Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Ледней М.Ф., Романенко О.В.

ЗАДАЧІ З КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Видавничо-поліграфічний центр
“Київський університет”

Зміст

Передмова

Курс класичної механіки є першим фундаментальним курсом теоретичної фізики, який читається на протязі двох семестрів дл студентів фізичних спеціальностей Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Даний посібник орієнтований на студентів фізичного факультету і укладений згідно програми курсу "Класична механіка". Він є узагальненням багаторічного досвіду викладання цієї дисципліни кафедрою теоретичної фізики на фізичному факультеті. Набір задач розрахований на "середньостатистичного" студента і відповідає, на наш погляд, тому мінімуму знань, вмінь та навичок, який повинен мати кожен студент після річного курсу класичної механіки.

У збірнику приведені тільки умови задач, для деяких — короткі вказівки. Автори навмисне вирішили не давати відповідей та розв'язків. Для більшості задач, можна провести додаткове дослідження — окрім відповіді на пряме завдання, що вказане у самій умові задачі (для ілюстрації у деяких задачах на початку збірника умова подана розширено). Більше того, розвитку самостійності та незалежності мислення читача також сприятиме вміння перевірити свою відповідь (по розмірності, аналізом граничних випадків). Задачі, відмічені символом "∘" складають програму-мінімум, яку повинен засвоїти студент для розуміння курсу.

Автори вдячні своїм колегам з кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка за цінні зауваження та пропозиції, які були враховані при укладанні даного посібника.

Автори, Київ 2012

Розділ 1

Механіка Ньютона

1.1. Одновимірні коливання

Позначення: x — декартова координата, $F(x, \dot{x}, t)$ — сила. Рівняння Ньютона має вигляд:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)\,, \quad \text{або:} \quad \ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

(тут $F(\dots) = mf(\dots)$). Для випадку осцилятора $F = -kx + F_d + F_{ext}$, де k — коефіцієнт пружності, F_d — сила тертя, F_{ext} — зовнішня сила. У задачах, де вказано "дослідити рух" слід подати відповідь для довільних початкових умов $x(0)$ та $\dot{x}(0)$ та проаналізувати її залежність від початкових даних та параметрів задачі (граничні випадки тощо).

***Задача* 1°.** Дослідити рух вільного одновимірного гармонічного осцилятора з масою m і коефіцієнтом жорсткості k.

***Задача* 2°.** Дослідити рух одновимірного осцилятора з масою m і коефіцієнтом жорсткості k за наявності сили тертя, пропорційної швидкості $F_d = -\alpha\dot{x}$. Вважаючи початкові умови довільними, розглянути такі випадки:

$$1)\ \beta > \omega_0\,; \quad 2)\ \beta = \omega_0\,; \quad 3)\ \beta < \omega_0\,,$$

де $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — власна частота осцилятора, $\beta = \frac{\alpha}{2m}$ — коефіцієнт загасання[1]. Показати, що розв'язок $x(t)$ для $\beta > \omega_0$ неперервно переходить у розв'язок для $\beta < \omega_0$ через $\beta = \omega_0$. Розглянути випадок великого тертя $\beta \gg \omega$. Для періодичного руху визначити дисипацію енергії dE/dt.

***Задача* 3.** Для випадку аперіодичного руху (задача 2) встановити, для якої величини параметру загасання β характерний час загасання коливань мінімальний.

***Задача* 4.** Для випадку аперіодичного руху (задача 2) встановити, для яких параметрів та початкових умов осцилятор проходить через положення рівноваги тільки один раз.

***Задача* 5°.** Дослідити рух одновимірного осцилятора без тертя, під дією періодичної змушуючої сили $F(t) = F_0 \cos\omega t$. Дослідити закон руху для випадку резонансу $\omega \to \omega_0$.

***Задача* 6.** Побудувати в квадратурах розв'язок задачі про вимушені коливання одновимірного осцилятора без тертя під дією довільної змушуючої сили $F(t)$.
Вказівка: один із способів розв'язування задачі полягає у введенні комплексної змінної $\xi := \dot{x} + i\omega_0 x$.

➠ *У задачах 7–10 дослідити коливання одновимірного осцилятора без тертя під дією змушуючої сили, заданої неперервною функцією $F(t)$. Початкові умови $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$. Розв'язок*

[1] Дані позначення використовуються в межах усього параграфу

отримати як прямим інтегруванням рівняння руху, так і використовуючи результат задачі 6.

***Задача* 7°.** $F(t) = F_0 = \text{const}$.

***Задача* 8°.** $F(t) = \alpha t$, де $\alpha = \text{const}$.

***Задача* 9°.** $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$, де $F_0, \alpha = \text{const}$ $(\alpha > 0)$.

***Задача* 10°.** $F(t) = F_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$, де $F_0, \alpha, \omega = \text{const}$ $(\alpha > 0)$. Проаналізувати характер коливань залежно від величини α.

➠ *У задачах 11–14 знайти кінцеву амплітуду коливань одновимірного осцилятора без тертя під дією змушуючої сили, заданої кусково-неперервною функцією $F(t)$. Початкові умови $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.*

***Задача* 11.** $F(t) = \begin{cases} F_0 \dfrac{t}{T}\,, & \text{при } 0 < t < T\,, \\ F_0\,, & \text{при } t > T\,. \end{cases}$

***Задача* 12.** $F(t) = \begin{cases} F_0 \dfrac{t}{T} & \text{при } 0 < t < T\,, \\ 0 & \text{при } t > T\,; \end{cases}$

***Задача* 13.** $F(t) = \begin{cases} F_0\,, & \text{при } 0 < t < T\,, \\ 0\,, & \text{при } t > T\,. \end{cases}$

***Задача* 14.** $F(t) = \begin{cases} F_o \sin \dfrac{2\pi t}{T}\,, & \text{при } 0 < t < T\,, \\ 0\,, & \text{при } t > T\,. \end{cases}$

Вказівка: залежність $x(t)$ — неперервна функція, тому задачу треба розв'язувати на проміжках, де $F(t)$ — гладка, а потім "зшити" розв'язки неперервним способом. Якщо T — точка розриву $F(t)$ або $\dot{F}(t)$, то умови "зшивки" мають вигляд: $x(T+0) = x(T-0)$, $\dot{x}(T+0) = \dot{x}(T-0)$.

***Задача* 15.** Дослідити коливання осцилятора під дією періодичної сили

$$F(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ F_0\,, & nT < t < nT + \Delta T \\ 0\,, & nT + \Delta T < t < (n+1)T \end{cases}$$

***Задача* 16°.** Дослідити рух одновимірного осцилятора при наявності тертя, пропорційного швидкості $F_d = -\alpha \dot{x}$, під дією періодичної вимушуючої сили $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Розглянути випадок резонансу $\omega \to \omega_0$.

***Задача* 17°.** Дослідити (задача 15) залежність амплітуди A та запізнення по фазі φ коливань від частоти ω змушуючої сили при різних величинах тертя. Побудувати графіки $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ для різних значень β. За яких умов крива $A(\omega)$ не має максимуму? Чому значення $A(0)$ не залежить від декременту загасання?

***Задача* 18°.** Знайти (задача 15) середню за період енергію W, що поглинається осцилятором. Дослідити залежність $W(\omega)$ та побудувати її графік при різних значеннях β. Розглянути граничні випадки малої та великої віддаленості від резонансу $|\omega - \omega_0| \ll \beta$ та $|\omega - \omega_0| \gg \beta$.

***Задача* 19*.** Побудувати в квадратурах розв'язок задачі про вимушені коливання осцилятора з тертям, пропорційним швидкості, під дією довільної змушуючої сили $F(t)$:

1) використовуючи перетворення Фур'є;
2) за допомогою прямого означення функції Гріна.

1.2. Одновимірний рух. Період

Під час одновимірного руху частинки маси m у потенціалі $U(x)$ залежність $x(t)$ її координати від часу знаходиться з рівняння

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \,,$$

де величини сталої t_0 та енергії E визначаються початковими значеннями координати та швидкості частинки.

Період фінітного руху частинки дорівнює

$$T(E) = \sqrt{2m} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \,,$$

де x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) — точки повороту, що являються розв'язками рівняння $E = U(x)$.

Для дослідження руху можна дотримуватись такої послідовності дій:

1) побудувати графік $U(x)$, визначити області, можливі для руху для кожного можливого значення енергії, знайти точки повороту;
2) знайти траєкторію $x(t)$ для якісно різних випадків руху;
3) для випадку фінітного руху знайти період;
4) знайти частоту коливань для фінітного руху у випадку малих відхилень від положення рівноваги (у квадратичному наближенні).

***Задача* 20°.** Дослідити одновимірний рух частинки маси m у полі сталої сили $\vec{F}_0$, вважаючи, що на неї діє пропорційна швидкості сила тертя: $F_d = -\alpha\dot{x}$. Розглянути граничні випадки $\dot{x}(\infty)$, $\dot{x}(\infty)$.

***Задача* 21.** Частинка маси m рухається під дією сталої сили $\vec{F}_o$ без початкової швидкості. Дослідити одновимірний рух частинки, вважаючи, що на неї діє пропорційна квадрату швидкості сила тертя: $F_d = \alpha v^2$. Розглянути граничні випадки $\vec{r}(\infty)$, $\vec{v}(\infty)$.

***Задача* 22°.** Наближено описати рух частинки маси m в околі точки повороту в потенціалі $U(x)$.
Вказівка: У околі точки повороту потенціал розкласти в ряд Тейлора, зберігаючи необхідну кількість доданків.

➠ *У задачах 23–25 знайти період фінітного руху частинки маси m у вказаних потенціалах. Всі сталі параметри вважати додатними.*

***Задача* 23°.** $U(x) = \begin{cases} -U_0\,, & \text{якщо } x \in [-a, a]\,, \\ 0\,, & \text{якщо } x \notin [-a, a]\,. \end{cases}$

***Задача* 24°.** $U(x) = \alpha|x|\,.$

***Задача* 25°.** $U(x) = \frac{kx^2}{2}\,.$

➠ *У задачах 26–30 знайти період фінітного руху частинки маси m у вказаних потенціалах. Знайти частоту коливань для малих відхиленнях частинки від положення рівноваги. Всі сталі параметри вважати додатними.*

***Задача* 26°.** $U(x) = U_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ (потенціал Морзе).

***Задача* 27°.** $U(x) = -\dfrac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}.$

***Задача* 28°.** $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x.$

***Задача* 29°.** $U(x) = \alpha|x|^n.$

***Задача* 30.** $U(x) = -U_0 \cos \dfrac{x}{a}$, якщо задані такі початкові умови $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \sqrt{4U_0/m}$.

***Задача* 31⋆.** $U(x) = -U_0 \cos \dfrac{x}{a}$, для довільних початкових умов.

***Задача* 32.** Знайти траєкторію $x(t)$ та період T фінітного руху частинки маси m у потенціалі

$$U(x) = -\frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{6}\,,$$

якщо задані такі початкові умови $x(0) = 3k/\alpha$, $\dot{x}(0) = 0$, де $\alpha, k > 0$.

***Задача* 33.** Частинка маси m рухається в потенціалі $U(x) = \alpha x^4$ при $\alpha > 0$. Знайти траєкторію руху частинки, якщо $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$.

***Задача* 34.** Знайти траєкторію $x(t)$ руху частинки маси m у потенціалі

$$U(x) = -\frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}\,,$$

якщо задані такі початкові умови $x(0) = \sqrt{2k/\alpha}$, $\dot{x}(0) = 0$, де $\alpha, k > 0$.

***Задача* 35⋆.** Розв'язати задачу 33 для довільних початкових умов.

***Задача* 36⋆.** Розв'язати задачу 34 для довільних початкових умов.

***Задача* 37.** Знайти траєкторію $x(t)$ руху частинки маси m у потенціалі

$$U(x) = -U_0 e^{-x/a} \text{ при } U_0 > 0,$$

якщо задані такі початкові умови $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) > \sqrt{2U_o/m}$.

