399,7 км, а для WGS-84 $N = M$ = 6399,6 км.

В промежуточных широтах ($\varphi = 0 \div 90°$) $N > M$.

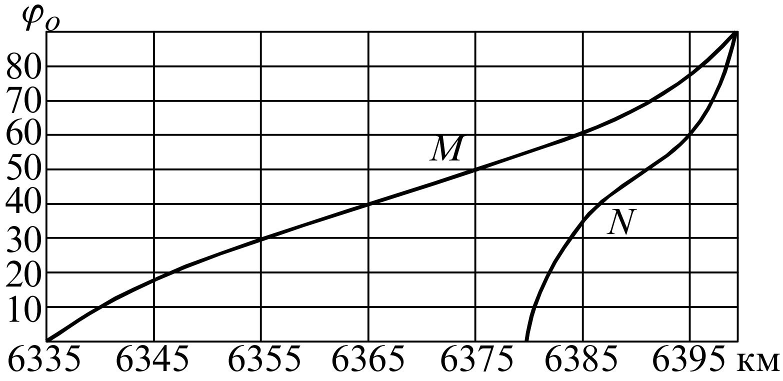


Рис. 3

Пример 3.

Вычислить и сравнить элементы земных эллипсоидов Красовского и WGS-84 для широты $\varphi = 33°22{,}1'$ и разности долгот $\Delta\lambda = 4{,}4'$.

Решение:

1. Предварительно вычислим вспомогательную величину W, затем радиус параллели

Красовского: $W = \sqrt{1 - 0{,}0066934\sin^2(33°22{,}1')} = 0{,}998987;$

$$r = \frac{6378245\cos(33°22{,}1')}{0{,}998987} = 5332205{,}7 \text{ м} \approx 5332{,}2 \text{ км}.$$

WGS-84: $W = \sqrt{1 - 0{,}0066945\sin^2(33°22{,}1')} = 0{,}998987;$

$$r = \frac{6378137\cos(33°22{,}1')}{0{,}998987} = 5332115{,}4 \text{ м} \approx 5332{,}1 \text{ км}.$$

2. Вычислим длину дуги параллели P для $\Delta\lambda = 4{,}4'$

Красовского: $P = \dfrac{5332205{,}7 \cdot 4{,}4}{3437{,}7468} = 6824{,}733 \approx 6825$ м;

WGS-84: $P = \dfrac{5332115{,}4 \cdot 4{,}4}{3437{,}7468} = 6824{,}6173 \approx 6825$ м.

3. Вычислим длину 1 минуты дуги параллели P'

Красовского: $P' = \dfrac{5332205{,}7}{3437{,}7468} = 1551{,}0757 \approx 1551$ м;

WGS-84: $P' = \dfrac{5332115{,}4}{3437{,}7468} = 1551{,}0494 \approx 1551$ м.

4. Вычислим длину дуги экватора P_0 для $\Delta\lambda = 4{,}4'$

Красовского: $P_0 = \dfrac{6378245 \cdot 4{,}4}{3437{,}7468} = 8163{,}5672 \approx 8164$ м;

WGS-84: $P_0 = \dfrac{6378137 \cdot 4{,}4}{3437{,}7468} = 8163{,}4291 \approx 8163$ м.

5. Вычислим длину 1 минуты дуги экватора P_0' (экваториальную милю)

Красовского: $P_0' = \dfrac{6378245}{3437{,}7468} = 1855{,}3562 \approx 1855$ м;

WGS-84: $P_0' = \dfrac{6378137}{3437{,}7468} = 1855{,}3248 \approx 1855$ м.

6. Вычислим радиус кривизны меридианального сечения в точке с $\varphi = 33°22{,}1'$

Красовского: $M = \dfrac{6378245 \cdot (1 - 0{,}0066934)}{0{,}998987^3} = 6354847{,}2 \approx 6354{,}8$ км;

WGS-84: $M = \dfrac{6378137 \cdot (1 - 0{,}0066945)}{0{,}998987^3} = 6354732{,}5 \approx 6354{,}7$ км.

7. Вычислим радиус кривизны нормального сечения в точке с $\varphi = 33°22{,}1'$

Красовского: $N = \dfrac{6378245}{0{,}998987} = 6384712{,}7 \approx 6384{,}7$ км;

WGS-84: $N = \dfrac{6378137}{0{,}998987} = 6384604{,}6 \approx 6384{,}6$ км.

8. Вычислим длину морской мили Δ' (1 минуты дуги меридиана) в заданной широте

Красовского: $\Delta_1' = \dfrac{6354847{,}2}{3437{,}7468} = 1848{,}5501 = 1848{,}6$ м;

$\Delta_2' = 1852{,}25 - 9{,}31\cos(66°44{,}2') = 1848{,}5729 \approx 1848{,}6$ м;

WGS-84: $\Delta_1' = \dfrac{6354732{,}5}{3437{,}7468} = 1848{,}5167 \approx 1848{,}5$ м;

$\Delta_3' = 1852{,}22 - 9{,}32\cos(66°44{,}2') = 1848{,}539 \approx 1848{,}5$ м.

9. Вычислим значение приведенной широты u

Красовского: $\mathrm{tg}\,u = \dfrac{6356863}{6378245} \cdot \mathrm{tg}(33°22{,}1') = 0{,}65637762;$

$u = 33°16{,}8'$

WGS-84: $\mathrm{tg}\,u = \dfrac{6356752}{6378137} \cdot \mathrm{tg}(33°22{,}1') = 0{,}65637762;$

$u = 33°16{,}8'$.

2. 3. ЗАДАНИЯ

Задания выбираются из табл. 9 по номеру задачи. Первые две цифры номера дают строку для выбора значения широты φ, две последние цифры – строку для выбора значения разности долгот $\Delta\lambda$.

Вариант 13/06: $\varphi = 89°00{,}2'$; $\Delta\lambda = 4{,}0'$

Таблица 9

№ п/п	φ	Δλ	№ п/п	φ	Δλ
1	43°08,2'	4,8'	11	85°08,0'	4,6'
2	1°16,3'	8,4'	12	33°22,1'	2,2'
3	32°02,8'	0,8'	13	89°00,2'	4,8'

№ п/п	φ	Δλ	№ п/п	φ	Δλ
4	3°54,4'	4,4'	14	17°10,0'	2,8'
5	65°05,3'	3,2'	15	58°06,6'	3,1'
6	8°13,2'	4,0'	16	13°59,8'	8,6'
7	72°18,0'	0,8'	17	81°08,3'	2,3'
8	22°13,6'	6,0'	18	42°32,6'	4,0'
9	54°50,7'	6,6'	19	77°20,8'	1,6'
10	42°02,2'	3,8'	20	16°13,9'	3,3'

3. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ДУГИ БОЛЬШОГО КРУГА

3.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Дуга большого круга (ДБК), или ортодромия – это след на поверхности сферы, полученный в результате сечения сферы плоскостью, проходящей через ее центр. ДБК является линией кратчайшего расстояния на сфере. При изображении сферы на плоскости ДБК обращена выпуклостью в сторону ближайшего полюса (P_{N} или P_{S}). ДБК на сфере играет ту же роль, что и прямая на плоскости.

ДБК пересекает меридианы под разными углами, поэтому при переходе судна по ДБК направление движения (курс судна) постоянно меняется. В точке отхода A (φ_A; λ_A) это начальный курс $K_{\text{н}}$, в точке прихода B (φ_B; λ_B) это конечный курс $K_{\text{к}}$. Разность двух этих углов дает общее изменение направления ДБК между точками отхода A и прихода B и называется *сферическим схождением (сближением) меридианов* γ (рис. 4.1, 4.2):

$$\gamma = K_{\text{к}} - K_{\text{н}}$$

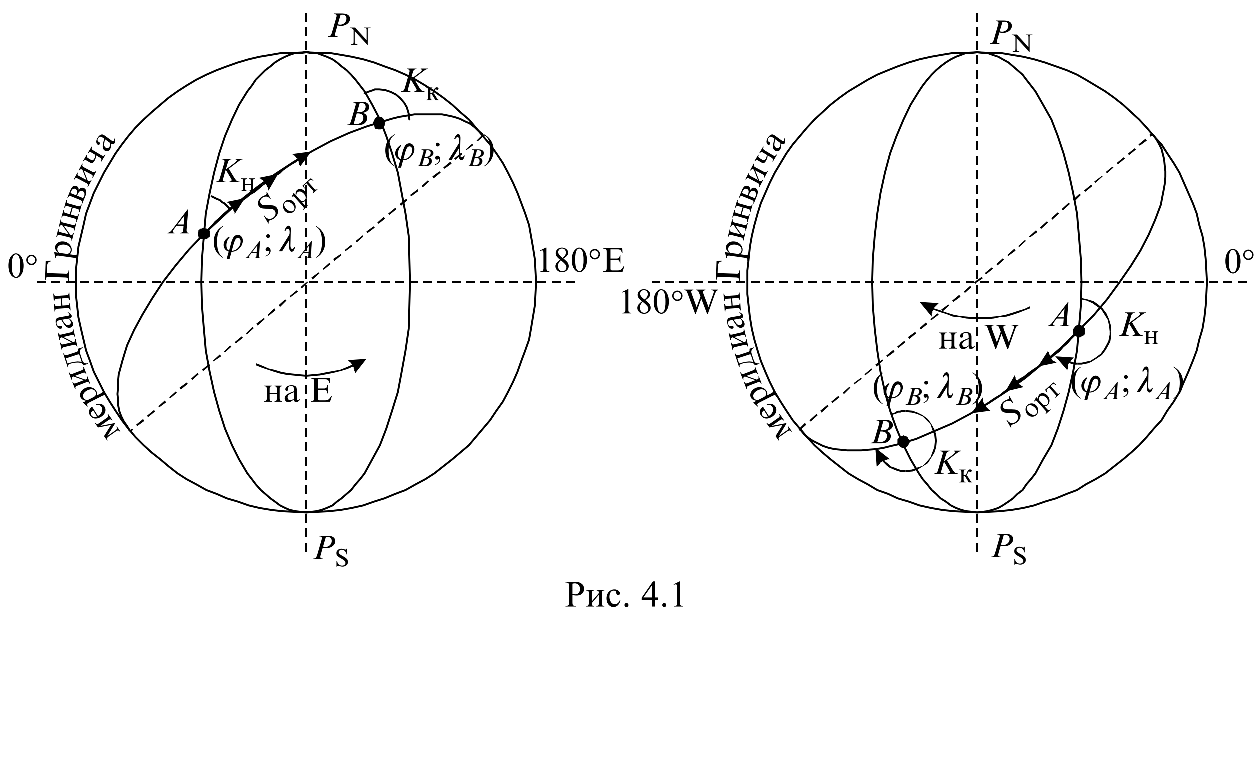


Рис. 4.1

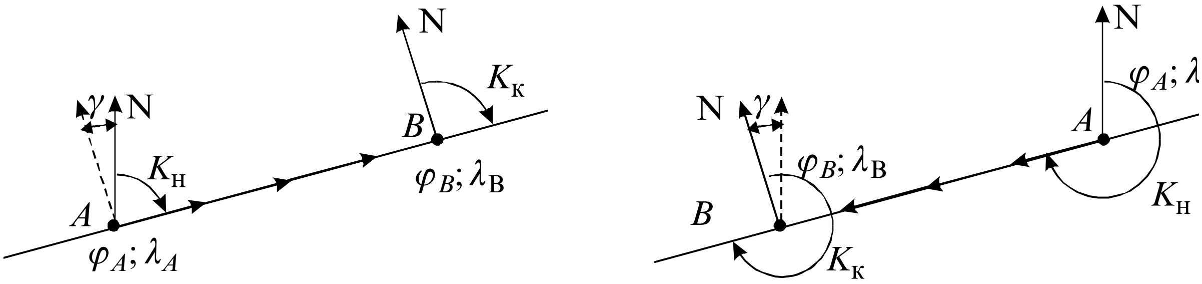


Рис. 4.2

а) движение на восток б) движение на запад

К основным элементам ДБК относятся $K_{\text{н}}$; $K_{\text{к}}$ и $S_{\text{орт}}$. Для сферы эти элементы можно рассчитать с помощью формул сферической тригонометрии. При этом сферическое схождение меридианов γ можно использовать для проверки:

$$K_{\text{к}} = K_{\text{н}} + \gamma \tag{2}$$

Сумма в формуле (2) алгебраическая, то есть γ может иметь знак «+», либо «–».

Сферическое схождение меридианов γ рассчитывается по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\varphi_{\text{ср}}}{\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\Delta\lambda}{2}, \tag{3}$$

где $\varphi_{\text{ср}} = \dfrac{\varphi_A + \varphi_B}{2}$ – средняя широта;

$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$ – разность широт;

$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$ – разность долгот.