***Задача* 38.** Знайти зміну закону руху частинки (в області без точок повороту) та поправку до періоду при зміні потенціалу $U(x)$ на малу величину $\delta U(x)$. Для потенціалу $U(x) = \dfrac{kx^2}{2}$ розглянути випадки

$$1)\ \delta U(x) = \frac{\alpha x^3}{3}\,; \quad 2)\ \delta U(x) = \frac{\alpha x^4}{4}\,.$$

***Задача* 39⋆.** Довести формулу асимптотичного розкладу зміни періоду фінітного руху при малій зміні потенціалу на малу величину $U \to U^* = U + \delta U$:

$$T^*(E) = \sqrt{2m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{d^n}{dE^n}\int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{\big[\delta U(x)\big]^n}{\sqrt{E-U(x)}}\,dx\,,$$

де $T(E)$ — період фінітного руху у незбуреному потенціалі $U(r)$, $x_{1,2}(E)$ — точки повороту.

***Задача* 40⋆.** Знайти форму потенціалу, для якого період фінітного руху не залежить від значення енергії.
Вказівка: інтеграл $T(E)$ є функцією параметра E, тому в принципі допустимі операції диференціювання, інтегрування та граничного переходу відносно E. Однак, обчислення похідної — не коректне (покажіть це). Відтак, залишається інтегрування виразу з $T(E)$ по змінній E і подальше врахування $T(E) = \text{const}$.

1.3. Рух зарядженої частинки в електромагнітному полі

Дія електромагнітного поля на заряджену частинку визначається силою Лоренца

$$\vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = e\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{e}{c}\,\dot{\vec{r}}\times\vec{H}(\vec{r},t)$$

(у системі СГС).

***Задача* 41°.** Частинка маси m, рухаючись з швидкістю $\vec{v}_1$, переходить із півпростору з постійною потенціальною енергією U_1 у півпростір, в якому її потенціальна енергія теж постійна і рівна U_2. Визначити зміну напрямку руху частинки.

***Задача* 42°.** Частинка з масою m і зарядом e влітає в однорідне стаціонарне електричне поле $\vec{E}$. Знайти траєкторію руху частинки.

***Задача* 43°.** Розв'язати попередню задачу 42, вважаючи, що на частинку діє ще й сила опору, пропорційна першій степені швидкості: $\vec{F}_d = -\alpha\dot{\vec{r}}$.

***Задача* 44°.** Частинка з масою m і зарядом $-|e|$ влітає в однорідне стаціонарне електричне поле $\vec{E}$ із швидкістю $\vec{v}_0$, паралельною до напрямку поля. Через який час частинка повернеться у вихідну точку?

***Задача* 45°.** Частинка з масою m і зарядом e попадає в однорідне електричне поле $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ із швидкістю $\vec{v}_0$, перпендикулярною до напрямку поля. Знайти траєкторію руху частинки.

***Задача* 46°.** Розв'язати задачу 46, вважаючи, що на частинку діє ще й сила опору, пропорційна до швидкості: $\vec{F}_d = -\alpha \vec{v}$. Описати рух частинки в просторі швидкостей.

***Задача* 47°.** Частинка з масою m і зарядом e попадає в однорідне стаціонарне магнітне поле $\vec{H}$ із швидкістю $\vec{v}_0$. Знайти траєкторію руху частинки.

***Задача* 48°.** Розв'язати задачу 47, вважаючи, що на частинку діє ще й сила опору, пропорційна до швидкості: $\vec{F}_d = -\alpha \vec{v}$. Описати рух частинки в просторі швидкостей.

***Задача* 49.** Дослідити рух зарядженої частинки в однорідних стаціонарних магнітному $\vec{H}$ та електричному $\vec{E}$ полях, кут між якими α, якщо початкова швидкість частинки $\vec{v}_o \perp \vec{E}, \vec{H}$. Дослідити залежність форми траєкторії від початкових умов. Знайти швидкість дрейфу частинки.

***Задача* 50.** Дослідити рух зарядженого осцилятора в однорідному стаціонарному магнітному полі $\vec{H}$ (класичний ефект Зеємана).

***Задача* 51.** Дослідити рух осцилятора в однорідних взаємно перпендикулярних стаціонарному магнітному $\vec{H}$ та періодичному електричному $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ полях. На яких частотах буде спостерігатися резонанс в такій системі?

***Задача* 52.** Дослідити рух зарядженої матеріальної точки в однорідних взаємно перпендикулярних стаціонарному магнітному $\vec{H}$ та та періодичному електричному $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$ полях за наявності тертя $\vec{F}_d = -\alpha \dot{\vec{r}}$ (циклотронний резонанс). Знайти середню потужність, яка поглинається частинкою. Яке значення має орієнтація полів?

***Задача* 53.** Заряджена частинка рухається в однорідних стаціонарних полі тяжіння $\vec{g} = (0, 0, -g)$ та магнітному полі з індукцією $\vec{B} = (0, B, 0)$. Знайти межі області руху частинки по координаті z, якщо в початковий момент $\vec{r}(0) = (0, 0, H)$, $\vec{v}(0) = (0, 0, v_o)$.

***Задача* 54.** Електрон рухається в магнітному полі з індукцією $\vec{B} = (0, 0, B \cos ay)$. Знайти його траєкторію руху, якщо $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = (0, \omega/a, 0)$.

***Задача* 55.** Частинка маси m рухається під дією зовнішньої сили $\vec{F} = \alpha \vec{r}$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор частинки. Знайти траєкторію руху частинки, якщо її початкове положення $\vec{r}_0$, а початкова швидкість $\vec{v}_0$ напрямлена перпендикулярно вектору $\vec{r}_0$.

***Задача* 56*.** Дослідити рух частинки маси m у полі магнітного монополя $\vec{H} = \alpha \dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

***Задача* 57.** Знайти інтеграли руху для частинки маси m та заряду e у полі постійного лінійного струму $\vec{I} = I\vec{e}_z$.

***Задача* 58*.** Знайти середню потужність, яка поглинається просторовим осцилятором під час його взаємодії з плоскою електромагнітною хвилею.

1.4. Рух у центральному полі

Для руху частинки маси m у центральному полі $U(r)$:

• закон її радіального руху $r(t)$ визначається квадратурою:

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}\,;$$

• залежність азимутального кута від часу $\varphi(t)$ має вигляд:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{L\,dt}{mr^2(t)}\,;$$

• рівняння траєкторії частинки $r = r(\varphi)$ визначається квадратурою:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}\,,$$

де $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \dfrac{L^2}{2mr^2}$ — ефективний потенціал, а величини сталих t_0, φ_0, енергії E та моменту імпульсу L визначаються початковими значеннями координат та швидкостей частинки.

У випадку фінітного ручу частинки умова замкнутості траєкторії має вигляд

$$k\,\Delta\varphi = 2\pi\, n, \quad k, n \in Z,$$

де $\Delta\varphi$ — кут повороту радіус-вектора частинки за один період її радіального руху.

Схема розв'язку задачі аналогічна задачі про одновимірний рух із заміною фізичного потенціалу на ефективний.

***Задача* 59°.** Дослідити рух частинки маси m у потенціалі

$$U(r) = \begin{cases} -U_0\,, & \text{якщо } 0 < r < R\,, \\ 0\,, & \text{якщо } R < r < \infty\,, \end{cases}$$

при $U_0 > 0$ ("сферична потенціальна яма").

***Задача* 60°.** Якісно описати рух частинки маси m у потенціалі $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\beta}{r^3}$ при різних значеннях енергії та моменту імпульсу, якщо $\alpha, \beta > 0$.

***Задача* 61°.** Дослідити рух частинки (знайти $r(t)$ і $\varphi(t)$, рівняння траєкторії $r(\varphi)$ та зобразити її графік, визначити точки повороту, період радіального руху та період обертання) у потенціалі $U(r) = \dfrac{kr^2}{2}$ при $\alpha > 0$.

***Задача* 62°.** Дослідити рух частинки маси m у кулонівському потенціалі $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$. Розглянути випадки відштовхування ($\alpha > 0$) та притягання ($\alpha < 0$). Знайти закон радіального руху $r(t)$, рівняння траєкторії $r(\varphi)$ руху частинки, визначити точки повороту, період радіального руху та період обертання.

***Задача* 63°.** Довести, що при русі частинки в потенціалі Кулона $U(r)$ векторна величина

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + \vec{r}\,U(r)$$

(вектор Рунге-Ленца) є інтегралом руху. Використовуючи цей інтеграл, знайти рівняння траєкторії руху частинки.

***Задача* 64.** Знайти залежність координат частинки від часу при русі в полі $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ при $\alpha > 0$ з енергією $E = 0$ (по параболі).

***Задача* 65.** Знайти час падіння частинки в центр силового поля $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ із заданої відстані R з початковою нульовою швидкістю.

***Задача* 66.** Повна енергія частинки маси m, що рухається в центральному полі $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r^2}\ln\dfrac{r}{a}$ дорівнює нулю ($\alpha > 0$). Знайти траєкторію руху частинки.

***Задача* 67.** Частинка маси m з повною енергією $E = 0$ рухається в центральному полі $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r^6}$, де $\alpha > 0$. Знайти траєкторію руху частинки.

***Задача* 68.** Частинка маси m з повною енергією $E = 0$ рухається в потенціалі

$$U(r) = -\frac{U_0}{\left[1 + \left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right]^2}, \quad \text{де } U_0 > 0,\ a > 0.$$

Знайти траєкторію руху частинки.

***Задача* 69.** Знайти потенціал центрального поля, якщо траєкторія руху частинки в ньому має вигляд $r = c/\varphi$, де $c = \text{const}$.

***Задача* 70.** Частинці маси m, що перебувала на відстані r_0 від центру поля $U(r) = \alpha r^3/3$, надано швидкість $\vec{v}_0$, напрямлену під кутом $\pm\pi/2$ до силового центру. При якому значенні швидкості v_0 частинка буде рухатися по колу?

***Задача* 71°.** Дослідити рух частинки маси m у потенціалі $U(r) = \dfrac{\alpha}{r^2}$, де $\alpha > 0$ (відштовхування) та $\alpha < 0$ (притягання). Знайти $r(t)$, рівняння траєкторії $r(\varphi)$ (побудувати її графік), визначити точки повороту та період фінітного руху. Розглянути випадки:

1) $\alpha > 0$, знайти кут розсіяння (кут $\delta\varphi$ між асимптотами);

2) $-\dfrac{L^2}{2m} < \alpha < 0$, знайти кут розсіяння. При яких початкових умовах частинка, зробивши ціле число оборотів навколо центру, повертається назад?

3) $\alpha = -\dfrac{L^2}{2m}$ та $\alpha < -\dfrac{L^2}{2m}$.

Розглядаючи відповідь $r(\varphi, \alpha)$ як функцію α описати перехід розв'язку дл $\alpha > -L^2/2m$ в розв'язок з $\alpha < -L^2/2m$ через $\alpha = -L^2/2m$.

***Задача* 72°.** Дослідити рух частинки в потенціалі $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{r^2}$ при значеннях параметрів $\alpha, \beta > 0$. Знайти траєкторію $r(\varphi)$ руху частинки, кут $\Delta\varphi$ між двома послідовними мінімальними значеннями r. За яких умов траєкторія руху частинки — замкнена крива? Визначити період радіальних коливань T_r та період обертання T_φ частинки.

***Задача* 73°.** Дослідити рух частинки з масою m та енергією E у полі $U(r) = \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\beta}{r^2}$ при значеннях параметрів $\alpha, \beta > 0$. Знайти траєкторію $r(\varphi)$ руху частинки і побудувати її графік для таких випадків:

1) $\beta > \dfrac{L^2}{2m}$ при $E > U_{max}$, $E = U_{max}$ та $E < U_{max}$;

2) $\beta = \dfrac{L^2}{2m}$; 3) $\beta < \dfrac{L^2}{2m}$,

де U_{max} — максимум ефективного потенціалу. Для випадку $\beta > \dfrac{L^2}{2m}$ знайти час падіння частинки в центр поля із заданої відстані R. Визначити скільки обертів навколо центру зробить при цьому частинка.