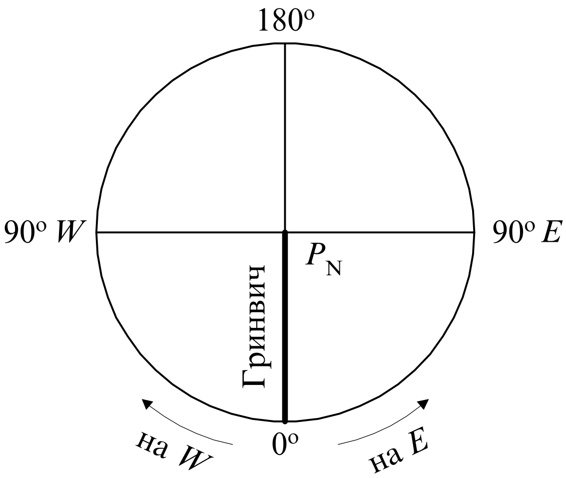
При расчете $\varphi_{\text{ср}}$, $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ следует присваивать φ_A, φ_B, λ_A, λ_B следующие знаки в зависимости от наименования широты и долготы: «+» φ N; «–»φ S; «+» λE; «–» λW.

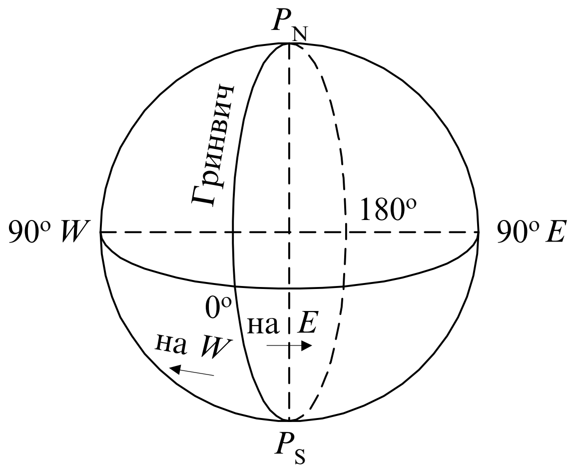
При изображении рисунков, подобных рис. 4, необходимо сферу располагать таким образом, чтобы сферический треугольник, образованный точками *A*, *B* и полюсом, полностью находился с видимой части сферы. Такая ориентировка сферы возможна для всех вариантов наших задач, поскольку мы будем решать только Эйлеровы сферические треугольники, т.е. со сторонами и углами меньше 180°. В некоторых задачах (при $\Delta\lambda$ близких 180°) удобно при построении рисунка плоскость меридиана точки отхода *A* или прихода *B* совмещать с плоскостью изображения (т. е. меридиан точки отхода *A* или прихода *B* изобразится на рисунке окружностью – см. пример).

3.2. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

1. По номеру варианта из табл. 10 выбрать исходные координаты точки отхода *A* (φ_A, λ_A) и точки прихода *B* (φ_B, λ_B) и рассчитать разность долгот $\Delta\lambda$ для определения общего направления перехода (на запад или на восток). Раз-

ность долгот $\Delta\lambda$ всегда меньше 180°. Счет долгот ведется согласно нижеследующему рисунку от меридиана Гринвича





При расчете разности долгот $\Delta\lambda$ следует восточной долготе (E) присваивать знак «+», западной (W) – знак «–». Например:

λ_A = 150°25,0'W; λ_B = 95°15,0'W, тогда

$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$ = –95°15,0'W – (–150°25,0'W) = –95°15,0' + 150°25,0' =

= +55°10,0' к E – движение на восток.

В расчетные формулы $\Delta\lambda$ всегда подставляется положительной. Знак при $\Delta\lambda$ указывает в данном случае только направление приращения к E или W.

2. Выполнить схематический чертеж поверхности сферы, где нанести полюса (P_N и P_S), экватор, меридиан Гринвича (так, чтобы сферический треугольник, образованный точками A, B и полюсом, полностью находился с видимой части сферы). Схематично нанести на поверхности сферы точку отхода A (φ_A; λ_A) и точку прихода B (φ_B; λ_B). Изобразить меридианы точек отхода и прихода.

3. Нанести ДБК, проходящую через точки A и B, обозначить ее элементы: расстояние $S_{орт}$, начальный курс в точке отхода $K_н$, конечный курс в точке прихода $K_к$ ($K_н$ и $K_к$ всегда откладываются по часовой стрелке от северной части соответствующего меридиана).

4. Обозначить известные элементы полученного сферического треугольника: стороны (90° – φ_A) и (90° – φ_B), угол между ними $\Delta\lambda$. Сам сферический треугольник, чтобы выделить на рисунке, можно заштриховать.

5. Найти численные значения известных сторон (90° – φ_A) и (90° – φ_B), записать расчетные формулы и решить сферический треугольник относительно неизвестных: $S_{орт}$, углов A и B.

Расстояние $S_{орт}$ вычисляется с точностью до 0,1' или 0,1 мили, углы A и B (а затем и $K_н$ и $K_к$), а также угол γ – с точностью до 0,1°. $K_н$ и $K_к$ рассчитываются с помощью углов A и B сферического треугольника.

Порядок расчета $K_н$ и $K_к$ показан в примере.

6. Произвести контроль вычислений $K_н$ и $K_к$ по формуле (2).

Пример 4.

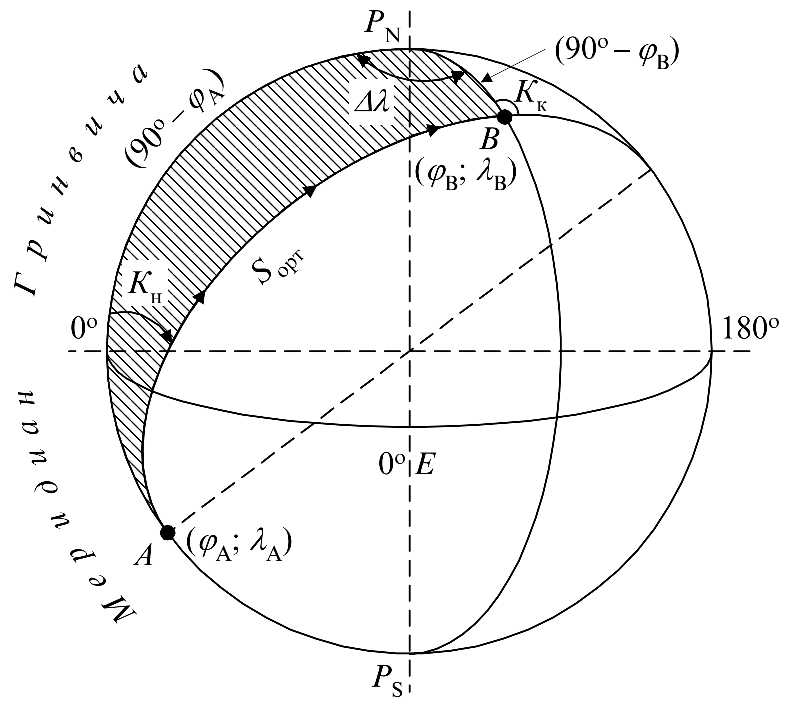
Рассчитать элементы ДБК для следующих данных: φ_A = 23°00,6'S; λ_A = 30°22,3'E; φ_B = 58°18,0'N; λ_B = 153°40,2'W.

Решение:

1. Вычислим разность долгот $\Delta\lambda$.

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = -153°40{,}2'W - 30°22{,}3'E =$$
$$= -184°02{,}5' \text{ к W} = 175°57{,}5' \text{ к E – движение на восток.}$$

2-4. Выполним схематический чертеж, где левая часть окружности совпадает с меридианом точки отхода A. Нулевая часть меридиана Гринвича расположена с невидимой стороны сферы (слева).



5. Найдем известные стороны сферического треугольника

$$(90° - \varphi_A) = 90° - (-23°00{,}6'S) = 113°00{,}6'\ ;$$
$$(90° - \varphi_B) = 90° - 58°18{,}0'N = 31°42{,}0'.$$

Выведем расчетные формулы и решим сферический треугольник относительно неизвестных $S_{орт}$, A и B.

$$\overset{\ominus}{\cos S_{орт}} = \overset{\ominus}{\cos(90° - \varphi_A)} \cdot \overset{\oplus}{\cos(90° - \varphi_B)} + \overset{\oplus}{\sin(90° - \varphi_A)} \cdot \overset{\oplus}{\sin(90° - \varphi_B)} \cdot \overset{\ominus}{\cos\Delta\lambda}.$$

$$\cos S_{орт} = -0{,}8150356\ ;\quad S_{орт} = 144{,}59088° = 8675{,}4528' \approx 8675{,}5 \text{ мили.}$$

$$\operatorname{ctg} A \cdot \sin\Delta\lambda = \operatorname{ctg}(90° - \varphi_B) \cdot \sin(90° - \varphi_A) - \cos(90° - \varphi_A) \cdot \cos\Delta\lambda;$$

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\operatorname{ctg}(90° - \varphi_B) \cdot \sin(90° - \varphi_A) - \cos(90° - \varphi_A) \cdot \cos\Delta\lambda}{\sin\Delta\lambda} =$$

$$= \overset{\oplus}{\operatorname{ctg}(90° - \varphi_B)} \cdot \overset{\oplus}{\sin(90° - \varphi_A)} \cdot \overset{\oplus}{\operatorname{cosec}\Delta\lambda} - \overset{\ominus}{\cos(90° - \varphi_A)} \cdot \overset{\ominus}{\operatorname{ctg}\Delta\lambda}.$$

$\operatorname{ctg} A$ = 15,612384; $\operatorname{tg} A$ = 0,064051716; A = 3,6648867° ≈ 3,7°.

Согласно рисунку: $K_н = A = 3{,}7°$,

$$\operatorname{ctg} B \cdot \sin \Delta\lambda = \operatorname{ctg}(90° - \varphi_A) \cdot \sin(90° - \varphi_B) - \cos(90° - \varphi_B) \cdot \cos \Delta\lambda;$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{ctg}(90° - \varphi_A) \cdot \sin(90° - \varphi_B) - \cos(90° - \varphi_B) \cdot \cos \Delta\lambda}{\sin \Delta\lambda} =$$

$$= \overset{\ominus}{\operatorname{ctg}(90° - \varphi_A)} \cdot \overset{\oplus}{\sin(90° - \varphi_B)} \cdot \overset{\oplus}{\operatorname{cosec} \Delta\lambda} - \overset{\oplus}{\cos(90° - \varphi_B)} \cdot \overset{\ominus}{\operatorname{ctg} \Delta\lambda}.$$

$\operatorname{ctg} B = 8{,}875121$; $\operatorname{tg} B = 0{,}11267452$; $B = 6{,}4286604° \approx 6{,}4°$.

Согласно рисунку: $K_к = 180° - B = 180° - 6{,}4° = 173{,}6°$

$$\varphi_{ср} = \frac{\varphi_A + \varphi_B}{2} = \frac{-23°00{,}6'\text{S} + 58°18{,}0'\text{N}}{2} = 17°38{,}7'\text{N};$$

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = 58°18{,}0'\text{N} - (-23°00{,}6'\text{S}) = 81°18{,}6';$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \varphi_{ср}}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{\sin 17°38{,}7'}{\cos 40°39{,}3'} \cdot \operatorname{tg} 87°58{,}8' = 11{,}328288;$$

$$\frac{\gamma}{2} = 84{,}955314°; \qquad \gamma = 169{,}91063° \approx 169{,}9°.$$

Проверка:

$$K_к = K_н + \gamma = 3{,}7° + 169{,}9° = 173{,}6°$$

3.3. ЗАДАНИЯ

Исходные данные для решения задач выбираются из табл. 10 по номеру задачи.

$$\underset{IJKL}{\text{№ } 2145} \qquad \varphi_A[I] = 23°43{,}6'\text{S} \qquad \varphi_B[K] = 58°18{,}0'\text{N}$$

$$\lambda_A[J] = 30°22{,}3'\text{E} \qquad \lambda_B[L] = 33°49{,}4'\text{W}$$

Таблица 10

	1	2	3	4	5
$\varphi_A[I]$	42°14,8'N	23°00,6'S	10°59,8'N	62°44,3'S	36°14,8'N
$\lambda_A[J]$	30°22,3'E	112°53,3'W	160°10,3'E	54°11,2'W	87°32,6'E
$\varphi_B[K]$	38°19,4'S	24°09,9'N	5°27,3'S	58°18,0'N	63°22,0'S
$\lambda_B[L]$	24°43,1'W	73°38,5'E	153°40,2'W	102°12,1'E	33°49,4'W

4. ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ И НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Прямыми называются такие измерения, при которых искомые величины находят непосредственно из опытных данных. Например, если искомой величиной является курс судна, то гироскопический или магнитный компас осуществляет прямое его измерение. Косвенными называются такие измерения, при которых искомые величины находят на основе известной зависимости между ними и величинами, подвергаемыми прямым измерениям. Так, если искомыми являются широта и долгота места судна, а мы измеряем расстояния до ориентиров, пеленги на них, высоты светил и т. д. и лишь затем, произведя какие-то графические построения или аналитические вычисления, находим искомое место судна на карте, то это будут косвенные измерения.

а) ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

4.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Предположим, одним наблюдателем, одним инструментом и при неизменных условиях выполнено n прямых измерений некоторой постоянной физической величины $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (например, с неподвижного судна измерен ряд пеленгов на какой-либо ориентир). Так как все измерения выполнены в одинаковых условиях, можем считать их равноточными.

Ниже будем рассматривать простейший случай, когда систематические погрешности в измерениях отсутствуют, и погрешности двух любых измерений можно считать некоррелированными величинами. Присутствуют лишь случайные погрешности измерений.

В теории вероятностей доказывается, что если погрешности измерений распределены по нормальному закону, то наиболее точной из всех возможных оценок является среднее арифметическое из результатов измерений:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{4}$$

Чему равна дисперсия $D\left(\overline{X}\right)$ найденной нами оценки $\overline{X}$?

Мы рассматриваем равноточные измерения, следовательно,

$$m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3} = \ldots = m_{x_i} = \cdots = m_{x_n} = m_{x(1)},$$

где $m_{x(1)}$ – средняя квадратическая погрешность единичного измерения.

Поскольку случайные погрешности являются некоррелированными случайными величинами, то дисперсия $D\left(\overline{X}\right)$ будет

$$D\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_{x(1)}^2 = \frac{1}{n} \cdot m_{x(1)}^2 . \tag{5}$$

Средняя квадратическая погрешность оценки $\overline{X}$ (средняя квадратическая погрешность среднего арифметического) есть

$$m_{\overline{X}} = \sqrt{D\left(\overline{X}\right)} = \frac{m_{x(1)}}{\sqrt{n}} . \tag{6}$$

То есть можно сказать, что среднее арифметическое в $\sqrt{n}$ раз точнее единичного измерения. Почему? Мы рассматриваем влияние случайных погрешностей. Они являются некоррелированными случайными величинами: в разных измерениях имеют разную величину и могут иметь разные знаки. При сложении они частично друг друга компенсируют, поэтому точность среднего арифметического выше точности единичного измерения. Но полной компенсации не происходит, поэтому найти совершенно безошибочную оценку невозможно.

Формула (6) дает возможность оценить точность среднего арифметического, но для этого должна быть известна средняя квадратическая погрешность $m_{x(1)}$ единичного измерения. Для ее оценки существует два пути:

1) *априорное* (до опыта) оценивание точности измерений, которое основывается на результатах каких-то предыдущих измерений или на косвенном (теоретическом) анализе точности измерений. В этом случае, взяв готовую величину $m_{x(1)}$ и подставив ее в формулу (6), мы можем оценить $m_{\overline{X}}$, но при этом не будут учтены реальные условия измерений;

2) *апостериорное* (после опыта) оценивание точности измерений производится по результатам тех измерений, точность которых оценивается.

Для апостериорного оценивания точности измерений применяются три способа:

1. По эталонным измерениям. Если при измерениях известно эталонное (истинное) значение измеряемой величины $X_{\text{ист}}$, за оценку средней квадратической погрешности единичного измерения принимают величину

$$m_{x(1)} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} \qquad \text{(формула Гаусса)}, \tag{7}$$

где: $\Delta_i = x_i - X_{\text{ист}}$ – абсолютные случайные погрешности измерений.

Чтобы применять формулу Гаусса, необходимо располагать результатами эталонных измерений, более точных (как минимум, в три раза), нежели те, точность которых оценивается. Такая возможность встречается сравнительно редко, поэтому чаще применяются другие способы.

2. По отклонениям от среднего арифметического. Среднее арифметическое (или вероятнейшее) значение серии измерений $\overline{X}$ оценивается по формуле

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{8}$$

Средняя квадратическая погрешность (СКП) единичного измерения, вычисленная по отклонениям от среднего арифметического, рассчитывается с помощью зависимости

$$m_{x(1)} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-1}}, \qquad \text{(формула Бесселя)} \tag{9}$$

где $V_i = x_i - \overline{X}$ – отклонения от среднего арифметического.

Затем подсчитывается СКП среднего арифметического по формуле (6) и результаты представляются в виде $\overline{X} \pm m_{\overline{X}}$.

3. По размаху R результатов измерений. Если измеряется постоянная (не изменяющаяся в процессе измерений) физическая величина, то размахом результатов измерений называется разность $R = x_{\max} - x_{\min}$ наибольшего и наименьшего из результатов измерений. При $n < 14$ СКП единичного измерения может быть оценена в этом случае по формуле

$$m_{x(1)} = \pm \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\sqrt{n}}.$$

4.2. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

Таким образом, при обработке прямых равноточных измерений может быть известно $X_{\text{ист}}$ или неизвестно. В случае, когда $X_{\text{ист}}$ известно, необходимо рассчитать:

— СКП единичного измерения $m_{x(1)}$ по формуле Гаусса;

— СКП единичного измерения $m_{x(1)}$ по размаху.

В случае, когда $X_{\text{ист}}$ неизвестно, необходимо рассчитать:

— среднее арифметическое значение серии измерений $\overline{X}$;

— СКП единичного измерения $m_{x(1)}$ по формуле Бесселя;

— СКП среднего арифметического $m_{\overline{X}}$ по формуле (6);

— СКП единичного измерения $m_{x(1)}$ по размаху.

Пример 5.

Определить СКП единичного измерения секстаном радиуса Солнца, если его истинное значение, выбранное из морского астрономического ежегодника (МАЕ), составляет $R_{\text{ист}}^{\odot} = 16{,}3'$. Результаты измерений радиуса Солнца секстаном $R_i^{\odot'}$ приведены в схеме расчета.

Решение:

№ п/п	$R_i^{\odot'}$	$\Delta_i^{'}$	$\Delta_i^{'2}$
1	16,2	–0,1	0,01
2	16,1	–0,2	0,04
3	16,4	0,1	0,01
4	16,3	0,0	0,00
5	16,5	0,2	0,04
6	16,4	0,1	0,01
7	16,6	0,3	0,09
8	16,4	0,1	0,01

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = 0{,}21$$

По формуле Гаусса:

$$m_{R^{\odot}(1)} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}21}{8}} = \pm 0{,}16'.$$

По размаху

$$R = R_{\max}^{\odot} - R_{\min}^{\odot} = 16{,}6 - 16{,}1 = 0{,}5';$$

$$m_{R^{\odot}(1)} = \frac{R_{\max}^{\odot} - R_{\min}^{\odot}}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}5'}{\sqrt{8}} = \pm 0{,}18'.$$

Пример 6.

Определить вероятнейшее значение измеренного с помощью РЛС расстояния до ориентира $\overline{D}$, СКП единичного измерения $m_{D(1)}$ по формуле Бесселя и по размаху, СКП среднего арифметического $m_{\overline{D}}$. Результаты измерения расстояния D_i приведены в схеме расчета.

Решение:

№ п/п	D_i, мили	V_i, мили	V_i^2
1	18,32	–0,04	0,0016
2	18,37	0,01	0,0001
3	18,32	–0,04	0,0016
4	18,36	0,00	0,0000
5	18,40	0,04	0,0016
6	18,37	0,01	0,0001
7	18,32	–0,04	0,0016
8	18,36	0,00	0,0000
9	18,37	0,01	0,0001
10	18,40	0,04	0,0016
11	18,36	0,00	0,0000
	$\overline{D} = 18{,}36$		$\sum_{i=1}^{n} V_i^2 = 0{,}0083$

По формуле Бесселя

$$m_{D(1)} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}0083}{11-1}} = \pm 0{,}029 \approx 0{,}03 \text{ мили};$$

$$m_{\overline{D}} = \pm\frac{m_{D(1)}}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0{,}03}{\sqrt{11}} = \pm 0{,}009 \approx \pm 0{,}01 \text{ мили}.$$

По размаху

$$R = D_{\max} - D_{\min} = 18{,}40 - 18{,}32 = 0{,}08 \text{ мили};$$

$$m_{D(1)} = \pm\frac{D_{\max} - D_{\min}}{\sqrt{n}} = \pm\frac{0{,}08}{\sqrt{11}} = \pm 0{,}024 \approx \pm 0{,}02 \text{ мили}.$$

4.3. ЗАДАНИЯ

Результаты измерений той или иной величины выбираются из табл. 11–15 по номеру варианта. Числа в скобках около результатов измерений показывают количество одинаковых отсчетов в серии измерений. Исходные данные для решения задачи выбираются последовательно во всех четырех строчках (*IJKL*) из столбцов, соответствующих значениям *I*, *J*, *K*, *L*. Например, номер варианта 1323, тогда из табл. 11 выбираем следующую серию измерений по этому номеру варианта:

	D_i	D_i
1323	36,32(3)	36,32
IJKL	36,42(4)	36,32
	36,37(3)	36,32
	36,54(2)	36,42
		36,42
		36,42
		36,42
		36,37
		36,37
		36,37
		36,54
		36,54

Аналогично по этому же номеру варианта производится выборка исходных данных из табл. 12, 13, 14, 15. Затем выбранные серии измерений обрабатываются соответствующим образом, как показано в примерах 5 и 6.

1. Определить вероятнейшее значение измеренного с помощью РЛС расстояния до ориентира $\overline{D}$, СКП единичного измерения $m_{D(1)}$, СКП среднего арифметического $m_{\overline{D}}$.

Таблица 11

Результаты измерений D_i, мили

IJKL	1	2	3	4
I	36,32(3)	36,38(2)	36,33(3)	36,46(3)
J	36,50(2)	36,38(3)	36,42(4)	36,47(3)
K	36,52(2)	36,37(3)	36,44(3)	36,50(2)
L	36,53(3)	36,51(3)	36,54(2)	36,43(3)

2. Определить вероятнейшее значение измеренной секстаном приведенной высоты светила $\overline{h}$, СКП единичного измерения $m_{h(1)}$, СКП среднего арифметического $m_{\overline{h}}$.

Таблица 12

Результаты измерений h_i, …°,…'

IJKL	1	2	3	4
I	38°22,3' (4)	38°23,4' (3)	38°22,6' (2)	38°23,5' (5)
J	23,5' (5)	23,2' (3)	24,0' (5)	22,9' (4)
K	23,4' (3)	23,6' (2)	22,8' (5)	22,7' (3)
L	21,3' (3)	22,0' (4)	23,3' (3)	22,9' (3)

3. Найти вероятнейшее значение навигационного параметра РНС «Декка» $\overline{\Delta\Phi}$, СКП единичного измерения $m_{\Delta\Phi(1)}$, СКП среднего арифметического $m_{\overline{\Delta\Phi}}$.

Таблица 13

Результаты измерений $\Delta\Phi_i$, фазовые циклы

IJKL	1	2	3	4
I	16,32 (3)	16,34 (4)	16,39 (5)	16,37 (2)
J	16,40 (4)	16,35 (3)	16,38 (2)	16,34 (5)
K	16,36 (3)	16,40 (2)	16,35 (5)	16,33 (3)
L	16,37 (4)	16,32 (5)	16,33 (2)	16,41 (3)

4. Определить вероятнейшее значение пеленга $\overline{\Pi}$, СКП его единичного измерения $m_{\Pi(1)}$, СКП среднего арифметического $m_{\overline{\Pi}}$.

Таблица 14

Результаты измерений Π_i, …°

IJKL	1	2	3	4
I	273,4 (3)	272,9 (3)	272,7 (2)	273,4 (3)
J	272,9 (4)	273,3 (2)	273,2 (3)	272,8 (4)
K	273,5 (2)	273,4 (3)	272,8 (3)	272,9 (2)
L	272,8 (3)	272,4 (4)	273,4 (2)	273,0 (1)

5. Определить СКП единичного измерения секстаном радиуса Солнца, если его истинное значение, выбранное из морского астрономического ежегодника (МАЕ), составляет $R^{\odot}_{\text{ист}} = 16{,}3'$.

Таблица 15

Результаты измерений $R^{\odot}_i$, …'

IJKL	1	2	3	4
I	16,1(4)	16,0(2)	16,3(3)	16,5(4)
J	16,6(3)	16,2(3)	16,5(2)	16,4(3)
K	16,4(2)	16,2(4)	15,9(3)	16,0(5)
L	16,3(3)	16,4(2)	16,2(5)	16,5(4)

б) ОБРАБОТКА ПРЯМЫХ НЕРАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

4.4. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Один и тот же навигационный параметр зачастую можно измерять с помощью нескольких приборов. Еще более часто один и тот же навигационный параметр измеряется хотя и одним прибором, но при различных условиях. Во всех этих случаях точность результатов будет неодинаковой, и измерения называют неравноточными. Для сравнения неравноточных результатов пользуются условными числовыми величинами, именуемыми весами. Вес P серии наблюдений (одного наблюдения серии) обратно пропорционален квадрату средней квадратической ошибки m_x одного измерения:

$$P = \frac{C^2}{m_x^2}, \tag{10}$$

где C – произвольный коэффициент, выбираемый исходя из соображений удобства вычислений.