***Задача* 74.** Дослідити рух частинки в потенціалі $U(r) = \dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{r^2}$ при значеннях параметрів $\alpha, \beta > 0$.

***Задача* 75.** Дослідити рух частинки в потенціалі $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\beta}{r^2}$ при значеннях параметрів $\alpha, \beta > 0$.

➠ *У задачах 76–77 дослідити, за яких умов можливий фінітний рух частинки у заданому потенціальному полі $U(r)$.*

***Задача* 76.** $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}e^{-kr}$, при $\alpha, k > 0$.

***Задача* 77.** $U(r) = -U_0 e^{-k^2 r^2}$, при $U_0, k > 0$.

***Задача* 78*.** Частинка падає із скінченної відстані в центр поля $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r^n}$ при $\alpha > 0$. Чи буде число обертів навколо центру, зроблених при цьому частинкою, скінченним? Чи буде скінченним час падіння? Знайти траєкторію руху частинки для малих значень r.

***Задача* 79*.** Знайти закон руху і траєкторію частинки, яка рухається у потенціалі $U = \dfrac{\alpha}{r^2}$ і у постійному магнітному полі $\vec{H}$, перпендикулярному до площини орбіти.

***Задача* 80*.** Дослідити рух частинки у потенціалі $U(r) = \dfrac{\alpha}{r^4}$.

1.5. Зіткнення та розсіювання частинок

Ефективний диференційний переріз розсіяння дається виразом

$$d\sigma = 2\pi s(\chi)\left|\frac{ds(\chi)}{d\chi}\right| d\chi\,.$$

Для частинки маси m, що рухається в розсіюючому потенціалі $U(r)$, залежність її прицільної відстані s від кута розсіяння χ визначається системою рівняннь

$$\chi = |\pi - 2\varphi_0|\,, \quad \varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{s\,\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{s^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}}\,,$$

де $r_{\min}$ — корінь виразу, що стоїть під знаком радикала, v_∞ — швидкість частинки на нескінченності.

***Задача* 81°.** Визначити умови на потенціал, при яких можливе падіння частинки в центр силового поля.

***Задача* 82°.** Знайти диференціальний та повний перерізи розсіяння частинок на жорсткій сфері радіуса R.

➠ *У задачах 83–85 Знайти диференціальний та повний перерізи розсіяння частинок з швидкістю $\vec{v}_\infty = v_\infty \vec{e}_z$ на поверхнях обертання $r = r(z)$, заданих у циліндричній системі координат.*

***Задача* 83.** $r(z) = a\sin\alpha z$, якщо $z \in [0, \pi/\alpha]$.

***Задача* 84.** $r(z) = az^\alpha$, якщо $\alpha \in]0,1[$.

***Задача* 85.** $r(z) = a - \frac{b}{z}$, якщо $z \in [b/a, \infty[$.

***Задача* 86°.** Знайти диференціальний переріз розсіяння частинок у потенціалі Кулона $U(r) = \frac{\alpha}{r}$ при $\alpha > 0$. За яким законом прямує до нескінченності повний переріз розсіяння?

***Задача* 87°.** Знайти диференційний переріз розсіяння частинок у полі $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ при $\alpha > 0$.

***Задача* 88°.** Знайти повний переріз падіння частинок у центр поля $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ при $\alpha < 0$.

***Задача* 89⋆.** Знайти диференційний переріз розсіяння частинок у полі $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ при $\alpha < 0$ (частинка робить кілька обертів навколо центру поля).

***Задача* 90.** Знайти диференціальний переріз розсіяння частинок сферичним "потенціальним горбом"

$$U(r) = \begin{cases} U_0 & \text{при } r < R\,, \\ 0 & \text{при } r > R\,, \end{cases} \quad \text{де } U_0 > 0.$$

***Задача* 91.** Знайти диференційний переріз розсіяння частинок у потенціалі

$$U(r) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\alpha}{R} & \text{при } r < R\,, \\ 0 & \text{при } r > R\,, \end{cases}$$

де $\alpha > 0$, $R > 0$

➠ *У задачах 92–95 Знайти повний переріз падіння частинок у центр вказаного потенціального поля.*

***Задача* 92.** $U(r) = \dfrac{\alpha}{r^n}$ при $\alpha < 0$.

***Задача* 93.** $U(r) = \dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\beta}{r^2}$ при $\alpha, \beta > 0$. За яких умов падіння в центр силового поля не реалізується?

***Задача* 94.** $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{\beta}{r^2}$ при $\alpha, \beta > 0$.

***Задача* 95.** $U(r) = \dfrac{\alpha}{r^2} - \dfrac{\beta}{r^4}$ при $\alpha, \beta > 0$.

***Задача* 96.** Знайти повний переріз падіння частинок на кулю радіуса R, що знаходиться в центрі силового поля: $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ при $\alpha > 0$.

***Задача* 97.** Знайти повний переріз падіння частинок на кулю радіуса R, що знаходиться в центрі силового поля $U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^4}$ при $\alpha, \beta > 0$.

***Задача* 98.** Знайти поправку до диференціального перерізу розсіяння частинки при зміні потенціалу $U(r)$ на малу величину $\delta U(r)$. Розглянути частинний випадок $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$ та $\delta U(r) = \frac{\beta}{r^3}$.

***Задача* 99*.** Знайти диференціальний переріз розсіяння частинок на малі кути у потенціалі $U(r) = \dfrac{\alpha}{r^n}$ при $n > 0$.

***Задача* 100*.** Відновити потенціал взаємодії $U(r)$ по відомій залежності диференціального перерізу від кута у C-системі, вважаючи, що $U(\infty) = 0$ (обернена задача розсіяння).

***Задача* 101.** Частинка маси m_1 налітає із нескінченності з швидкістю v та прицільним параметром s на нерухому частинку маси m_2. Знайти найменшу відстань між частинками, якщо закон їх взаємодії $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$ при $\alpha > 0$.

***Задача* 102.** Частинка маси m_1 з початковою швидкістю $\vec{v}_1$ налітає на нерухому частинку маси m_2 і розсіюється на кут Φ. Знайти кут розсіяння χ частинки в системі центру мас, передану частину кінетичної енергії та відношення мас частинок, при якому передана енергія буде максимальною.

Розділ 2

Механіка Лагранжа

2.1. Рівняння Лагранжа I роду

Для механічної системи N частинок з голономними зв'язками $f_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N, t) = 0$, $\alpha = \overline{1, s}$ рівняння Лагранжа I роду мають вигляд

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha\,, \quad i = \overline{1, N}\,,$$

де λ_α — невизначені множники Лагранжа.

Вирішення основної задачі механіки такої голономної системи зводиться до розв'язання системи рівнянь Лагранжа I роду сумісно з рівняннями зв'язків. Сили реакції $\vec{R}_i$ в цьому випадку визначаються виразом $\vec{R}_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha$.

***Задача* 103.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій похилій площині з кутом нахилу α. Знайти закон руху частинки і силу реакцію поверхні.

***Задача* 104.** Дві частинки з масами m_1 і m_2 зв'язані нерозтяжною невагомою ниткою, яка перекинута через невагомий блок, рухаються в однорідному полі сили тяжіння. Знайти закон руху частинок та реакцію зв'язку.

***Задача* 105.** Частинка маси m починає рухатися в однорідному полі сили тяжіння з висоти h з нульовою початковою швидкістю по гладкій нерухомій параболі $y^2 = ax$, розташованій у вертикальній площині (вісь параболи горизонтальна). Визначити, на якій висоті частинка відірветься від параболи.

***Задача* 106.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій сфері радіуса R. Знайти: а) реакцію сфери як функцію координат та швидкості частинки; б*) закон руху частинки в циліндричних та сферичних координатах.

***Задача* 107.** Матеріальна точка маси m рухається по гладкому нерухомому еліпсоїду з півосями a, b, c під дією сили $\vec{F} = -\alpha\vec{r}$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор матеріальної точки, проведений з центру еліпсоїда. Знайти силу реакції зв'язку як функцію положення та швидкості матеріальної точки.

***Задача* 108.** Частинка маси m закріплена на кінці невагомого твердого стержня довжини l і знаходиться в однорідному полі сили тяжіння. Другий кінець стержня шарнірно закріплено так, що частинка може рухатися тільки у вертикальній площині. Не враховуючи тертя, знайти закон руху частинки та реакцію зв'язку. Знайти частоту малих коливань поблизу положення рівноваги.

***Задача* 109.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій внутрішній поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$. Знайти силу реакції зв'язку.

***Задача* 110.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій горизонтальній площині, яка коливається в вертикальному напрямку з амплітудою a і частотою ω. Знайти положення частинки та реакцію зв'язку як функції часу.

***Задача* 111.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння по внутрішній поверхні прямого вертикального циліндра радіуса R. Вважаючи поверхню циліндра абсолютно гладкою, знайти закон руху частинки та силу тиску частинки на циліндр. Початкова швидкість частинки $\vec{v}_o$ складає кут α з горизонтом.

***Задача* 112.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння по гладкій вертикальній циліндричний поверхні. Знайти закон руху частинки та силу реакції зв'язку, якщо радіус циліндричної поверхні збільшується з часом з постійною швидкістю $\dot{\rho}_o$.

***Задача* 113.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння по лінії перетину нерухомої гладкої сфери радіуса R з гладкою горизонтальною площиною, яка рухається у вертикальному напрямку по закону $z(t) = R\sin\omega t$. Знайти закон руху частинки і реакцію зв'язку для $0 \leqslant t \leqslant \pi/2\omega$.

2.2. Рівняння Лагранжа другого роду

Для голономної механічної системи з узагальненими координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ рівняння Лагранжа II роду мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0\,, \quad i = \overline{1,n}\,.$$

Тут L — функція Лагранжа, що визначається як $L = T - U$; T — кінетична, U — потенціальна енергії системи.

***Задача* 114°.** Знайти закон руху для системи з функцією Лагранжа

$$L(x, \dot{x}, t) = t\sqrt{1 + \dot{x}^2}\,.$$

***Задача* 115°.** Побудувати в циліндричній, сферичній та параболічній системах координат функцію Лагранжа для вільної частинки. Знайти розв'язки рівнянь руху у кожному випадку.

***Задача* 116°.** Записати в циліндричній і сферичній системах координат функцію Лагранжа та рівняння Лагранжа II-го роду для частинки маси m, що рухається у таких потенціалах:

$$1)\, U(\vec{r}\,) = U(r); \quad 2)\, U(\vec{r}\,) = -\vec{F}\cdot\vec{r}\,, \text{ де } \vec{F} = \text{const}\,.$$

***Задача* 117.** Знайти інтеграли руху частинки маси m, що рухається у потенціалі $U(\vec{r}\,)$:

1) $U(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r}$, де $\vec{F} = \text{const}$;
2) $U(\vec{r})$ — однорідна функція $\vec{r}$, тобто $U(\alpha\vec{r}) = \alpha^n U(\vec{r})$;
3) $U(\vec{r}, t) = U(\vec{r} - \vec{v}t)$, де $\vec{v} = \text{const}$.

***Задача* 118°.** Записати функцію Лагранжа і рівняння руху частинки з масою m і зарядом e у стаціонарному однорідному магнітному полі $\vec{H}$ у декартових та циліндричних координатах. Знайти інтеграли руху частинки.

***Задача* 119°.** Побудувати функцію Лагранжа диполя, утвореного двома протилежно зарядженими масами m_1 і m_2, що знаходяться в однорідному електричному полі $\vec{E}$.

***Задача* 120.** У сферичній системі координат знайти інтеграли руху частинки, що рухається в магнітному полі $\vec{H} = \alpha\vec{r}/r^3$.

***Задача* 121.** Знайти інтеграли руху частинки, що рухається в електромагнітному полі з векторним потенціалом $\vec{A} = \frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$, де $\vec{m} = \mathrm{const}$ (магнітний момент).

***Задача* 122.** Записати в сферичній системі координат функцію Лагранжа

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = -mc^2 \left(1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}\right)^{1/2} + U(r)\,,$$

де m, c — сталі величини.

***Задача* 123*.** Знайти траєкторію релятивістської частинки у потенціалі Кулона:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} + \frac{\alpha}{r}\,.$$

***Задача* 124.** Знайти вигляд функції Лагранжа із задачі 119 при такій заміні координат (перетворення Лоренца):

$$x' = x \operatorname{ch}\varphi + ct \operatorname{sh}\varphi\,, \quad ct' = x \operatorname{sh}\varphi + ct \operatorname{ch}\varphi\,.$$

***Задача* 125°.** Знайти закон руху системи з функцією Лагранжа

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{\alpha}{2}(\dot{x}y - \dot{y}x) - \frac{k_1 x^2}{2} - \frac{k_2 y^2}{2}\,.$$

***Задача* 126*.** Заряд рухається по сферу, центр якої знаходиться у початку координат під дією магнітного поля з вектор-потенціалом $\vec{A} = \frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}$ (диполь). Знайти межі руху заряду по куту θ.

***Задача* 127*.** Два силових центри знаходяться на відстані $2a$ один від іншого. Знайти закон руху частинки, якщо потенціал її взаємодії з кожним із центрів — кулонівський.

***Задача* 128*.** Знайти період коливань частинки, яка рухається у полі двох однакових центрів (задача 127, випадок притягання). Частинка рухається вздовж прямої, яка перпендикулярна до відрізку, що з'єднує центри.

***Задача* 129*.** Знайти розв'язок задачі Кеплера к системі координат, яка обертається з кутовою швидкістю ω.

2.3. Побудова функції Лагранжа для системи частинок

Для побудови функції L та запису рівнянь руху можна дотримуватись такого алгоритму:

1) записати $L = T - U$ у декартових координатах, вибираючи інерціальну систему відліку (часто пов'язану з нерухомою точкою);
2) записати зв'язки $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$ у декартових координатах;
3) вибрати узагальнені координати $\{q_i \ : \ i = \overline{1, n}\}$ так, щоб рівняння зв'язків задовольнялися тотожно:
$$f_\alpha(\vec{r}(q, t), t) \equiv 0 \,.$$
Це відповідає запису співвідношень, які описують поверхню зв'язків, у параметричному вигляді;
У багатьох випадках залишається ще деякий елемент довільності у виборі узагальнених координат. Остаточний вибір можна зробити з міркувань зручності та простоти функції Лагранжа. Мотивації вибору узагальнених координат можна розбити за пріоритетами:
а) вони задовольняють зв'язки;
б) вони приводять до простої функції L (якщо ще є можливість вибору);
4) виразити швидкості $\dot{\vec{r}}_i$ через узагальнені швидкості та координати;
5) підставити вирази $\vec{r} = \vec{r}(q, t)$ та $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(q, \dot{q}, t)$ до $L = T - U$ і спростити вираз.

***Задача* 130°.** Побудувати функцію Лагранжа диполя, утвореного двома протилежно зарядженими масами m_1 і m_2, що знаходяться в однорідному електричному полі $\vec{E}$.

➠ *У задачах 131–134 побудувати функцію Лагранжа та знайти закон руху частинки маси m, що рухається в однорідному полі сили тяжіння по вказаній гладенькій кривій.*

***Задача* 131°.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (еліпс).

***Задача* 132°.** $y = \sqrt{x^2 + a^2}$ (гіпербола).

***Задача* 133°.** $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b\varphi$ (спіраль).

***Задача* 134°.** $x = R(\varphi + \sin\varphi)$, $y = R(1 - \cos\varphi)$ (циклоїда).
Вказівка: Ввести змінну $\xi = 4R\sin\frac{\varphi}{2}$.

➠ *У задачах 135–139 побудувати функцію Лагранжа та знайти закон руху частинки маси m, що рухається в однорідному полі сили тяжіння по вказаній гладенькій поверхні.*

***Задача* 135°.** $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ (конус).

***Задача* 136°.** $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (сфера).

***Задача* 137°.** $a^2 z = x^2 + y^2$ (параболоїд).

***Задача* 138°.** $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + 1$ (гіперпараболоїд).

***Задача* 139°.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (еліпсоїд).
Вказівка: перейти до еліптичних координат.

➟ *У задачах 140–189 побудувати функцію Лагранжа до вказаної механічної системи, записати рівняння руху, виконати аналіз інтегровності у квадратурах. У випадку існування положення рівноваги для системи з однією ступінню вільності знайти частоту малих коливань (вказано у задачі). Основні параметри системи вказані на рисунках.*

Всі маятники вважаються негнучкими, нерозтяжними та невагомими. Пружини — негнучкі та невагомі, параметри пружин k, a означають жорсткість та довжину у недеформованому стані відповідно.

***Задача* 140°.** Плоский математичний маятник з нерухомою точкою підвісу у полі сили тяжіння (рис. 2.3).

***Задача* 141*.** Розв'язати задачу 140 (скористатись законом збереження енергії). Розглянути обидва сценарії руху:

1) обертання маятника навколо точки підвісу;
2) коливання.

У обох випадках знайти період.

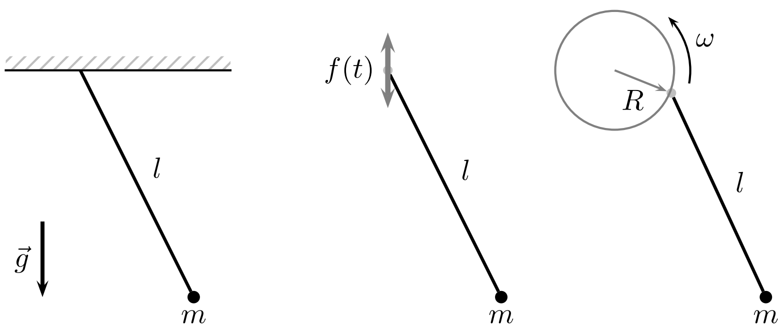
***Задача* 142*.** Дослідити загальний рух тривимірного математичного маятника.

***Задача* 143°.** Плоский математичний маятник, точка підвісу якого рухається по вертикалі за законом $f(t)$, у полі сили тяжіння (рис. 2.3).

***Задача* 144°.** Розв'язати задачу 143, якщо точка підвісу маятника рухається по горизонталі за законом $f(t)$.

***Задача* 145°.** Плоский математичний маятник, точка підвісу рівномірно обертається по колу радіуса R з кутовою швидкістю ω, у полі сили тяжіння (рис. 2.3).

***Задача* 146.** Розв'язати задачу 145, якщо точка підвісу маятника обертається у горизонтальній площині (тривимірний рух). Знайти період малих коливань.



до задачі 140 *до задачі 143* *до задачі 145*

Рис. 2.1. *До задач 140–??.*

***Задача* 147°.** Частинка підвішена за пружину, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці (рис. 2.3).

***Задача* 148°.** Частинка рухається вздовж маятника і прикріплена до пружини, вільний кінець якої спільний з вільним кінцем маятника (рис. 2.3). Вважати, що під час руху геометрична конфігурація зберігається.

***Задача* 149°.** Частинка рухається вздовж горизонтальної прямої і прикріплена до пружини, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці на висоті l (рис. 2.3). Записати функцію Лагранжа, знайти частоту малих коливань. Розглянути випадки $l < a$, $l > a$ та $l = a$.

***Задача* 150°.** Дві однакові частинки маси m з'єднані невагомим стержнем. Одна частинка рухається вздовж вертикальної прямої, а друга — вздовж горизонтальної. Відстань між прямими значно менша в порівнянні з довжиною стержня.

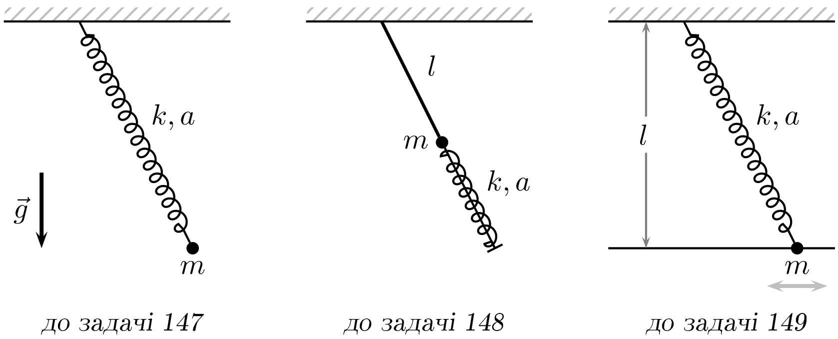


Рис. 2.2. *До задач 147–149.*

***Задача* 151°.** Частинка підвішена до маятника та пружини, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці (у полі сили тяжіння, рис. 2.3).

***Задача* 152°.** Частинка підвішена до маятника та пружини, вільний кінець якої закріплено у нерухомій точці (у полі сили тяжіння, рис. 2.3). У положенні рівноваги пружина горизонтальна.

***Задача* 153°.** Два плоских маятника з'єднано пружиною (у полі сили тяжіння, рис. 2.3). У положенні рівноваги пружина горизонтальна.

***Задача* 154°.** Частинки з масою m_1 ковзає по горизонтальній прямій, частинка з масою m_2 з'єднана з нею за допомогою маятника (рис. 2.3).

***Задача* 155°.** Розв'язати задачу 154, якщо пряма нахилена під кутом α до горизонталі.

***Задача* 156°.** Частинки з масою m_1 ковзає по горизонтальній прямій, частинка з масою m_2 з'єднана з нею за допомогою пружини (рис. 2.3).

***Задача* 157°.** Частинки з масою m_1 ковзає по горизонтальній прямій і з'єднана пружиною з нерухомою точкою, частинка з масою m_2 з'єднана з частинкою m_1 за допомогою маятника (рис. 2.3).

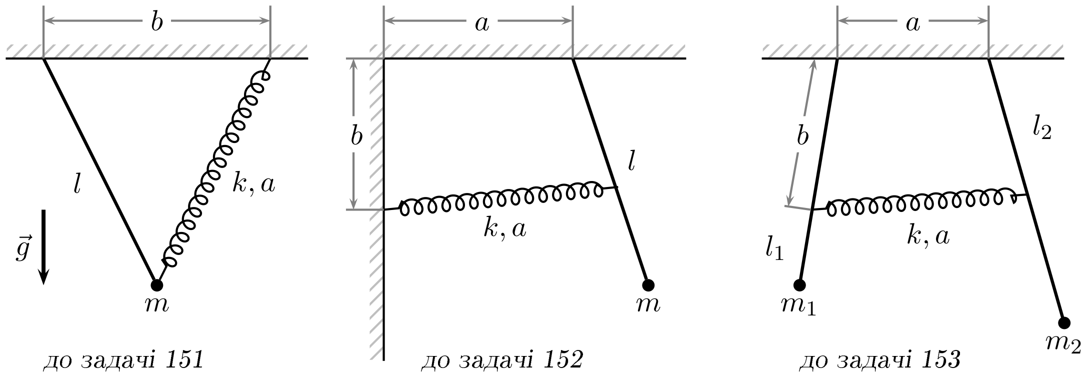


Рис. 2.3. *До задач 151–153.*

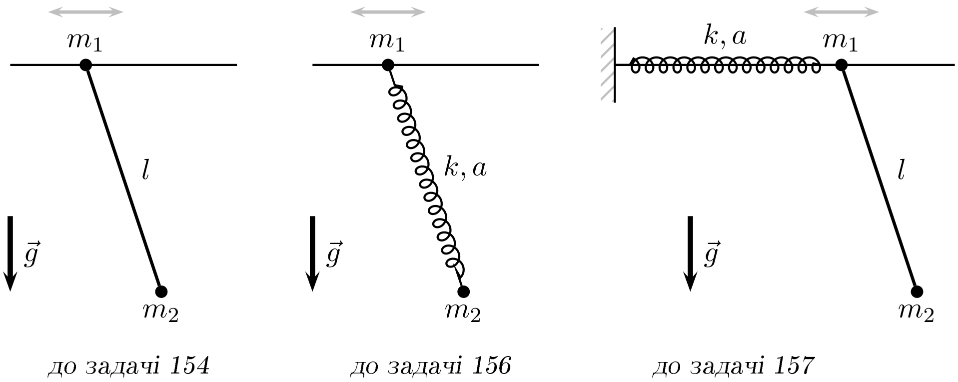


Рис. 2.4. *До задач 154–157.*

***Задача* 158°.** Частинки з масами m_1 та m_3 ковзають по горизонтальній прямій і з'єднані пружиною, частинка з масою m_2 з'єднана з частинкою m_1 за допомогою маятника (рис. 2.3).