Итак, если выполнено n неравноточных измерений одной физической величины X, то обработка измерений сводится к следующему:

1. Вычисляется вес каждого измерения

$$P_i = \frac{C^2}{m_{x_i}^2}.$$

2. Вычисляется среднее весовое

$$\overline{X} = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + \ldots + P_n x_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}. \tag{11}$$

3. Точность среднего весового при априорном оценивании точности определяется зависимостью

$$m_{\overline{X}} = \pm \frac{C}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} P_i}}. \tag{12}$$

4. При апостериорном оценивании точности в формулу (12) вместо C подставляют выражение

$$m_{x(1)} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i V_i^2}{n-1}}, \text{ (формула Бесселя для неравноточных измерений)}, \tag{13}$$

где $V_i = x_i - \overline{X}$ – уклонения от весового среднего.

После подстановки (13) в (12) имеем

$$m_{\overline{X}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} P_i V_i^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} P_i}}. \tag{14}$$

Таким образом, среднее весовое играет ту же роль при обработке неравноточных измерений, какая принадлежит среднему арифметическому при равноточных измерениях.

Пример 7.

Различными способами определили пройденное судном расстояние (плавание): S_1 = 80 ± 2 *кб*; S_2 = 74 ± 5 *кб*; S_3 = 76 ± 4 *кб*; S_4 = 79 ± 1 *кб*; S_5 = 81 ± 2 *кб*. Найти вероятнейшее значение пройденного расстояния и оценить его точность.

Решение:

1. Вычислим вес каждого измерения, приняв $C = 1$

$$P_1 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}; \quad P_2 = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}; \quad P_3 = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}; \quad P_4 = \frac{1}{1^2} = 1; \quad P_5 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

2. Найти вероятнейшее значение пройденного расстояния (среднее весовое)

$$\overline{S} = \frac{80 \cdot \frac{1}{4} + 74 \cdot \frac{1}{25} + 76 \cdot \frac{1}{16} + 79 \cdot 1 + 81 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{16} + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{126{,}96}{1{,}6025} \approx 79{,}2 \text{ } \textit{кб}.$$

3. Точность вероятнейшего значения пройденного расстояния при априорном оценивании

$$m_{\overline{S}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1{,}6025}} = \pm 0{,}8 \text{ } \textit{кб}, \text{ т.е. } \overline{S} \pm m_{\overline{S}} = 79{,}2 \pm 0{,}8 \text{ } \textit{кб}.$$

4. Точность вероятнейшего значения пройденного расстояния при апостериорном оценивании

$$V_1 = 80 - 79{,}2 = 0{,}8 \text{ } \textit{кб}; \qquad V_2 = 74 - 79{,}2 = -5{,}2 \text{ } \textit{кб};$$
$$V_3 = 76 - 79{,}2 = -3{,}2 \text{ } \textit{кб}; \quad V_4 = 79 - 79{,}2 = -0{,}2 \text{ } \textit{кб};$$
$$V_5 = 81 - 79{,}2 = 1{,}8 \text{ } \textit{кб},$$

$$m_{\overline{S}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \cdot 0{,}8^2 + \frac{1}{25} \cdot (-5{,}2)^2 + \frac{1}{16} \cdot (-3{,}2)^2 + 1 \cdot (-0{,}2)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1{,}8^2}{(5-1) \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{16} + 1 + \frac{1}{4}\right)}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2{,}7316}{4 \cdot 1{,}6025}} = \pm 0{,}43 \approx \pm 0{,}4 \text{ } \textit{кб},$$

то есть, $\overline{S} \pm m_{\overline{S}} = 79{,}2 \pm 0{,}4$ *кб*.

4.5. ЗАДАНИЯ

Исходные данные выбираются из таблиц 15 и 16 по номеру варианта. Например, вариант 4223. В этом случае из табл. 15 выберем:

$$\begin{array}{ccccc} \text{№} & 4 & 2 & 2 & 3 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & I & J & K & L \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} S_1 = 51 \pm 4\ кб \\ S_2 = 46 \pm 4\ кб \\ S_3 = 50 \pm 2\ кб \\ S_4 = 52 \pm 2\ кб \end{array}$$

Из табл. 16 выборка исходных данных производится аналогично.

1. Определить вероятнейшее значение пройденного судном расстояния и оценить его точность

Таблица 15

Результаты измерений S_i, *кб*

IJKL	1	2	3	4
I	50±2	48±3	47±1	51±4
J	52±3	46±4	49±1	48±2
K	53±1	50±2	47±3	49±2
L	46±3	51±1	52±2	47±4

2. Определить вероятнейшее значение высоты светила, измеренной секстаном четырьмя наблюдателями, и оценить его точность.

Таблица 16

Результаты измерений h_i, …°, …'

IJKL	1	2	3	4
I	45°20'±0,8'	45°21'±0,5'	45°19,5'±0,4'	45°19'±0,3'
J	45°20,5'±0,6'	45°22'±0,4'	45°20'±0,3'	45°21'±0,7'
K	45°19'±0,5'	45°20,5'±0,3'	45°22'±0,5'	45°20,2'±0,4'
L	45°21'±0,8'	45°19,4'±0,6'	45°20'±0,5'	45°21,5'±0,2'

5. РАСЧЕТ СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ (СКП) ФУНКЦИИ

5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Погрешность вычисления функции z измеренных величин x, y, t определяется погрешностями измеренных величин и видом функциональной зависимости.

Если функция задана в общем виде

$$z = f(x, y, t),$$

где результаты измерений независимы друг от друга, СКП функции может быть рассчитана по общей формуле

$$m_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 m_t^2},$$

где $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial z}{\partial t}$ – частные производные функции *z*, по переменным *x*, *y*, *t*;

$m_x; m_y; m_t$ – СКП результатов измерений величин *x*, *y*, *t*.

Размерность частных производных одинакова с размерностью исходных функций. Размерность СКП измерений перед вычислением необходимо привести к размерности соответствующих параметров в общей формуле.

5.2. ПОРЯДОК РАСЧЕТА

1. По исходной формуле рассчитывается значение функции *z*.
2. Выводятся формулы частных производных по заданным переменным (в общем виде).
3. Выведенные выражения частных производных подставляются в общую формулу СКП функции, выполняются необходимые преобразования и упрощения.
4. Производится подстановка численных значений и вычисление m_z. Результаты представляются в виде $z \pm m_z$.

Пример 8.

Рассчитать скорость судна и СКП ее определения, если известно, что скорость судна *V* вычисляется по формуле

$$V = \frac{3600\,S}{t},$$

где *S* = 1,0 *миля* – длина пробега,

t = 300 *с* – время пробега.

СКП определения длины и времени пробега соответственно равны:

$m_S = \pm 0{,}02$ *мили*; $m_t = \pm 0{,}1$ *с*.

Решение:

1. Вычисляем значение скорости:

$$V = \frac{3600S}{t} = \frac{3600 \cdot 1}{300} = 12{,}0 \text{ уз.}$$

2. Выведем формулы частных производных:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{3600}{t}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{3600\,S}{t^2}.$$

3. Преобразуем общую формулу расчета

$$m_V = \sqrt{\left(\frac{3600}{t}\right)^2 m_S^2 + \left(-\frac{3600\,S}{t^2}\right)^2 m_t^2}.$$

4. Выполним численное решение:

$$m_V = \sqrt{\left(\frac{3600}{300}\right)^2 \cdot 0{,}02^2 + \left(-\frac{3600 \cdot 1}{300^2}\right)^2 \cdot 0{,}1^2} = 0{,}24 \approx 0{,}2 \ \textit{уз};$$

$$V \pm m_V = 12{,}0 \pm 0{,}2 \ \textit{уз}.$$

5.3. ЗАДАНИЯ

Исходные данные приведены в табл. 17, 18, 19, 20 и выбираются по номеру варианта. Например, номер варианта 1433, тогда из табл. 17 выберем

$$\begin{array}{ccccc} \text{№} & 1 & 4 & 3 & 3 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & I & J & K & L \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & h & \alpha & m_h & m_\alpha \end{array} \qquad \begin{array}{l} h = 50 \ \textit{м} \\ \alpha = 38{,}9' \\ m_h = 2{,}5 \ \textit{м} \\ m_\alpha = 2{,}0' \end{array}$$

Аналогично производится выборка исходных данных по варианту 1433 из табл. 18, 19, 20.

1. Вычислить расстояние D_y от судна до ориентира, рассчитанное по измеренному вертикальному углу α с помощью формулы:

$$D_y = 1{,}86 \frac{h}{\alpha}, \text{ мили},$$

где h – высота ориентира, м;

α – вертикальный угол, '

Определить m_{D_y}, если известны h, α, m_h, m_α, выбираемые из табл. 17 по номеру варианта.

Таблица 17

IJKL	1	2	3	4
$I - h$, м	50,0	85,0	93,0	76,0
$J - \alpha$, …'	25,8	42,6	43,8	38,9
$K - m_h$, м	2,0	1,5	2,5	0,5
$L - m_\alpha$, …'	1,0	0,5	2,0	3,0

2. Вычислить дальность видимости ориентиров в море D по формуле:

$$D = 2{,}1\sqrt{h} + 2{,}1\sqrt{e}, \text{ мили},$$

где h – высота ориентира, м;

e – высота глаза наблюдателя, м.

Определить m_D, если известны h, e, m_h, m_e, выбираемые из табл. 18 по номеру варианта.

Таблица 18

$IJKL$	1	2	3	4
$I - h$, м	128,0	156,0	210,0	89,0
$J - e$, м	16,5	17,0	15,4	16,2
$K - m_h$, м	5,0	2,5	3,0	2,0
$L - m_e$, м	0,5	1,0	0,4	0,8

3. Вычислить угол дрейфа судна α по формуле:

$$\alpha = K\left(\frac{W}{V}\right)^2 \sin g, \ldots^\circ,$$

где K – коэффициент дрейфа, … °, (K = 3 для всех вариантов);
W – скорость наблюдаемого ветра, м/с;
V – скорость судна, уз, (V = 15 уз для всех вариантов);
g – курсовой угол наблюдаемого ветра …°.

Определить m_α, если известны K, V, W, g, m_K, m_g, выбираемые из табл. 19. Перед вычислениями необходимо перевести скорость ветра в узлы, для чего разделить W на 0,514. Отношение $\left(\frac{W}{V}\right)$ считается величиной постоянной и известной. При вычислении m_α величину СКП курсового угла m_g следует представить в радианной мере, для чего разделить ее на 57,3°.

Таблица 19

$IJKL$	1	2	3	4
$I - W$, м/с	9,0	8,5	10,0	12,5
$J - g$, …°	20,0	25,0	15,0	40,0
$K - m_K$, …°	0,6	0,8	1,2	0,9
$L - m_g$, …°°	5,0	8,0	10,0	3,0

4. Вычислить разность широт $\Delta\varphi$ и отшествие ΔW при аналитическом счислении по формулам:

$$\Delta\varphi = S\cos ПУ; \qquad \Delta W = S\sin ПУ, \ldots'$$

где S – пройденное расстояние, мили;
$ПУ$ – путевой угол, ...°.

Определить $m_{\Delta\varphi}$ и $m_{\Delta W}$, если известны S, $ПУ$, m_S, $m_{ПУ}$, выбираемые из табл. 20. Перед вычислениями необходимо выразить $m_{ПУ}$ в радианной мере.

Таблица 20

$IJKL$	1	2	3	4
$I - S$, мили	232,0	156,8	214,5	306,0
$J - ПУ$, ...°	35,0	162,0	217,5	326,0
$K - m_S$, мили	2,0	1,8	2,2	1,9
$L - m_{ПУ}$, ...°	1,0	2,5	0,5	3,0

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕСТА СУДНА ПО ДВУМ ЛИНИЯМ ПОЛОЖЕНИЯ

6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Задача включает в себя определение обсервованных координат судна при наличии их счисления значений методом линий положения, а также оценку точности полученного места с помощью эллиптической и радиальной погрешностей.

Решение задачи выполняется двумя способами: аналитически и графоаналитически. Аналитическое решение производится с использованием ЭКВМ, при этом промежуточные результаты расчетов заносятся в специальную таблицу.

Графическая часть графоаналитического решения выполняется в масштабе 1 см – 1 миля.

Точность решения задачи 0,1' по координатам и 0,01 мили по параметрам эллипса погрешности, поэтому промежуточные результаты нужно вычислять с запасной цифрой, то есть в общем с тремя знаками после запятой.

В условия задачи входят счислимые координаты судна $\varphi_с$, $\lambda_с$; счислимые значения навигационных параметров $U_{с1}$, $U_{с2}$; некоторые элементы, служащие для расчетов градиентов навигационных параметров.

В настоящих задачах рассматриваются два вида измеряемых навигационных параметров: пеленг $П$ и расстояние D. Формулы для вычисления модулей градиентов и их направлений, а также стандартные СКП измерений приведены в табл. 21.

Таблица 21

Навигационный параметр	Модуль градиента	Направление градиента	СКП измерения
Расстояние D	$g_D = 1$	$\tau_D = П_с \pm 180°$	$m_D = \pm 0{,}01 \cdot D_0$
Пеленг на ориентир $П$	$g_П = \dfrac{57{,}3}{D_с}$	$\tau_П = П_с - 90°$	$m_П = \pm 0{,}8°$

6.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Аналитическое решение выполняется на ЭКВМ, причем вычисляемые элементы, используемые в дальнейших расчетах, выписываются в таблицу по форме, приведенной ниже.

№ ор-ра/U	ΔU	g	τ	$a = \cos\tau$	$b = \sin\tau$	$\Delta n = \dfrac{\Delta U}{g}$	m_U	$m_{лп} = \dfrac{m_U}{g}$	$\Delta\tau / \theta$

1. Вычисление обсервованных координат

1. Вычислить приращение навигационных параметров

$$\Delta U_i = U_{0i} - U_{\text{c}i}.$$

2. Для счислимых навигационных параметров рассчитать модули градиентов g_i навигационных параметров и их направления τ_i.

3. Определить коэффициенты нормальных уравнений линий положения:

$$a_i = \cos\tau_i; \qquad b_i = \sin\tau_i; \qquad \Delta n_i = \frac{\Delta U_i}{g_i}$$

и составить систему уравнений вида

$$a_i\Delta\varphi + b_i\Delta W = \Delta n_i.$$

4. Полученную систему уравнений решить относительно искомых неизвестных $\Delta\varphi$, ΔW и найти обсервованные координаты.

Решение по формулам Крамера (через определители) дает:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_1b_2$ – главный определитель системы,

$$\left.\begin{aligned} D_{\Delta\varphi} &= \begin{vmatrix} \Delta n_1 & b_1 \\ \Delta n_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\Delta n_2 - a_1\Delta n_2 \\ D_{\Delta W} &= \begin{vmatrix} a_1 & \Delta n_1 \\ a_2 & \Delta n_2 \end{vmatrix} = a_1\Delta n_2 - a_1\Delta n_2 \end{aligned}\right\}$$ – вспомогательные определители,

$$\Delta\varphi = \frac{D_{\Delta\varphi}}{D}; \qquad \Delta W = \frac{D_{\Delta W}}{D}; \qquad \Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\cos\varphi}.$$

$$\begin{array}{r|l} \varphi_c & \\ \Delta\varphi & \\ \hline \varphi_0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \lambda_c & \\ \Delta\lambda & \\ \hline \lambda_0 & \end{array}$$

Приращения координат $\Delta\varphi$, ΔW, $\Delta\lambda$ получаются в милях со своими знаками. Если $\Delta\varphi$ получилось со знаком «+», это означает, что приращение широты будет к северу, а если $\Delta\varphi$ имеет знак «–», то приращение широты $\Delta\varphi$ будет к югу. Соответственно, если ΔW и $\Delta\lambda$ имеют знак «+», то приращения отшествия ΔW и долготы $\Delta\lambda$ будут к востоку, а если знак «–» – к западу.

Затем, учитывая наименования приращений $\Delta\varphi$, ΔW, $\Delta\lambda$ и счислимых координат φ_c и λ_c, необходимо получить обсервованные координаты φ_0 и λ_0.

2. Оценка точности полученного места

Точность определения места судна зависит от точности измерения навигационных параметров (m_U), что сказывается на точности линий положения $\left(m_{\text{лп}} = \dfrac{m_U}{g}\right)$. Кроме того, точность определения места судна зависит от угла пересечения линий положения θ и оценивается средним квадратическим эллипсом погрешностей с вероятностью попадания в него истинного места P = 39,3 % и круговой или радиальной средней квадратической погрешностью M с вероятностью P = 68,3 %. Угол пересечения линий положения θ берется для данных расчетов острый (θ < 90°) и связан с углом между направлениями градиентов $\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2$ следующими соотношениями

$\theta = |\Delta\tau|$, если $0° \le |\Delta\tau| \le 90°$,

$\theta = 180° - |\Delta\tau|$, если $90° \le |\Delta\tau| \le 180°$,

$\theta = |\Delta\tau| - 180°$, если $180° \le |\Delta\tau| \le 270°$,

$\theta = 360° - |\Delta\tau|$, если $270° \le |\Delta\tau| \le 360°$.

Аналитический расчет элементов эллипса погрешности

Полуоси эллипса погрешности *a и b* вычисляются с использованием формул Аполлония:

$$a \pm b = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{m_{\text{лп}1}^2 + m_{\text{лп}2}^2 \pm 2m_{\text{лп}1}m_{\text{лп}2}\sin\theta},$$

где $m_{\text{лп}}$ – СКП линии положения.

Направление большой полуоси определяется относительно направления более точной линии положения, для которой $m_{\text{лп}} = m_{\text{лп min}}$ (если $m_{\text{лп}1} > m_{\text{лп}2}$, то $m_{\text{лп}2}$ = min, или $m_{\text{лп}1} = m_{\text{лп max}}$; $m_{\text{лп}2} = m_{\text{лпmin}}$).

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\theta}{\dfrac{m_{\text{лп max}}^2}{m_{\text{лп min}}^2} + \cos 2\theta},$$

где α – угол между направлением большой полуоси и более точной линией положения: откладывается внутри острого угла θ между линиями положения.

Направление большой полуоси относительно истинного меридиана T_a определяется выражением

$$T_a = \tau^* \pm 90° \pm \alpha,$$

где τ^* – направление градиента более точной линии положения (для которой $m_{\text{лп}} = m_{\text{лп min}}$).

Знак «+» или «–» перед 90° выбирается вычислителем руководствуясь соображениями удобства вычислений, т.е. если, например, τ^* = 50°, то перед 90° лучше взять знак «+», а если τ^* = 210°, то перед 90° лучше взять знак «–».

Знак «+» или «–» перед α определяется следующим образом (рис. 5):

1. Отложить относительно истинного меридиана направления τ_1 и τ_2.

2. Перпендикулярно направлениям τ_1 и τ_2 провести линии положения *I* и *II*.

3. Обозначить острый угол θ между линиями положения.

4. Определить более точную линию положения (для которой $m_{\text{лп}}$ = min).

5. От направления более точной линии положения внутрь острого угла θ отложить α. Если при этом α откладывается по часовой стрелке, то перед α

ставится знак «+», если же α откладывается против часовой стрелки, то перед α ставится знак «–».

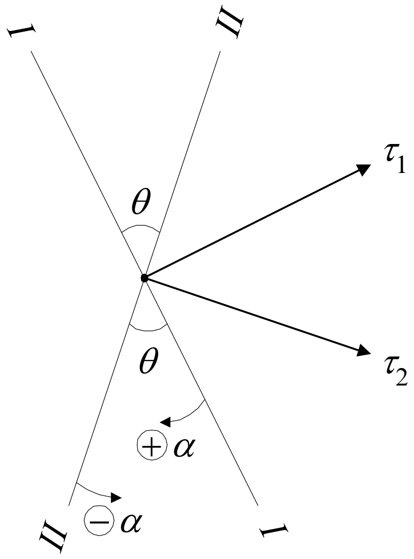


Рис. 5

Порядок действий:

1. Занести в таблицу значения СКП измерения навигационных параметров m_U.

2. Найти СКП линий положения $m_{\text{лп}} = \dfrac{m_U}{g}$.

3. Вычислить угол между направлениями градиентов $\Delta\tau = \left|\,\tau_1 - \tau_2\,\right|$ и определить значение острого угла θ.

4. Вычислить полуоси эллипса погрешности *a и b*.

5. Определить максимальную и минимальную СКП линий положения и вычислить направление большой полуоси T_a.

Расчет элементов эллипса погрешностей с использованием приложения 5 МТ-75

Элементы эллипса погрешностей рассчитываются по формулам:

$a = K_a \cdot m_{\text{лп min}}$;

$b = K_b \cdot m_{\text{лп min}}$;

$T_{\text{a}} = \tau^* \pm 90° \pm \alpha$, где $\alpha = \varphi$; $m_{\text{лп min}} = m_{\text{лп 2}}$.

В таблицах приложения 5 под лп$_2$ подразумевается более точная линия положения с $m_{\text{лп min}}$.

Величины K_a, K_b, φ выбираются из приложения 5 МТ-75 по входным параметрам:

$$\lambda = \frac{m_{\text{лп}1}}{m_{\text{лп}2}} > 1 \quad \text{или} \quad \lambda = \frac{m_{\text{лп max}}}{m_{\text{лп min}}} > 1 \quad \text{и} \quad \theta.$$

Расчет радиальной погрешности

Радиальная (круговая) погрешность определения места рассчитывается по формуле

$$M = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{m_{\text{лп}1}^2 + m_{\text{лп}2}^2}.$$

6.3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Графоаналитическое решение включает в себя аналитический расчет элементов линий положения τ и Δn и графическую их прокладку для нахождения обсервованной точки, а также аналитические и графические операции по определению параметров эллипса погрешностей. Результаты расчетов заносятся в общую таблицу вида:

№ ор-ра/U	ΔU	g	τ	$\Delta n = \frac{\Delta U}{g}$	m_U	$m_{\text{лп}} = \frac{m_U}{g}$	$P_{\text{лп}} = \frac{1}{m_{\text{лп}}^2}$	2τ
							$\sum P_{\text{лп}}$	

1. Вычисление обсервованных координат

Решение задачи выполняется по рассчитанным параметрам линий положения τ и Δn в масштабе 1 см – 1 миля. Точность графических построений 0,1 мили.

Порядок действий:

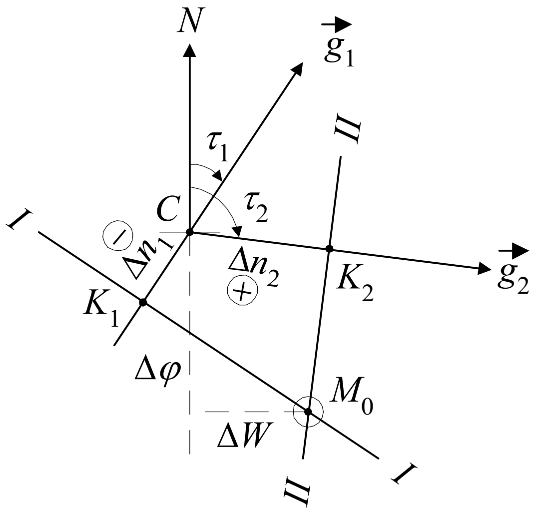
1. Вычислить приращения навигационных параметров

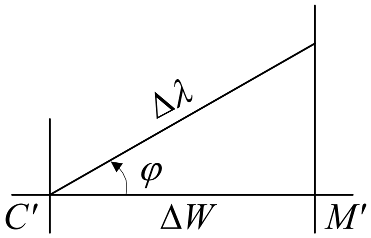
$$\Delta U_i = U_{\text{о}i} - U_{\text{с}i}.$$

2. Для счислимых навигационных параметров рассчитать модули градиентов g_{i} их направления τ_{i} и смещения линий положения Δn_{i}.

3. От счислимой точки C проложить направления градиентов τ_1, τ_2; по этим направлениям отложить вычисленные ранее переносы линий положения Δn_1, Δn_2 (положительные переносы откладываются по направлению градиентов, а отрицательные – в противоположном направлении); отметить определяющие точки K_1, K_2 и нанести линии положения $I - I$, $II - II$. В пересечении линий положения лежит обсервованная точка M_0.

4. Пунктирными линиями нанести меридиан и параллель обсервованной и счислимой точек до их пересечения (в любом варианте в зависимости от расположения чертежа) и снять приращение широты $\Delta\varphi$ – расстояние между точками C и M_0 по меридиану, а также приращение отшествия ΔW – расстояние между этими же точками по параллели.





5. Вычислить приращение долготы $\Delta\lambda$, либо определить его графическим построением, что понятно из рисунка, где $C'M'$ – расстояние между меридианами счислимой и обсервованной точек в масштабе чертежа – ΔW;

φ – угол, под которым проводится прямая к линии параллели $C'M'$, обычно это заданная широта φ_c.

Гипотенуза такого треугольника представляет собой разность долгот $\Delta\lambda$ согласно выражениям:

$$\cos\varphi = \frac{\Delta W}{\Delta\lambda}; \qquad \Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\cos\varphi}.$$

6. Найти обсервованные координаты:

$$\begin{array}{r|l} \varphi_c & \\ \Delta\varphi & \\ \hline \varphi_0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \lambda_c & \\ \Delta\lambda & \\ \hline \lambda_0 & \end{array}$$

2. Оценка точности полученного места

Точность полученного места судна оценивается эллиптической и радиальной (круговой) погрешностью. Причем параметры эллипса погрешностей определяются с использованием эквивалентных линий положения.