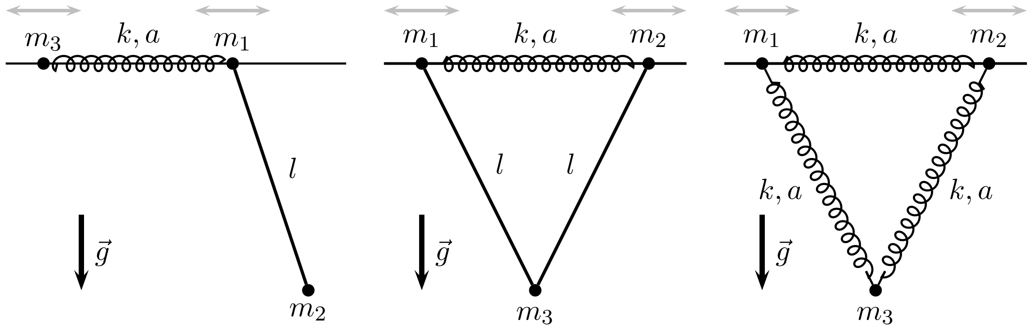
***Задача* 159°.** Частинки з масами m_1 та m_2 ковзають по горизонтальній прямій і з'єднані пружиною, частинка з масою m_3 з'єднана з ними однаковими маятниками (рис. 2.3).

***Задача* 160°.** Частинки з масами m_1 та m_2 ковзають по горизонтальній прямій і з'єднані пружиною, частинка з масою m_3 з'єднана з ними однаковими пружинами (рис. 2.3).

***Задача* 161°.** До кінців горизонтальної пружини, що вільно ковзає по горизонтальній прямій, приєднано два математичних маятники (рис. 2.3).

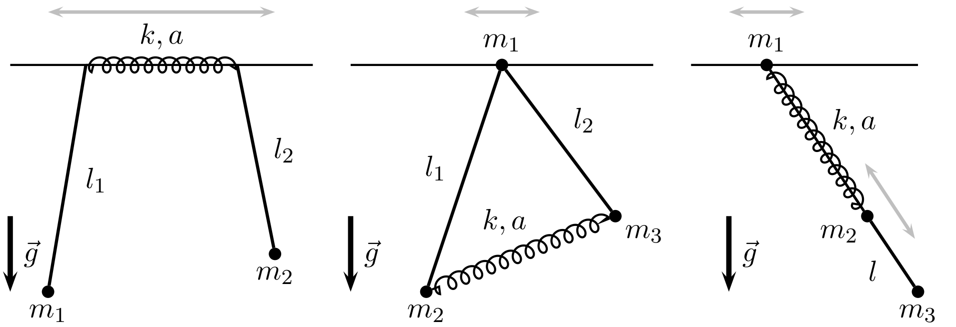
***Задача* 162°.** До кінців частинки, що ковзає по горизонтальній прямій приєднані маятники, кінці яких з'єднано пружиною (рис. 2.3).

***Задача* 163°.** До кінців частинки, що ковзає по горизонтальній прямій приєднано маятник та пружину з іншими частинками. Пружина напрямлена весь час вздовж маятника (рис. 2.3).



до задачі 158 *до задачі 159* *до задачі 160*

Рис. 2.5. *До задач 158–160.*



до задачі 161 *до задачі 162* *до задачі 163*

Рис. 2.6. *До задач 161–163.*

***Задача* 164°.** До кінця математичного маятника з нерухомим початком причеплено інший маятник (подвійний маятник, рис. 2.3).

***Задача* 165°.** Нижню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. 2.3).

***Задача* 166°.** Верхню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. 2.3).

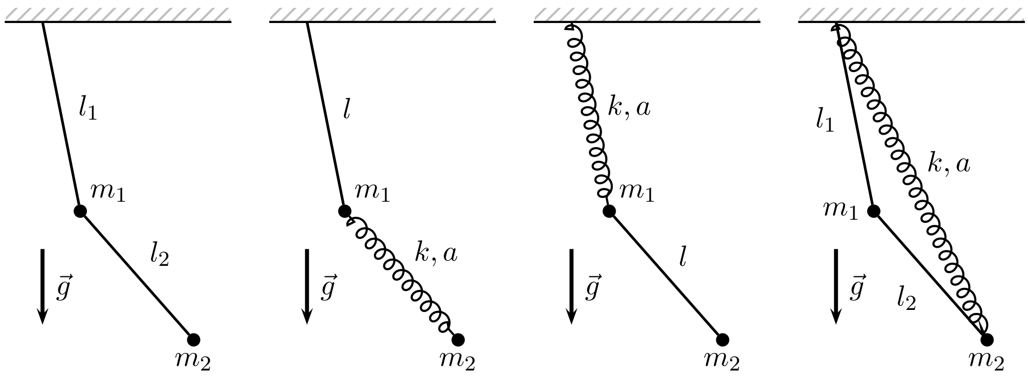
***Задача* 167°.** Кінці подвійного маятника з'єднано пружиною (рис. 2.3).

***Задача* 168°.** До математичного маятника прикріплено "гантельку" з двох частинок, яка може обертатись у площині (маятник Томсона, рис. 2.3).

***Задача* 169°.** Нижня частинка подвійного маятника ковзає вздовж вертикальної прямої, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 2.3).

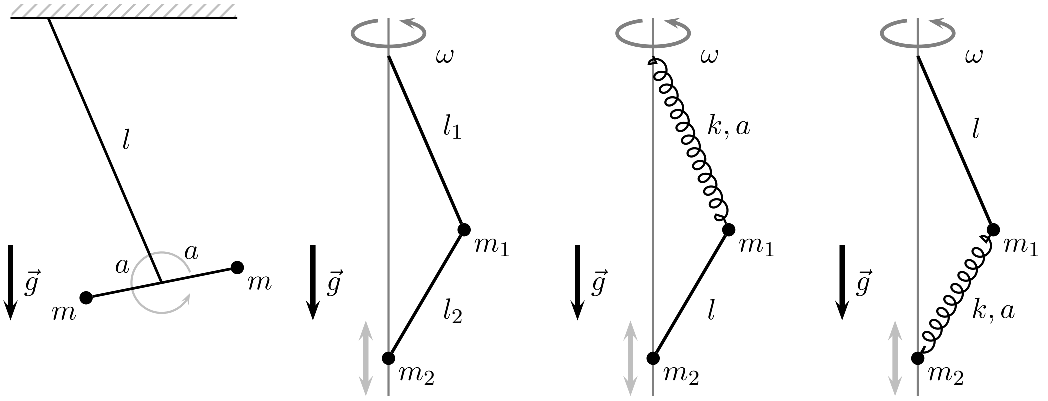
***Задача* 170°.** У системі з задачі 169 верхню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. 2.3).

***Задача* 171°.** У системі з задачі 169 нижню ланку подвійного маятника замінено на пружину (рис. 2.3).



до задачі 164 *до задачі 165* *до задачі 166* *до задачі 167*

Рис. 2.7. *До задач 164–167.*



до задачі 168 *до задачі 169* *до задачі 170* *до задачі 171*

Рис. 2.8. *До задач 168–171.*

***Задача* 172°.** Частинка ковзає по колу, що обертається навколо вертикальної осі, що проходить через геометричний центр, у полі сили тяжіння. Знайти частоти малих коливань для всіх можливих положень рівноваги, та вказати, коли вони реалізуються (рис. 2.3).

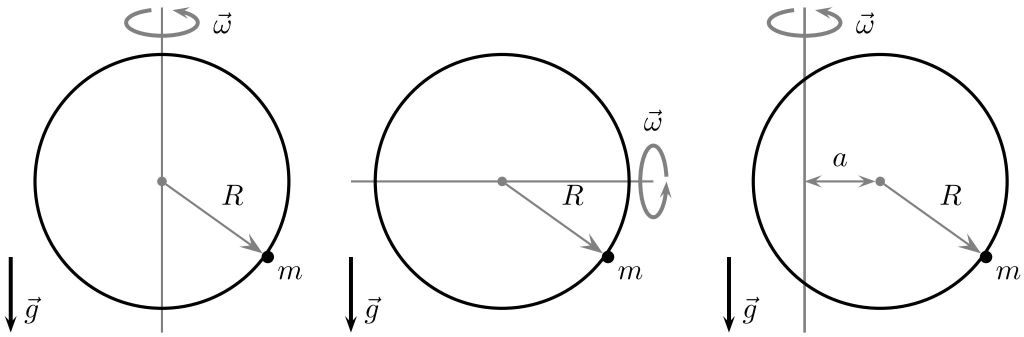
***Задача* 173*.** Розв'язати задачу 172 для випадку, коли частинка ковзає по еліпсу з півосями a, b (обертання відбувається навколо однієї з головних осей).

***Задача* 174°.** Частинка ковзає по колу, що обертається навколо горизонтальної осі, що проходить через геометричний центр, у полі сили тяжіння (рис. 2.3).

***Задача* 175°.** Частинка ковзає по колу, що обертається навколо вертикальної осі, що зміщена відносно геометричного центру на задану відстань, у полі сили тяжіння (рис. 2.3).

***Задача* 176°.** Частинка ковзає у полі сили тяжіння вздовж прямої, яка нахилена на заданий кут до вертикалі і обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю (рис. 2.3). Знайти закон руху частинки:

1) безпосереднім інтегруванням рівняння руху;



до задачі 172 *до задачі 174* *до задачі 175*

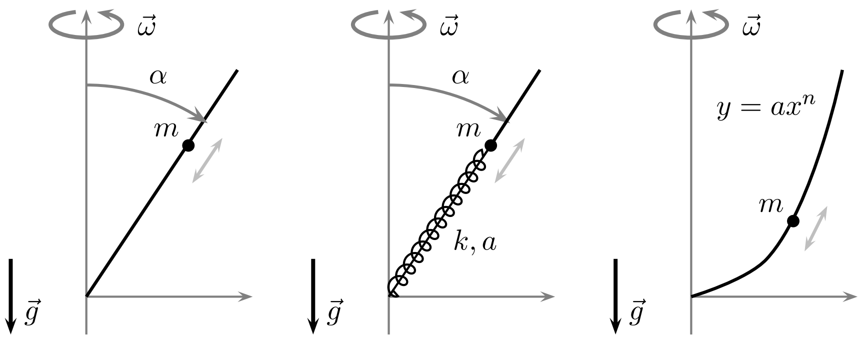
Рис. 2.9. *До задач 172–175.*

2) за допомогою закону збереження енергії (дослідити різні сценарії руху залежно від початкових умов).

***Задача* 177.** Частинка ковзає у полі сили тяжіння вздовж прямої, яка нахилена на заданий кут до вертикалі і обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю (рис. 2.3) і з'єднана з початком координат пружиною. Знайти частоту малих коливань.

***Задача* 178.** Частинка ковзає у полі сили тяжіння вздовж кривої $y = ax^n$, що обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю (рис. 2.3). Дослідити існування положення рівноваги та знайти частоту малих коливань.

***Задача* 179.** Розглянути ідеальне ковзання частинки маси m в однорідному полі сили тяжіння по замкнутій центральній гладкій кривій $r(z)$, яка обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо осі $\vec{n}$, що проходить через центр кривої. Дослідити малі коливання частинки поблизу положень рівноваги.