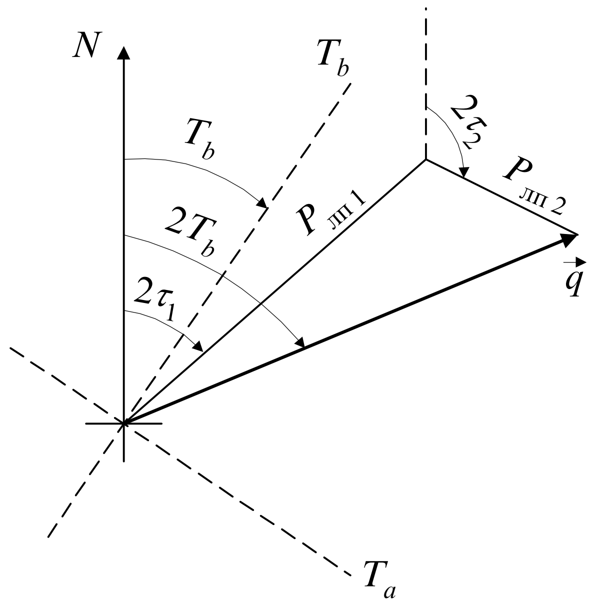
Расчет параметров эллипса погрешностей с использованием эквивалентных линий положения

Направления эквивалентных линий положения или полуосей эллипса погрешностей, а также веса этих линий положения, позволяющие вычислить полуоси эллипса, определяются построением «полигона весов» в следующем порядке:

1. От произвольно взятой счислимой точки по двойным направлениям градиентов $2\tau_i$ отложить отрезки, равные весам соответствующих линий положения. Замыкающий вектор $\vec{q}$ в масштабе чертежа представляет собой разность весов эквивалентных линий положения

$$\left|\vec{q}\right| = P_{\max} - P_{\min}.$$

2. Провести биссектрису угла между истинным меридианом и замыкающим вектором $\vec{q}$, являющуюся направлением малой полуоси T_b. Перпендикулярно пройдет полуось T_a.



3. Определить сумму весов эквивалентных линий положения как алгебраическую сумму весов всех линий положения

$$\sum P_{\text{лп}} = P_{\text{лп}1} + P_{\text{лп}2}.$$

4. Вычислить веса эквивалентных линий положения:

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\left(\sum P_{\text{лп}} + \left|\vec{q}\right|\right); \qquad P_{\min} = \frac{1}{2}\left(\sum P_{\text{лп}} - \left|\vec{q}\right|\right).$$

5. Рассчитать полуоси эллипса погрешностей:

$$a = \frac{1}{\sqrt{P_{\min}}}; \qquad b = \frac{1}{\sqrt{P_{\max}}}.$$

6. Построить эллипс погрешностей с центром в обсервованной точке.

6.4. Порядок решения

Пример 9. Решить задачу № 01/35, для которой выдержка из таблиц исходных данных имеет следующий вид:

	№ ор-ра	*П*$_c$	*П*$_o$	*D*$_c$	*D*$_o$	
№ 01/35	3	2,3	5,8	28,6	28,0	φ_c = 34°14,8'N
ПD	5	306,8	308,0	27,4	25,5	λ_c = 156°48,9'E

Аналитическое решение

1. Вычисление обсервованных координат.

Расчетные данные сводятся в таблицу

№ ор-ра $/U$	ΔU	g	τ	$a=\cos\tau$	$b=\sin\tau$	$\Delta n=\frac{\Delta U}{g}$	m_U	$m_{лп}=\frac{m_U}{g}$	$\Delta\tau/\theta$
3 – П	3,5	2,00	272,3	0,040	–0,999	1,750	±0,8	±0,400	145,5°
5 – D	–1,9	1	126,8	–0,599	0,801	–1,900	±0,255	±0,255	34,5°

1. $\Delta U_3 = \Delta П_3 = П_{о3} - П_{с3} = 5{,}8 - 2{,}3 = 3{,}5°$;

$\Delta U_5 = \Delta D_5 = D_{о5} - D_{с5} = 25{,}5 - 27{,}4 = -1{,}9$ мили.

2. $g_3 = \dfrac{57{,}3}{D_{с3}} = \dfrac{57{,}3}{28{,}6} = 2{,}00\,°/\text{милю}$; $\tau_3 = П_{с3} - 90° = 2{,}3° - 90° = 272{,}3°$.

$g_5 = 1$; $\tau_5 = П_{с5} \pm 180° = 306{,}8° - 180° = 126{,}8°$.

3. $a_3 = 0{,}040$; $b_3 = -0{,}999$; $\Delta n_3 = 1{,}750$ мили ;

$a_5 = -0{,}599$; $b_5 = 0{,}801$; $\Delta n_5 = -1{,}900$ мили.

Уравнения линий положения примут вид:

$$0{,}040\Delta\varphi - 0{,}999\Delta W = 1{,}750$$

$$-0{,}599\Delta\varphi + 0{,}801\Delta W = -1{,}900$$

$$D = a_3 \cdot b_5 - a_5 \cdot b_3 = 0{,}040 \cdot 0{,}801 - (-0{,}599)\cdot(-0{,}999) = -0{,}566;$$

$$D_{\Delta\varphi} = \Delta n_3 \cdot b_5 - \Delta n_5 \cdot b_3 = 1{,}750 \cdot 0{,}801 - (-1{,}900)\cdot(-0{,}999) = -0{,}496;$$

$$D_{\Delta W} = a_3 \cdot \Delta n_5 - a_5 \cdot \Delta n_3 = 0{,}040 \cdot (-1{,}900) - (-0{,}599)\cdot 1{,}750 = 0{,}972.$$

$$\Delta\varphi = \frac{-0{,}496}{-0{,}566} = 0{,}876 \approx +0{,}9'(N); \quad \Delta W = \frac{0.972}{-0{,}566} = -1{,}717;$$

$$\Delta\lambda = \frac{-1{,}717}{\cos\varphi_c} = -2{,}077 \approx -2{,}1'(W).$$

φ_c	34°14,8'N
$\Delta\varphi$	0,8'N
φ_0	34°15,6'N

λ_c	156°48,9'E
$\Delta\lambda$	2,1'W
λ_0	156°46,8'E

2. Оценка точности полученного места

Аналитический расчет элементов эллипса погрешностей

Расчет выполняется с использованием счислимых значений градиентов навигационных параметров, приведенных в таблице, с точностью до 0,001.

1. $m_П = \pm 0{,}8°$; $m_D = 0{,}01 \cdot 25{,}5 = \pm 0{,}255$ мили.

2. $m_{лп3} = \dfrac{0{,}8}{2{,}00} = \pm 0{,}400$ мили; $m_{лп5} = \dfrac{0{,}255}{1} = \pm 0{,}255$ мили.

3. $|\Delta\tau| = 272{,}3° - 126{,}8° = 145{,}5°$ $\theta = 180 - 145{,}5 = 34{,}5°$.

4. $a + b = \frac{1}{0{,}566} \cdot \sqrt{0{,}16 + 0{,}065 + 2 \cdot 0{,}400 \cdot 0{,}255 \cdot 0{,}566} = 1{,}031$ мили.

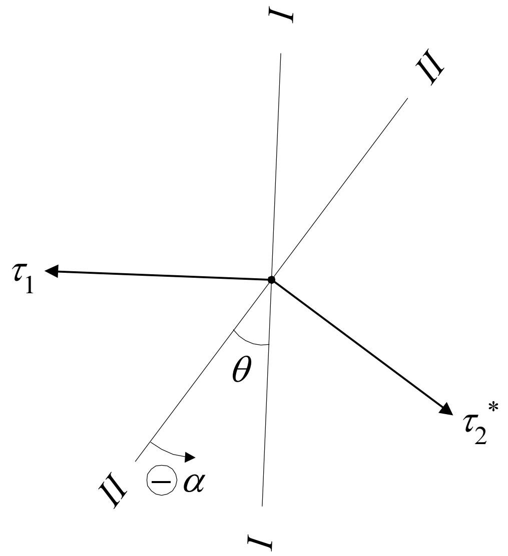
$a - b = \frac{1}{0{,}566} \cdot \sqrt{0{,}16 + 0{,}065 - 2 \cdot 0{,}400 \cdot 0{,}255 \cdot 0{,}566} = 0{,}585$ мили.

$2a = 1{,}616;$ $\quad a = 0{,}808 \approx 0{,}81$ мили;

$2b = 0{,}446;$ $\quad b = 0{,}223 \approx 0{,}22$ мили;

$m_{лп3} > m_{лп5}$, т.е. $m_{лп3} = m_{лп\,max}$; $m_{лп5} = m_{лп\,min}$; т.е. $\tau^* = \tau_5$.

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \left| \frac{0{,}934}{\left(\frac{0{,}400}{0{,}255}\right)^2 + 0{,}358} \right| = 0{,}331; \qquad 2\alpha = 18{,}33^\circ; \qquad \alpha = 9{,}2^\circ.$$



Так как α откладывается против часовой стрелки, то величина α имеет знак «–».

$$T_a = 126{,}8^\circ - 90^\circ - 9{,}2^\circ = 27{,}6^\circ.$$

Расчет элементов эллипса погрешностей с использованием приложения 5 МТ-75

$$\lambda = \frac{m_{лп\,max}}{m_{лп\,min}} = \frac{0{,}400}{0{,}255} = 1{,}5686 \approx 1{,}6.$$

Из табл. 5 Приложения по $\lambda = 1{,}6$ и $\theta = 180^\circ - |\Delta\tau| = 34{,}5^\circ \approx 35^\circ$;

$K_a = 3{,}24$ $\quad a = 3{,}24 \cdot 0{,}255 = 0{,}826 \approx 0{,}83$ мили;

$K_b = 0{,}88$ $\quad b = 0{,}88 \cdot 0{,}255 = 0{,}224 \approx 0{,}22$ мили;

$\varphi = 9{,}0^\circ$ $\quad T_a = 126{,}8^\circ - 90^\circ - 9{,}0^\circ = 27{,}8^\circ$.

Расчет радиальной (круговой) погрешности

$$M = \frac{1}{0{,}566}\sqrt{0{,}16 + 0{,}065} = 0{,}837 \approx 0{,}84 \text{ мили}.$$

Графоаналитическое решение

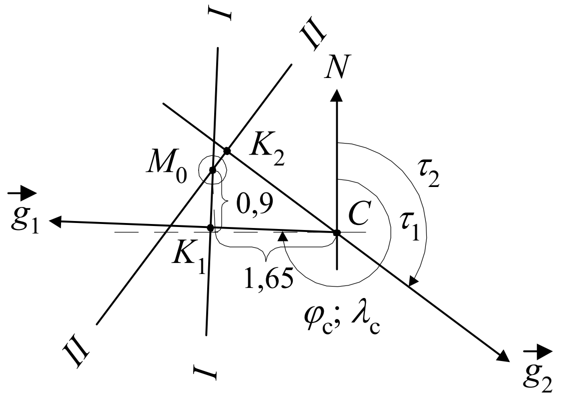
1. Вычисление обсервованных координат

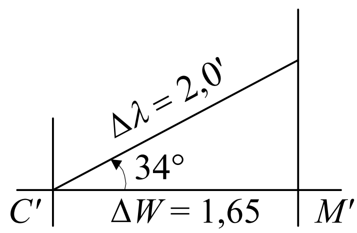
Расчетные данные сводятся в таблицу

№ ор-ра/$_U$	ΔU	g	τ	$\Delta n = \dfrac{\Delta U}{g}$	m_U	$m_{лп} = \dfrac{m_U}{g}$	$P_{лп} = \dfrac{1}{m_{лп}^2}$	2τ
3 – *П*	3,5	2,00	272,3	1,750	±0,8	±0,400	6,25	184,6
5 – *D*	–1,9	1	126,8	–1,900	±0,255	±0,255	15,38	253,6

Причем в нашем случае вместо расчета ΔU_{I}, g_{I}, τ_{I}, Δn_{i}, $m_{U\ i}$, $m_{лп\ i}$ воспользуемся уже вычисленными значениями.

Выполним прокладку линий положения в масштабе 1 см – 1 миля.





$\Delta\varphi = +0{,}9'(\mathrm{N})$ $\qquad$ $\Delta W = -1{,}65'(\mathrm{W})$ $\qquad$ $\Delta\lambda = -2{,}0(\mathrm{W})$

$$\begin{array}{r|l} \varphi_c & 34°14{,}8'\ \mathrm{N} \\ \Delta\varphi & +\ 0{,}9'\ \text{к N} \\ \hline \varphi_0 & 34°15{,}7'\ \mathrm{N} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} \lambda_c & 156°48{,}9'\ \mathrm{E} \\ \Delta\lambda & -2{,}0'\ \text{к W} \\ \hline \lambda_0 & 156°46{,}9'\ \mathrm{E} \end{array}$$

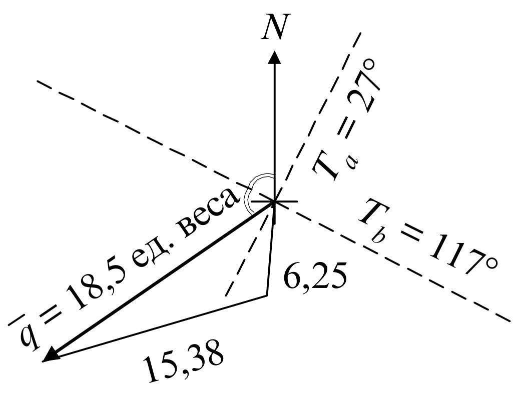
2. Оценка точности полученного места

Расчет параметров эллипса погрешности с использованием ЭЛП

1. Выполняется предварительный расчет

Результаты приведены в той же таблице.

2. Строится «полигон весов» в произвольном масштабе, чтобы треугольник весов помещался на половину тетрадного листа. В данном примере масштаб 1 см = 5 ед. веса.



С чертежа: $|\vec{q}\,| = 3{,}7$ см $= 18{,}5$ ед. веса, $T_b = 117°$, $T_a = 27°$.

3. $\sum P_{\text{лп}} = 6{,}25 + 15{,}38 = 21{,}63$.

4. $P_{\max} = 1/2 \cdot (21{,}63 + 18{,}5) = 20{,}1$; $P_{\min} = 1/2 \cdot (21{,}63 - 18{,}5) = 1{,}57$.

5. $a = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}57}} = 0{,}799 = 0{,}80$ мили, $b = \dfrac{1}{\sqrt{20{,}1}} = 0{,}223 = 0{,}22$ мили.

6. В обсервованной точке строится эллипс погрешностей.

6.5. Задания

Исходные данные для расчетов помещены в табл. 22–25 и образуют несколько вариантов с общими счислимыми координатами. Для каждого ориентира приведены счислимые и обсервованные значения навигационных параметров.

Необходимый в расчете вид и значения навигационных параметров определяются номером задачи, в котором первая цифра означает номер варианта (1, 2, 3, 4 – табл. 22, 23, 24, 25), вторая – способ определения (1 – пеленг первого ориентира и расстояние до второго, 2 – пеленги обоих ориентиров, 3 – расстояние до первого ориентира и пеленг второго), следующие две цифры за дробью означают номера ориентиров в выбранном варианте задачи. Например, номер 21/32 означает, что исходные данные относятся ко второму варианту (табл. 23), при этом выбирается пеленг первого ориентира и расстояние до второго ориентира, в качестве первого ориентира служит ориентир под номером 3, в качестве второго – под номером 2.

№ 21/32

ПD

Вариант 1 Таблица 22

Счислимые координаты	Номера ориентиров	Навигационные параметры			
$\varphi_c = 53°06{,}0'$N	1	101,5	99,5	47,3	50,0
$\lambda_c = 2°35{,}0'$E	2	113,8	113,2	49,8	52,5
	3	305,3	306,7	53,7	56,8
	4	138,2	139,1	41,9	43,7
	5	330,9	331,7	49,6	50,3
	6	345,4	346,0	34,9	34,4
	7	179,2	178,0	42,2	40,6

Вариант 2 Таблица 23

Счислимые координаты	Номера ориентиров	Навигационные параметры			
φ_c = 41°43,4'N	1	192,5	190,9	43,3	45,7
λ_c = 68°34,2'W	2	25,8	29,1	31,5	34,2
	3	38,3	39,7	29,7	32,4
	4	231,2	232,0	23,3	24,8
	5	64,0	63,5	28,2	28,9
	6	76,8	77,5	23,7	23,2
	7	268,5	265,3	34,2	33,1

Вариант 3 Таблица 24

Счислимые координаты	Номера ориентиров	Навигационные параметры			
φ_c = 41°40,0'S	1	55,0	57,0	44,5	45,9
λ_c = 69°00,0'W	2	30,8	30,0	34,0	34,6
	3	2,3	5,8	28,6	28,0
	4	333,0	335,2	33,5	32,0
	5	306,8	308,0	27,4	25,5
	6	277,0	276,0	35,7	33,8
	7	260,5	258,2	25,7	23,9

Вариант 4 Таблица 25

Счислимые координаты	Номера ориентиров	Навигационные параметры			
φ_c = 36°20,0'S	1	101,5	99,3	50,2	51,9
λ_c = 129°30,0'E	2	113,8	113,2	57,2	59,7
	3	305,3	306,8	45,4	47,5
	4	138,2	139,1	58,9	61,1
	5	330,9	331,7	48,3	47,2
	6	345,4	346,0	61,5	61,4
	7	179,2	178,0	47,0	46,0

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНЕЙШЕГО МЕСТА СУДНА ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

7.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Избыточность измерений обеспечивает контроль и предохраняет от грубых промахов, дает возможность получить более точные результаты и оценить их погрешности. В то же время из-за различных погрешностей избыточные измерения приводят к неодинаковым результатам. Поэтому вместо однозначного решения задачи получается несколько результатов, которые необходимо согласовать между собой, исходя из какого-либо критерия.

Приведение расхождений, обусловленных избыточными измерениями, в формальное соответствие называется уравниванием. Если такое уравнивание производится исходя из требования о том, чтобы полученные поправки V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ к измеренным величинам удовлетворяли условию (минимизировался критерий) $V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_n^2 = \min$, то оно называется уравниванием по методу наименьших квадратов (МНК). За действительное место судна в таком случае принимается вероятнейшее место, для которого сумма квадратов поправок минимальна:

$$\sum pV^2 = \min \qquad \text{или} \qquad \left[pVV\right] = \min,$$

где $p = \dfrac{1}{m_{\text{лп}}^2} = p_{\text{лп}}$ – вес линии положения;

$m_{\text{лп}} = \dfrac{m_U}{g}$ – СКП линии положения;

V – неизвестная поправка для приведения к вероятнейшему месту, определяется уравнениями поправок вида:

$$a_i \overline{\Delta\varphi} + b_i \overline{\Delta W} + l_i = V_i,$$

$\overline{\Delta\varphi}$, $\overline{\Delta W}$ – вероятнейшие значения неизвестных приращений широты и отшествия, которые в дальнейшем будут обозначаться как $\Delta\varphi$ и ΔW.

Отыскание вероятнейшего места судна и оценка его точности может выполняться двумя способами: аналитически и графоаналитически.

7.2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Аналитическое решение выполняется на ЭКВМ, причем промежуточные результаты рассчитываются с точностью до 0,001 и заносятся в сводную таблицу вида

№ ор-ра / U	ΔU	m_U	g	τ	$a = \cos\tau$	$b = \sin\tau$	$l = -\dfrac{\Delta U}{g}$	$s = a + b + l$	$P_{\text{лп}} = \left(\dfrac{g}{m_U}\right)^2$

paa	*pab*	*pal*	*pas*	*pbb*	*pbl*	*pbs*	*pll*
[*paa*]	[*pab*]	[*pal*]	[*pas*]	[*pbb*]	[*pbl*]	[*pbs*]	[*pll*]

Первая часть таблицы рассчитывается и заполняется аналогично, как в предыдущей работе для 2-х линий положения. Во второй части таблицы рассчитываются коэффициенты нормальных уравнений [*paa*], [*pab*], [*pal*], [*pas*], [*pbb*], [*pbl*], [*pbs*], [*pll*]. Затем выполняется контроль результатов расчета по формулам:

$$[paa] + [pab] + [pal] = [pas]$$
$$[pab] + [pbb] + [pbl] = [pbs]$$

Результаты должны сходиться в пределах до 0,01.

Система нормальных уравнений вида

$$[paa]\ \Delta\varphi + [pab]\ \Delta W + [pal] = 0,$$
$$[pab]\ \Delta\varphi + [pbb]\ \Delta W + [pbl] = 0,$$

решается с помощью определителей

$$\Delta\varphi = \frac{Д_{\Delta\varphi}}{Д}; \qquad \Delta W = \frac{Д_{\Delta W}}{Д},$$

где $Д = [paa]\ [pbb] - [pab]^2$ – главный определитель;

$Д_{\Delta\varphi} = [pbl]\ [pab] - [pal]\ [pbb]$ – частный определитель;

$Д_{\Delta W} = [pal]\ [pab] - [pbl]\ [paa]$ – частный определитель.

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\cos\varphi},$$

$$\varphi_о = \varphi_с + \Delta\varphi; \qquad \lambda_о = \lambda_с + \Delta\lambda.$$

Точность вероятнейшего места судна при аналитическом решении может оцениваться эллиптической погрешностью по формулам

$$a = \sqrt{\frac{[paa] + [pbb] + q}{2Д}}; \qquad b = \sqrt{\frac{[paa] + [pbb] - q}{2Д}},$$

где $q = \sqrt{([paa] - [pbb])^2 + 4[pab]^2}$.

Направление большой полуоси эллипса относительно истинного меридиана определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2T_a = \frac{2[pab]}{[paa] - [pbb]}.$$

Необходимо определить четверть, в которой лежит угол $2T_a$, руководствуясь следующими соотношениями:

$$\sin 2T_a = -\frac{2[pab]}{q}; \qquad \cos 2T_a = -\frac{[paa]-[pbb]}{q},$$

$2T_a$ лежит в I четверти, если $\sin 2T_a > 0$, $\cos 2T_a > 0$;

$2T_a$ лежит во II четверти, если $\sin 2T_a > 0$, $\cos 2T_a < 0$;

$2T_a$ лежит в III четверти, если $\sin 2T_a < 0$, $\cos 2T_a < 0$;

$2T_a$ лежит в IV четверти, если $\sin 2T_a < 0$, $\cos 2T_a > 0$.

После определения четверти $2T_a$ нужно получить положительное значение угла $2T_a$ в этой четверти, а затем перейти к значению T_a.

7.3. ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Аналитический расчет промежуточных результатов выполняется на ЭКВМ с точностью до 0,001, результаты заносятся в таблицу:

№ ор-ра / U	ΔU	g	τ	$\Delta n = \frac{\Delta U}{g}$	$\Delta\tau / \theta$	m_U	$m_{\text{лп}} = \frac{m_U}{g}$	$P_{\text{лп}} = \frac{1}{m_{\text{лп}}^2}$	2τ	$P_{ij} = P_{\text{лп}i} \cdot P_{\text{лп}j} \cdot \sin^2\theta$
								$\sum P_{\text{лп}}$		

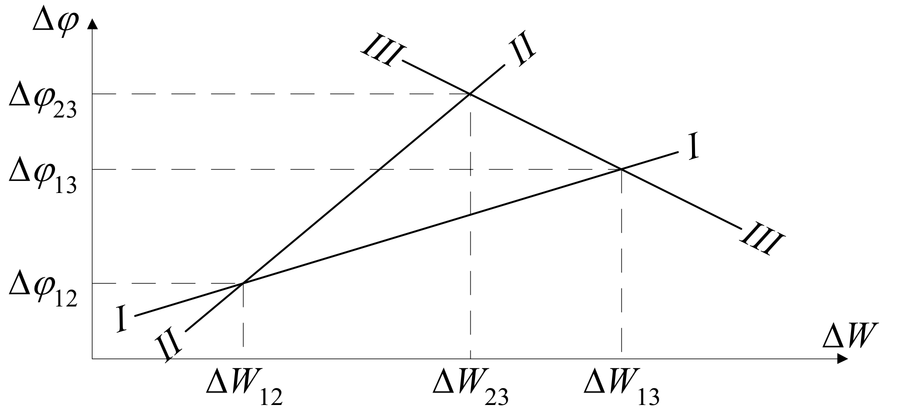
В последней колонке данной таблицы рассчитывается вес вершины фигуры погрешностей P_{ij}. Расчет параметров для остальных колонок выполняется аналогично, как для 2-х линий положения (см. раздел 6).

Определение вероятнейших координат места судна выполняется в следующем порядке:

1. Вычисляются параметры линий положения τ, Δn, по которым производится прокладка линий положения в масштабе 1 см = 1 миля и рассчитываются углы пересечения линий положения θ.

2. Вычисляются веса вершин фигуры погрешностей P_{ij}.

3. С «прокладки» снимаются приращения координат $\Delta\varphi_{ij}$, ΔW_{ij}.



4. Рассчитываются вероятнейшие координаты

$$\Delta\varphi = \frac{\sum\left(P_{ij} \cdot \Delta\varphi_{ij}\right)}{\sum P_{ij}}; \quad \Delta W = \frac{\sum\left(P_{ij} \cdot \Delta W_{ij}\right)}{\sum P_{ij}}; \quad \Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\cos\varphi};$$

$$\varphi_o = \varphi_c + \Delta\varphi;$$
$$\lambda_o = \lambda_c + \Delta\lambda.$$

Точность определения вероятнейшего места судна оценивается эллиптической погрешностью с помощью эквивалентных линий положения, то есть с построением «полигона весов». Этот способ подробно описан в разделе 6.3. В результате определяются полуоси эллипса погрешностей a и b и направление большой полуоси T_a. Сам эллипс строится в обсервованной точке.