до задачі 176 *до задачі 177* *до задачі 178*

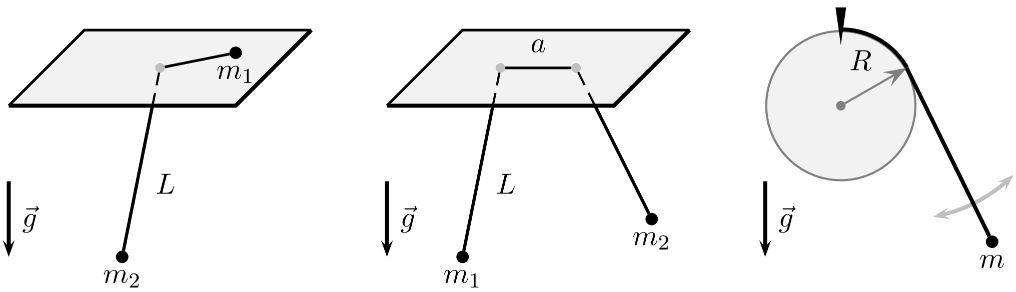
Рис. 2.10. *До задач 176–178.*

***Задача* 180°.** Частинка m_1 ковзає по горизонтальній площині і з'єднана з іншою частинкою m_2 нерозтяжною ниткою довжини L, яка проходить через отвір у площині. Рух відбувається у полі сили тяжіння (рис. 2.3). Розглянути окремо випадок руху m_2 тільки по вертикалі.

***Задача* 181°.** Розв'язати задачу 180 для випадку, коли площина нахилена на кут α.

***Задача* 182°.** Частинки m_1 та m_2 з'єднані нерозтяжною ниткою довжини L, яка проходить через два отвори у площині (рис. 2.3).

***Задача* 183*.** На коло намотано нерозтяжну нитку, до вільного кінця якої причеплено частинку (рис. 2.3). Дослідити малі коливання у такій системі (нитку вважати весь час натягнутою, а рух — плоским).



до задачі 180 *до задачі 182* *до задачі 183*

Рис. 2.11. *До задач 180–183.*

***Задача* 184.** Частинка ковзає по колу у полі сили тяжіння і з'єднана з пружиною, яку закріплено одним кінцем у точці, що є кінцем вертикального діаметру (рис. 2.3). Знайти частоту малих коливань для кожного з положень рівноваги, вказати, коли воно реалізується.

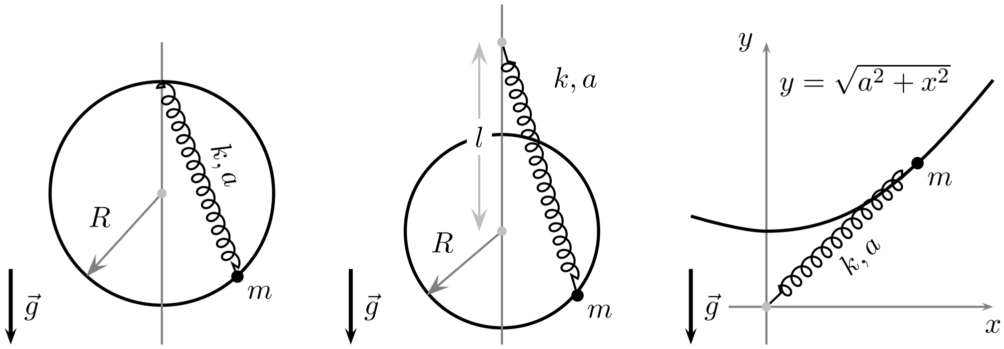
***Задача* 185.** Розв'язати задачу 184 для випадку, коли пружину закріплено одним кінцем у точці, що є кінцем горизонтального діаметру.

***Задача* 186*.** Розв'язати задачу 184 для випадку, коли коло обертається навколо вертикального діаметра зі сталою кутовою швидкістю ω.

***Задача* 187*.** Розв'язати задачу 184 для випадку, коли частинка ковзає по еліпсу (геометричний центр у початку координат, одна з півосей вертикальна).

***Задача* 188.** Частинка ковзає по колу у полі сили тяжіння і з'єднана з пружиною, яку закріплено одним кінцем у точці, яка розташована на висоті l від центру кола по вертикалі (рис. 2.3). Знайти частоту малих коливань для кожного з положень рівноваги, вказати, коли воно реалізується.

***Задача* 189.** Частинка ковзає по гіперболі у полі сили тяжіння і з'єднана з пружиною, яку закріплено одним кінцем початку координат (рис. 2.3). Знайти частоту малих коливань для кожного з положень рівноваги, вказати, коли воно реалізується.



до задачі 184 *до задачі 188* *до задачі 189*

Рис. 2.12. *До задач 184–189.*

***Задача* 190.** Через невагомий блок перекинуто невагомий нерозтяжний канат, до одного кінця якого прикріплено вантаж маси m_1, а по другому — лізе мавпа маси m_2 за заданим законом $x(t)$ відносно каната. Знайти закон руху вантажу.

***Задача* 191*.** Записати функцію Лагранжа для системи N математичних маятників у полі сили тяжіння: перший маятник прикріплений до нерухомої точки, до його вільного кінця, де знаходиться маса m прикріплений другий маятник і т. д. Довжини маятників рівні l, закріплені на кінцях маси — m. Розглянути граничний перехід до неперервного середовища, отримати функцію та рівняння Лагранжа.

***Задача* 192*.** До кінця останнього маятника з задачі 191 прикладена стала сила $\vec{F}$ у горизонтальному напрямку. Знайти кути нахилу маятників.

***Задача* 193*.** Дослідити систему, описану у задачі 191, якщо вільний кінець останнього маятника закріплений на тій же висоті, що і кінець першого маятника. Розглянути граничний перехід до неперервного середовища (ланцюг). Якою кривою описуються профіль системи?

2.4. Абсолютно тверде тіло

Швидкість зміни ортів власної системи координат абсолютно твердого тіла (АТТ) з часом описується за допомогою формули Пуансо

$$\dot{\vec{e}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{e}\,'_i\,, \quad i = 1, 2, 3.$$

Імпульс $\vec{P}$, момент імпульсу $\vec{L}$, кінетична енергія T та потенціальна енергія U АТТ в однорідному полі сили тяжіння, відповідно, мають вигляд

$$\vec{P} = M\Big(\dot{\vec{R}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'_C\Big)\,,$$

$$\vec{L} = M\vec{R}_0 \times \dot{\vec{R}}_0 + M\vec{R}_0 \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_C) + M\vec{r}\,'_C \times \dot{\vec{R}}_0 + \hat{I}\vec{\omega}\,,$$

$$T = \frac{1}{2}\,M\dot{\vec{R}}_0^2 + M\dot{\vec{R}}_0 \cdot \big(\vec{\omega} \times \vec{r}\,'_C\big) + \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\hat{I}\vec{\omega}\,, \quad U = -M\vec{g} \cdot \vec{R}_0 - M\vec{g} \cdot \vec{r}_C\,.$$

Тут $\vec{R}_0$ — радіус-вектор полюса O АТТ, $\vec{r}'_C$ — радіус-вектор центра мас АТТ відносно полюса O, $\vec{\omega}$ — вектор кутової швидкості обертання твердого тіла навколо полюса, $\hat{I}$ — тензор моменту інерції, компоненти якого у власній системі координат мають вигляд

$$I'_{\alpha\beta} = \sum_i \Delta m_i \left(r_i'^2 \delta_{\alpha\beta} - x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right) , \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

(або інтеграл для неперервного розподілу маси).

Тоді функція Лагранжа абсолютно твердого тіла визначається як $L = T - U$. Схема побудови функції Лагранжа може бути описана такою послідовністю дій:

1) записати $L = T - U$ у зручних (як правило, декартових) координатах, вибираючи інерціальну систему відліку спостерігача (пов'язану з нерухомою точкою); доданок з кутовими швидкостями доцільно записати у власній системі координат (де компоненти тензора інерції сталі), кутову швидкість можна виразити через кути Ейлера за допомогою кінематичних рівнянь (на даному етапі не обов'язково);

2) записати геометричні зв'язки типу $f(\vec{R}_C, t) = 0$ на положення центру мас (якщо вони є), вибрати узагальнені координати для поступальних ступенів вільності;

3) записати умови контакту для руху без проковзування (якщо є). В умовах контакту компоненти кутової швидкості зручно записувати у системі спостерігача (оскільки в ній задано швидкість центру мас). Якщо зв'язки інтегровні, виразити залежні координати;

4) записати функцію Лагранжа в незалежних координатах.

➠ *У задачах знайти головні моменти інерції вказаних тіл для полюсу у центрі мас. Розподіл маси вважати однорідним, сумарна маса m.*

***Задача* 194°.** Стержень довжини l.

***Задача* 195°.** Коло радіуса R.

***Задача* 196°.** Диск радіуса R (маса розподілена по поверхні).

***Задача* 197°.** Прямокутник зі сторонами a та b (маса розподілена по поверхні).

***Задача* 198°.** Прямокутний паралелепіпед з розмірами $a \times b \times c$. Виконати граничний перехід до прямокутника.

***Задача* 199°.** Циліндр висоти h з радіусом основи R. Виконати граничний перехід до диску.

***Задача* 200°.** Порожній циліндр висоти h, зовнішній радіус b, а внутрішній a.

***Задача* 201°.** Куля радіуса R.

***Задача* 202°.** Половина кулі радіуса R.

***Задача* 203°.** Сфера радіуса R (маса розподілена по поверхні).

***Задача* 204°.** Порожня куля, зовнішній радіус якої b, а внутрішній a.

***Задача* 205°.** Конус висоти h з радіусом основи R.

***Задача* 206°.** Тривісний еліпсоїд з півосями a, b, c.

***Задача* 207.** Тор, середній радіус якого R, а радіус поперечного перерізу a.

***Задача* 208.** Пряма правильна трикутна призми з висотою h і стороною основи a.

***Задача* 209.** Пряма правильна шестикутна призма з висотою h і стороною основи a.

***Задача* 210°.** Вивести кінематичні рівняння Ейлера для стандартної послідовності поворотів zxz для компонент ω_α та ω'_α. Записати кінетичну енергію АТТ у головній системі координат.

***Задача* 211°.** Нехай кути Ейлера рівні ψ, θ, φ. Знайти значення кутів Ейлера, якщо рухому систему координат вважати нерухомою, а нерухому — рухомою?

***Задача* 212°.** Виразити узагальнені імпульси, що відповідають трьом кутам Ейлера, через кутові швидкості обертання.

***Задача* 213.** Вивести кінематичні рівняння Ейлера для послідовності поворотів zyz для компонент ω_α та ω'_α (поворот навколо осі y виконується у від'ємному напрямку). Записати кінетичну енергію АТТ у головній системі координат.

***Задача* 214.** Вивести кінематичні рівняння Ейлера для послідовності поворотів xyz для компонент ω_α та ω'_α. Записати кінетичну енергію АТТ у головній системі координат.

➠ *У задачах 215–248 побудувати функцію Лагранжа до вказаної механічної системи, записати рівняння руху, виконати аналіз інтегровності у квадратурах. У випадку існування положення рівноваги для системи з однією ступінню вільності знайти частоту малих коливань (вказано у задачі). Основні параметри системи вказані на рисунках.*

Всі маятники вважаються негнучкими, нерозтяжними та невагомими. Пружини — негнучкі та невагомі, параметри пружин k, a означають жорсткість та довжину у недеформованому стані відповідно. Всі необхідні для розв'язку геометричні параметри та моменти інерції вважаються відомими.

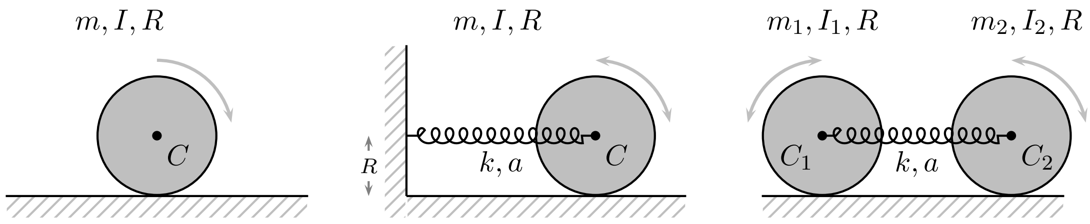
***Задача* 215°.** Циліндр котиться без проковзування по горизонтальній площині (рис. 2.4).

***Задача* 216°.** Розв'язати задачу 215, якщо площина нахилена на кут α до горизонту (врахувати силу тяжіння). Знайти закон руху циліндра.

***Задача* 217*.** Розв'язати задачу 215 для випадку, коли переріз циліндра еліптичний. Знайти частоту малих коливань.

***Задача* 218*.** Дослідити рух однорідного диску по горизонтальній площині у полі сили тяжіння (без проковзування). За яких умов рух вздовж прямої лінії є стійким?

***Задача* 219°.** Циліндр котиться без проковзування по горизонтальній площині, його центр мас з'єднаний пружиною з нерухомою точкою (рис. 2.4). Пружина під час руху лишається горизонтальною. Знайти частоту малих коливань.



до задачі 215 *до задачі 219* *до задачі 220*

Рис. 2.13. *До задач 215–220.*

***Задача* 220°.** Циліндри з однаковими радіусами котяться без проковзування по горизонтальній площині, їх центри мас з'єднані пружиною (рис. 2.4).

***Задача* 221°.** Порожній циліндр маси M котиться без проковзування по горизонтальній площині. На його внутрішній поверхні перебуває частинка маси m (рис. 2.4). Розглянути випадки:

1) частинка вільно ковзає по внутрішній поверхні;
2) частинка жорстко приєднана до циліндра. Знайти положення центру мас такої системи та частоту малих коливань.

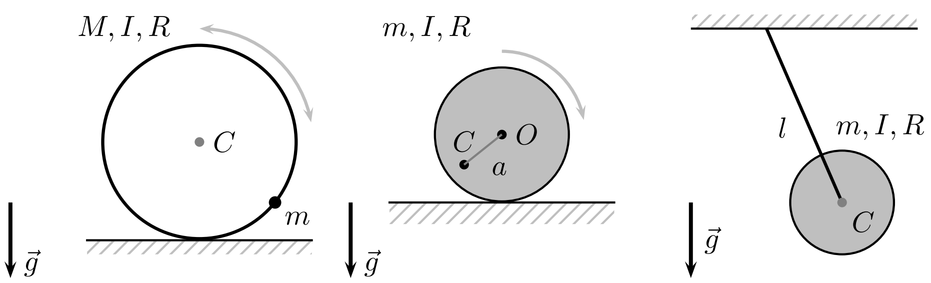
***Задача* 222°.** Циліндр зі зміщеним центром мас котиться без проковзування по горизонтальній площині (рис. 2.4). Знайти частоту малих коливань.

***Задача* 223.** Розв'язати задачу 222 для випадку, коли циліндр котиться по похилій площині, нахиленої до горизонталі на кут α. Знайти умови існування положення рівноваги та частоту малих коливань.

***Задача* 224°.** Циліндр приєднано до стержня довжини l (рис. 2.4). Розглянути випадки:

1) з'єднання шарнірне (циліндр може обертатись без тертя);
2) з'єднання жорстке.

Знайти частоти малих коливань для кожного з випадків.



до задачі 221 *до задачі 222* *до задачі 224*

Рис. 2.14. *До задач 221–224.*

***Задача* 225°.** До циліндра, що котиться без проковзування по горизонтальній площині, приєднано маятник довжини l з частинкою маси m. (рис. 2.4).

***Задача* 226°.** До циліндра, що котиться без проковзування по горизонтальній площині, приєднано маятник довжини l з частинкою маси m. (рис. 2.4). Центр мас циліндра з'єднано пружиною з нерухомою точкою (пружина під час руху залишається горизонтальною).

***Задача* 227°.** До циліндра, що котиться без проковзування по горизонтальній площині, приєднано пружину з частинкою маси m. (рис. 2.4).

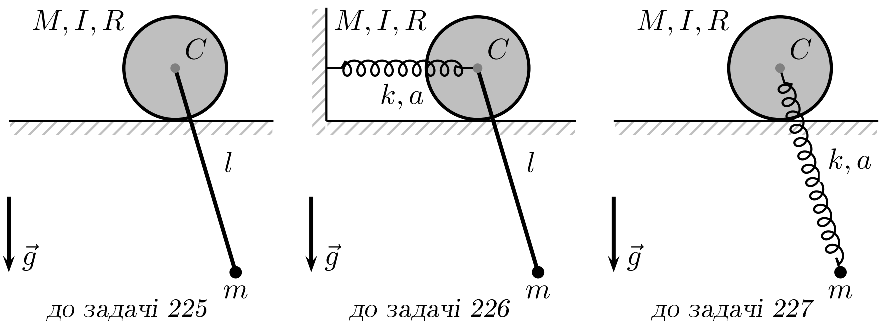


Рис. 2.15. *До задач 225–227.*

***Задача* 228°.** Циліндр котиться без проковзування по поверхні клина, що ковзає по похилій площині (рис. 2.4).

***Задача* 229°.** Циліндр котиться без проковзування по поверхні нерухомого циліндра. (рис. 2.4).

***Задача* 230°.** Циліндр котиться без проковзування по поверхні чашки з циліндричним перерізом, що ковзає по похилій площині (рис. 2.4).

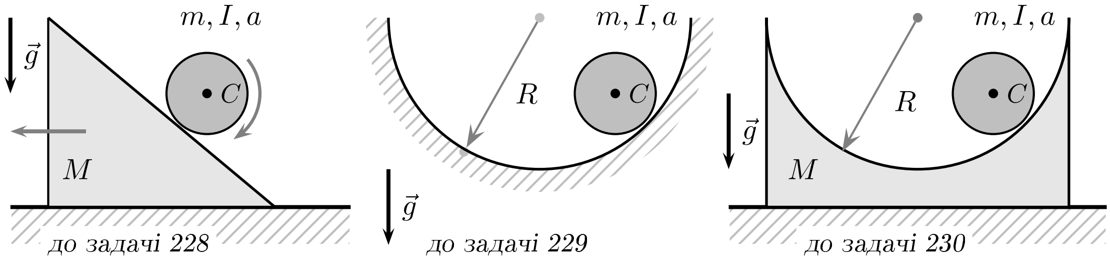


Рис. 2.16. *До задач 228–230.*

***Задача* 231°.** Однорідний стержень ковзає по поверхні циліндра. (рис. 2.4).

***Задача* 232°.** Розв'язати задачу 231 для випадку, коли густина стержня лінійно залежить від відстані до одного із його кінців.

***Задача* 233°.** Кінець стержня приєднано до нитки. (рис. 2.4).

***Задача* 234°.** Кінець стержня приєднано до пружини. (рис. 2.4).

***Задача* 235.** Тонкий однорідний стержень з довжиною l та масою m зігнуто у вигляді прямого кута і підвішено на горизонтально розташованій осі. Записати функцію Лагранжа плоскопаралельного руху такого стержня. Визначити частоту лінійних коливань.

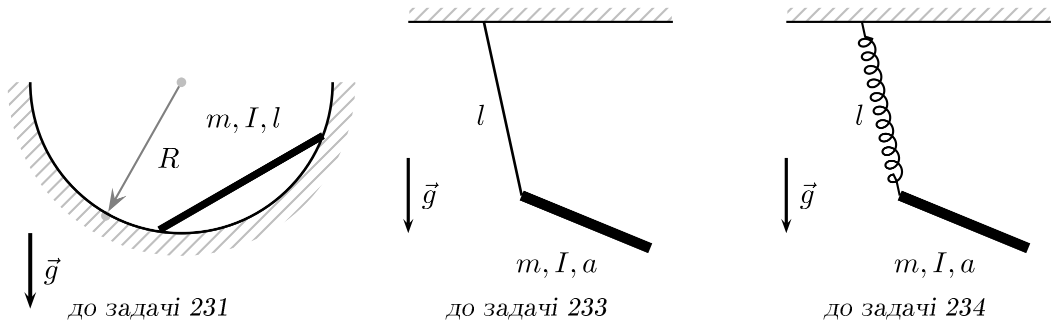


Рис. 2.17. *До задач 231–234.*

***Задача* 236.** Однорідний стержень ковзає по циліндричній поверхні з параболічним перерізом у полі сили тяжіння. Рух вважати плоским. Знайти положення рівноваги та частоти малих коливань (рис. 2.4).

***Задача* 237.** Циліндр котиться по циліндричній поверхні з параболічним перерізом у полі сили тяжіння. Рух вважати плоским. Знайти положення рівноваги та частоти малих коливань (рис. 2.4).

***Задача* 238.** Циліндр котиться по циліндричній поверхні з параболічним перерізом у полі сили тяжіння, поверхня ковзає по горизонтальній площині. Рух вважати плоским (рис. 2.4).

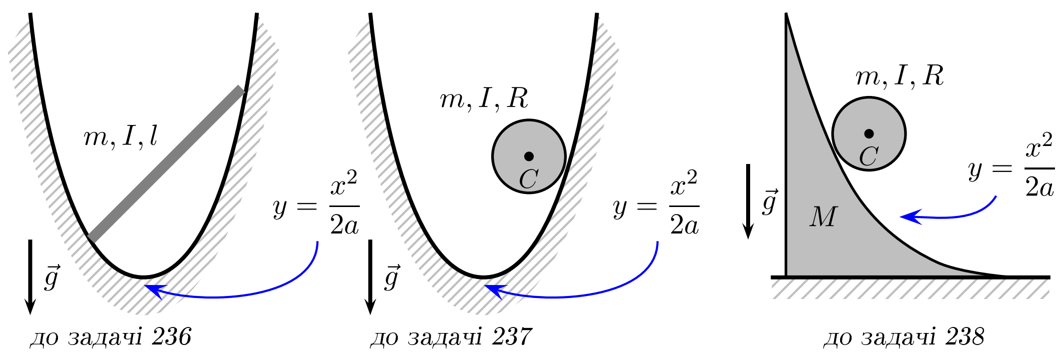


Рис. 2.18. *До задач 236–238.*

***Задача* 239.** Циліндр котиться по внутрішній поверхні іншого циліндра по у полі сили тяжіння. Зовнішній циліндр котиться по горизонтальній площині. Рух вважати плоским (рис. 2.4).

***Задача* 240.** Циліндр, на який намотано невагому нитку падає у полі сили тяжіння. Вільний кінець нитки закріплено у нерухомій точці. Рух вважати плоским (рис. 2.4).

***Задача* 241.** Циліндр, на який намотано невагому нитку котиться по горизонтальній площині у полі сили тяжіння. До вільного кінця нитки приєднано частинку. Рух вважати плоским (рис. 2.4).

***Задача* 242.** Розв'язати задачу 241, якщо зовнішній радіус циліндра b, а внутрішній, на який намотано нитку — a ("котушка").