7.4. ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ

Пример 10. Решить задачу № 3/245, для которой выбранные из таблицы исходные данные имеют следующий вид:

№ ор-ра	Π_c, …°	Π_o, …°	D_c, мили	D_o, мили
2	355,8	356,4	57,2	59,9
4	49,5	48,4	58,9	61,5
5	340,0	338,5	48,3	46,9

φ_C = 36°20,0'S λ_C = 129°30,0'E

Аналитическое решение

Промежуточные результаты расчета сведем в таблицу, где $\Delta U = U_o - U_c$;

$$m_D = \pm 0{,}01 D_o; \qquad m_\Pi = \pm 0{,}8°; \qquad g_\Pi = \frac{57{,}3}{D_c};$$
$$g_D = 1; \qquad \tau_\Pi = \Pi_\text{c} - 90°; \qquad \tau_D = \Pi_\text{c} \pm 180°.$$

№ ориентира – U	$2 - \Pi$	$4 - D$	$5 - D$	
ΔU	0,6	2,6	–1,4	
m_U	±0,8°	±0,615	±0,469	
g	1,002	1	1	
τ	265,8	229,5	160,0	
$a = \cos\tau$	–0,073	–0,649	–0,940	
$b = \sin\tau$	–0,997	–0,760	0,342	
$l = -\dfrac{\Delta U}{g}$	–0,599	–2,6	1,4	
$s = a + b + l$	–1,669	–4,009	0,802	
$P_\text{лп} = \left(\dfrac{g}{m_U}\right)^2$	1,569	2,644	4,546	
paa	0,008	1,114	4,017	$[paa]$ = 5,139
pab	0,114	1,304	–1,461	$[pab]$ = –0,043
pal	0,069	4,461	–5,983	$[pal]$ = –1,453

№ ориентира – U	$2 - П$	$4 - D$	$5 - D$	
pas	0,191	6,879	–3,427	$[pas] =$ 3,643
pbb	1,560	1,527	0,532	$[pbb] =$ 3,619
pbl	0,937	5,225	2,177	$[pbl] =$ 8,339
pbs	2,611	8,056	1,247	$[pbs] =$ 11,914

Контроль результатов расчета дает

$[paa] + [pab] + [pal] = [pas] = 5,139 + (-0,043) + (-1,453) = 3,643$

$[pab] + [pbb] + [pbl] = [pbs] = (-0,043) + 3,619 + 8,339 = 11,915$

Результаты могут отличаться на 0,001 – 0,002 за счет погрешностей округления чисел.

Запишем систему нормальных уравнений с рассчитанными коэффициентами

$5,139\ \Delta\varphi - 0,043\ \Delta W = 1,453$

$-0,043\ \Delta\varphi + 3,619\ \Delta W = -8,339$

Рассчитаем определители системы уравнений

$Д = 5,139 \cdot 3,619 - (-0,043)^2 = 18,596$

$Д_{\Delta\varphi} = 8,339(-0,043) - (-1,453) \cdot 3,619 = 4,900$

$Д_{\Delta W} = (-1,453) \cdot (0,043) - 8,339 \cdot 5,139 = -42,792$

$$\Delta\varphi = \frac{Д_{\Delta\varphi}}{Д} = \frac{4,900}{18,596} = 0,263 \approx 0,3' \text{ к N}$$

$$\Delta W = \frac{Д_{\Delta W}}{Д} = \frac{-42,792}{18,596} = -2,301 \approx -2,3' \text{ к W},$$

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\cos\varphi_c} = \frac{-2,3}{\cos 36°20'} = -2,855 \approx -2,9' \text{ к W},$$

$\varphi_c = 36°20,0'$ S $\qquad \lambda_c = 129°30,0'$ E ,

$\Delta\varphi = 0,3'$ к N $\qquad \Delta\lambda = 2,9'$ к W ,

$\varphi_o = 36°19,7'$ S $\qquad \lambda_o = 129°27,1'$E .

Рассчитаем вспомогательную величину q и параметры эллипса погрешностей

$$q = \sqrt{(5,139 - 3,619)^2 + 4 \cdot (-0,043)^2} = 1,522,$$

$$a = \sqrt{\frac{5,139 + 3,619 + 1,522}{2 \cdot 18,596}} = 0,526 \approx 0,53 \text{ мили},$$

$$b = \sqrt{\frac{5,139 + 3,619 - 1,522}{2 \cdot 18,596}} = 0,441 \approx 0,44 \text{ мили},$$

$$\operatorname{tg} 2T_a = \frac{2 \cdot (-0,043)}{5,139 - 3,619} = -0,057,$$

$$\sin 2T_a = -\frac{2 \cdot (-0,043)}{1,522} = +0,057,$$

$$\cos 2T_a = -\frac{5{,}139 - 3{,}619}{1{,}522} = -0{,}999\,.$$

Следовательно угол $2T_a$ лежит во 2-й четверти. $2T_a = -3{,}262°$, т.е.

$2T_a = -3{,}262° + 180° = 176{,}738° = 176{,}74°$, $T_a = 88{,}37° = 88{,}4°$.

Графоаналитическое решение

Промежуточные результаты расчета занесем в таблицу

№ ор-ра / U	ΔU	g	τ	Δn	ij	$\Delta\tau$ / θ	m_U	$m_{ЛП}$	$P_{ЛП}$	2τ	P_{ij}
$2-\Pi$	0,6	1,002	265,8	0,599	2-4	36,3 / 36,3	±0,8°	±0,798	1,570	171,6	1,455
$4-D$	2,6	1	229,5	2,6	2-5	105,8 / 74,2	±0,615	±0,615	2,644	99,0	6,608
$5-D$	–1,4	1	160,0	–1,4	4-5	69,5 / 69,5	±0,469	±0,469	4,546	320,0	10,545
								$\sum P_{ЛП} = 8{,}760$		$\sum P_{ij} = 18{,}608$	

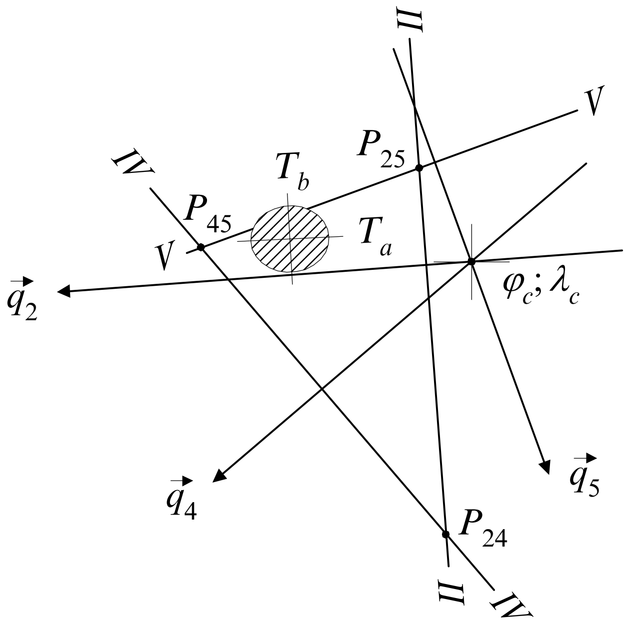
Рассчитаем веса вершин фигуры погрешностей P_{ij} :

$$P_{24} = P_2 \cdot P_4 \sin^2\theta = 1{,}570 \cdot 2{,}644 \sin^2 36{,}3° = 1{,}455\,,$$

$$P_{25} = P_2 \cdot P_5 \sin^2\theta = 1{,}570 \cdot 4{,}546 \sin^2 74{,}2° = 6{,}608\,,$$

$$P_{45} = P_4 \cdot P_5 \sin^2\theta = 2{,}644 \cdot 4{,}546 \sin^2 69{,}5° = 10{,}545.$$

По параметрам τ и Δn выполним прокладку линий положения в масштабе 1 см = 1 миля и проверим значения углов θ между линиями положения.



Снимем с прокладки приращения координат в принятом масштабе

$\Delta\varphi_{24} = -3{,}5'$ $\Delta W_{24} = -0{,}4'$

$\Delta\varphi_{25} = 1{,}2'$ $\Delta W_{25} = -0{,}8'$

$\Delta\varphi_{45} = 0{,}2'$ $\Delta W_{45} = -3{,}6'$

Рассчитаем вероятнейшие координаты:

$$\Delta\varphi = \frac{1{,}455\cdot(-3{,}5)+6{,}608\cdot 1{,}2+10{,}545\cdot 0{,}2}{18{,}608} = \frac{4{,}9461}{18{,}608} = 0{,}2658 = 0{,}3' \text{ к N}$$

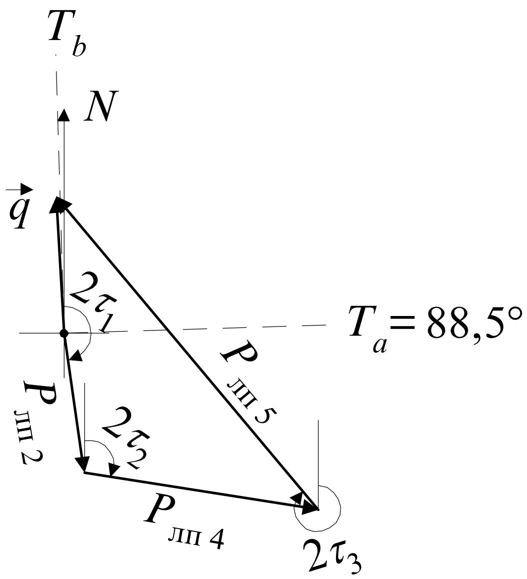
$$\Delta W = \frac{1{,}455\cdot(-0{,}4)+6{,}608\cdot(-0{,}8)+10{,}545(-3{,}6)}{18{,}608} = \frac{-43{,}8304}{18{,}608} = -2{,}35546 = -2{,}4' \text{ к W}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\cos\varphi} = \frac{-2{,}4'}{\cos 36°20'} = -3{,}0' \text{ к W}$$

φ_c =	36°20,0'S	λ_c =	129°30,0' E
$\Delta\varphi$ =	0,3' к N	$\Delta\lambda$ =	3,0' к W
φ_o =	36°19,7' S	λ_o =	129°27,0' E.

Нанесем на рисунок обсервованную точку по полученным приращениям координат $\Delta\varphi$ и ΔW. Для оценки точности полученного вероятнейшего места все необходимые данные для расчета имеются в приведенной выше таблице.

Построим «полигон весов», последовательно складывая векторы длиной $P_{лп}$, направленные под углами 2τ, как описано в разделе 6.3. Масштаб построения «полигона весов» необходимо выбрать самостоятельно с тем, чтобы рисунок поместился примерно на половину тетрадного листа. В нашем примере можно выбрать масштаб 1 см = 1 единице веса.



Снятая с рисунка величина замыкающего вектора $\vec{q}$ = 1,4 см = 1,4 ед. веса.

Построим биссектрису угла между вектором $\vec{q}$ и направлением на N. В результате получим направление малой полуоси эллипса погрешностей T_b. Перпендикулярно T_b проведем направление большой полуоси T_a и снимем транспортиром угол между полученным направлением T_a и N. В нашем примере он равен: $T_a = 87°$.

Рассчитаем веса эквивалентных линий положения:

$$P_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(\sum P_{\text{лп}} + q\right) = \tfrac{1}{2}\left(8{,}76 + 1{,}4\right) = 5{,}08;$$

$$P_{\min} = \tfrac{1}{2}\left(\sum P_{\text{лп}} - q\right) = \tfrac{1}{2}\left(8{,}76 - 1{,}4\right) = 3{,}68.$$

Вычислим полуоси эллипса погрешностей:

$$a = \frac{1}{\sqrt{P_{\min}}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}68}} = 0{,}52 \text{ мили,}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{P_{\max}}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}08}} = 0{,}44 \text{ мили.}$$

Нанесем эллипс погрешностей на рисунок, где выполнена прокладка линий положения. Построим его в принятом масштабе 1 см = 1 миля в месте расположения обсервованной точки, ориентируя направление T_a относительно N.

7.5. ЗАДАНИЯ

В табл. 27 приведены исходные данные для решения задач. Порядок выборки определяется номером задачи. Первая цифра номера, стоящая в числителе, означает вид используемых обсервованных линий положения (табл. 26).

Таблица 26

№ п/п	Измеряемые параметры ориентиров		
1	*П*	*П*	*П*
2	*D*	*D*	*D*
3	*П*	*D*	*D*
4	*П*	*П*	*D*
5	*D*	*П*	*П*
6	*D*	*D*	*П*
7	*D*	*П*	*D*
8	*П*	*D*	*П*

Следующие три цифры в знаменателе дроби означают номера используемых ориентиров. Например, № 4/625 означает, что измеряются пеленги (*П*) шестого и второго ориентиров и расстояние (*D*) до пятого ориентира.

4 / 6 2 5

ППD

Таблица 27

№ ориентира	Навигационные параметры				Счислимые координаты
	$П_c$, …°	$П_o$, …°	D_c, мили	D_o, мили	
1	101,2	99,8	47,3	50,5	
2	70,5	68,3	49,8	52,8	
3	325,0	327,2	53,7	56,5	φ_c = 36°20,0' S
4	137,8	140,4	41,6	43,8	
5	160,0	162,1	49,6	51,3	λ_c = 129°30,0' E
6	206,3	208,0	34,8	34,0	
7	240,7	242,4	42,4	40,2	

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожухов В.П., Григорьев В.В., Лукин С.Н. Математические основы судовождения. М.: Транспорт, 1993. – 208 с.
2. Скворцов М.И. Математическая обработка и анализ навигационной информации. – Владивосток: ТОВВМУ, 1988. – 188 с.
3. Кузьмин А.К. Методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математические основы судовождения». – Владивосток: ДВВИМУ, 1990. – 35 с.