***Задача* 243.** Розв'язати задачу 241, рух циліндра відбувається як у задачі 224 (центр мас приєднано на маятнику).

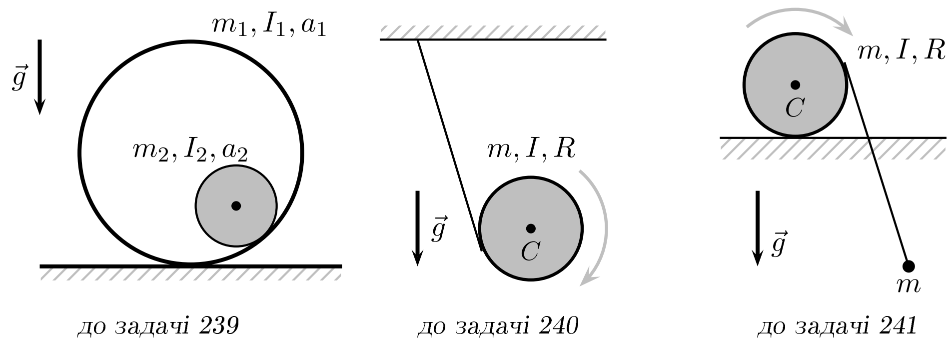


Рис. 2.19. *До задач 239–241.*

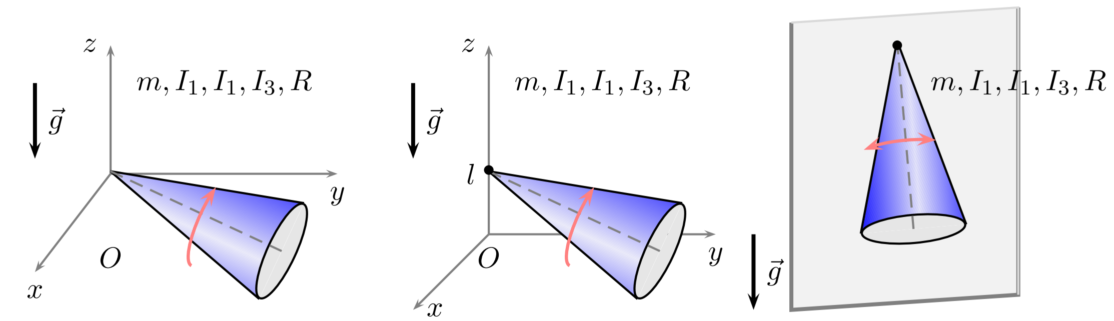
***Задача* 244.** Однорідний конус (радіус основи R, кут розхилу α) котиться без проковзування по горизонтальній площині. Положення центра мас (на відстані a від вістря) та моменти інерції вважати відомими (рис. 2.4).

***Задача* 245.** Розв'язати задачу 244, якщо площина нахилена до горизонту. Дослідити малі коливання у такій системі.

***Задача* 246*.** Розв'язати задачу 244, якщо переріз конуса еліптичний. Дослідити малі коливання у такій системі.

***Задача* 247.** Однорідний конус (радіус основи R, кут розхилу α) котиться без проковзування по горизонтальній площині, вістря закріплено на висоті l над площиною. Положення центра мас (на відстані a від вістря) та моменти інерції вважати відомими (рис. 2.4).

***Задача* 248.** Вістря однорідного конуса (радіус основи R, кут розхилу α) закріплено у нерухомій точці вертикальної площини, кочення відбувається без проковзування.



до задачі 244 *до задачі 247* *до задачі 248*

Рис. 2.20. *До задач 244–248.*

Положення центра мас (на відстані a від вістря) та моменти інерції вважати відомими (рис. 2.4). Дослідити малі коливання у такій системі.

***Задача* 249.** Знайти частоту малих коливань однорідного прямокутного паралелепіпеда з розмірами $a \times b \times c$, підвішеного за центр основи $a \times b$.

***Задача* 250.** Тонкий прямий однорідний стержень довжини l і маси m обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить через один із його кінців, описуючи при цьому конічну поверхню. Знайти кут α відхилення стержня від вертикалі.

***Задача* 251.** Однорідне кільце радіуса R і маси m одночасно обертається навколо своєї осі та навколо вертикального діаметра з постійними кутовими швидкостями ω_1 і ω_2, відповідно. Знайти момент сил, які діють на кільце.

***Задача* 252.** Прямий однорідний циліндр маси m, довжини l і радіуса r обертається з постійною кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі Oz, що проходить через його центр мас. Кут між віссю симетрії циліндра та віссю Oz сталий і рівний α, а відстань між підшипником і підп'ятником дорівнює h. Визначити силу бічного тиску на підшипник та підп'ятник.

***Задача* 253.** Тонкий диск радіуса r і маси m без проковзування котиться по горизонтальній поверхні по колу радіуса R. Знайти залежність кута нахилу диска від швидкості руху його центра мас.

***Задача* 254.** Проінтегрувати рівняння руху симетричної дзиґи, вздовж осі симетрії якої прикладений сталий момент зовнішніх сил $\vec{N}$ (рівнодійна всіх зовнішніх сил рівна нулю).

***Задача* 255.** Записати рівняння руху важкої симетричної дзиґи (випадок Лагранжа) у формі рівнянь Ейлера.

***Задача* 256*.** Дослідити рух важкої симетричної дзиґи в однорідному полі сили тяжіння (випадок Лагранжа).

***Задача* 257*.** Дослідити рух "швидкого" симетричного гіроскопу із закріпленою точкою (кінетична енергія — велика порівняно з потенціальною).

***Задача* 258.** Дослідити регулярну прецесію симетричного гіроскопу із закріпленою точкою та визначити умови, за яких такий рух реалізується.

***Задача* 259.** Дослідити рух симетричного гіроскопу із закріпленою точкою при таких умовах, що у початковий момент часу вісь гіроскопу опускається вертикально вниз.

***Задача* 260*.** Кінці однорідного стержня ковзають по циліндричній поверхні у вертикальній площині. Вздовж стержня повзе комаха, маса якої дорівнює масі стержня, із сталою швидкістю (відносно нього). Знайти закон руху стержня (силу тяжіння не враховувати).

***Задача* 261*.** Куля радіуса R обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі, нахиленої під кутом α до вертикалі і рухається із швидкістю v. Знайти закон зміни напрямку швидкості при її ударі об абсолютно шорстку горизонтальну поверхню.

2.5. Малі коливання

Системи з кількома ступенями вільності

Для дослідження малих коливань у квадратичному наближенні можна скористатись такою послідовністю дій:

1) побудувати функцію Лагранжа $L(q, \dot{q})$ (якщо вона не задана);

2) знайти положення рівноваги із системи рівнянь

$$\frac{\partial U(q)}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_i = q_{i0} = \mathrm{const}\,,$$

якщо розв'язків кілька, то вибрати стійке положення, яке відповідає мінімуму U;

3) ввести відносні координати ξ_i за правилом $q_i(t) = q_{i0} + \xi_i(t)$.
Розкласти функцію Лагранжа у ряд Тейлора до другого порядку по ξ:

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2}\, m_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \frac{1}{2}\, k_{ij}\xi_i\xi_j\,.$$

Якщо квадратичне наближення некоректне, то розв'язок даним способом побудувати не можна;

4) з виразу функції Лагранжа $L(\xi, \dot{\xi})$ знайти матриці $\mathbf{M}$ та $\mathbf{K}$, записати характеристичне рівняння

$$\det|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0\,,$$

знайти частоти коливань ω_α, $\alpha = \overline{1, n}$;

5) знайти амплітуди коливань (з точністю до множників) з рівнянь

$$\mathbf{K}\mathbf{A}^{(\alpha)} = \omega_\alpha^2\mathbf{M}\mathbf{A}^{(\alpha)}$$

для кожної частоти. На цьому етапі визначаються не скільки амплітуди, стільки загальні амплітудно-фазові характеристики;

6) записати загальний розв'язок

$$\xi_i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_i^{(\alpha)} e^{i\omega_\alpha t}$$

і підставити початкові умови (якщо їх задано);

7) якісно проаналізувати характер коливань системи для кожної моди, взятої окремо.

***Задача* 262°.** Знайти вільні коливання системи, функція Лагранжа якої

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2)\,.$$

Як виглядає траєкторія точки в декартових координатах (x, y)?

***Задача* 263°.** Знайти нормальні коливання системи, функція Лагранжа якої:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) + \alpha xy\,.$$

***Задача* 264°.** Знайти нормальні коливання системи, функція Лагранжа якої:

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 + m_2\dot{y}^2) + \beta\dot{x}\dot{y} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,.$$

***Задача* 265*.** Матеріальна точка рухається по кривій, яка обертається навколо вертикальної осі із заданою кутовою швидкістю. Потенціальна енергія точки $U(s)$ залежить тільки від відстані, яка відкладається вздовж кривої. Знайти частоту малих коливань частинки у околі положення рівноваги, вважаючи, що воно існує.

➠ *У задачах 266–266 дослідити малі коливання та амплітудно-фазові характеристики. Знайти нормальні координати.*

***Задача* 266°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рух відбувається у полі сили тяжіння (рис. 2.5).

***Задача* 267°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами між собою та з нерухомими стінками, рух відбувається у полі сили тяжіння (рис. 2.5).

***Задача* 268°.** Частинки з'єднані пружинами між собою та з нерухомою стінкою, розглянути випадки 1) $m_1 = m_2$, $k_1 = k_3$; 2) $k_1 = k_2 = k_3$. Дослідити граничні випадки $m_1 \gg m_2$, $k_1 \ll k_2$ та $k_1 \gg k_2$ (рис. 2.5).

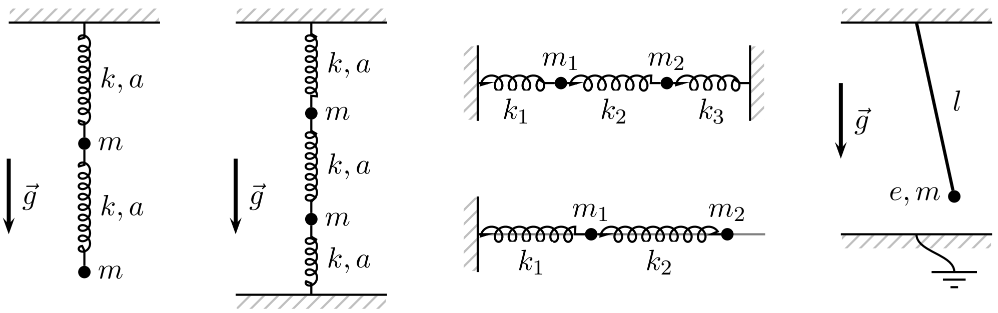
***Задача* 269°.** Частинки з'єднані пружинами між собою та з нерухомими стінками, розглянути випадки 1) $m_1 = m_2$, $k_1 = k_3$; 2) $k_1 = k_2 = k_3$. Дослідити граничні випадки $m_1 \gg m_2$, $k_1 \ll k_2$ та $k_1 \gg k_2$ (рис. 2.5).

***Задача* 270.** Частинка маси m та заряду e приєднана до математичного маятника довжини l, рух відбувається над заземленою площиною, що розташована на відстані a від точки кріплення маятника. Знайти частоту малих коливань такої системи.

***Задача* 271.** Розв'язати задачу 270, якщо маятник замінено на пружину.

***Задача* 272°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рухаються по колу (рис. 2.5).

***Задача* 273.** Розв'язати задачу (272) для випадку різних мас та коефіцієнтів пружності. Визначити умови, коли відбувається виродження частот. (рис. 2.5).

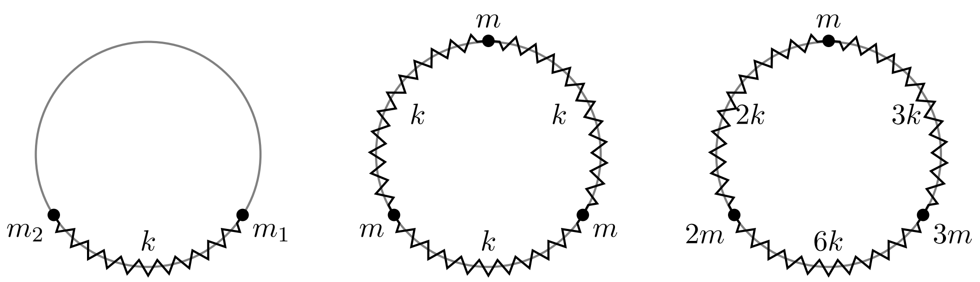


до задачі 266 *до задачі 267* *до задач 268–269* *до задачі 270*

Рис. 2.21. *До задач 266–270.*

***Задача* 274°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рухаються по колу (рис. 2.5).

***Задача* 275°.** Частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. 2.5).



до задачі 272 *до задачі 274* *до задачі 275*

Рис. 2.22. *До задач 272–275.*

***Задача* 276°.** Однакові частинки з'єднані однаковими пружинами, рухаються по колу (рис. 2.5).

***Задача* 277°.** Частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. 2.5).

***Задача* 278°.** Частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. 2.5).

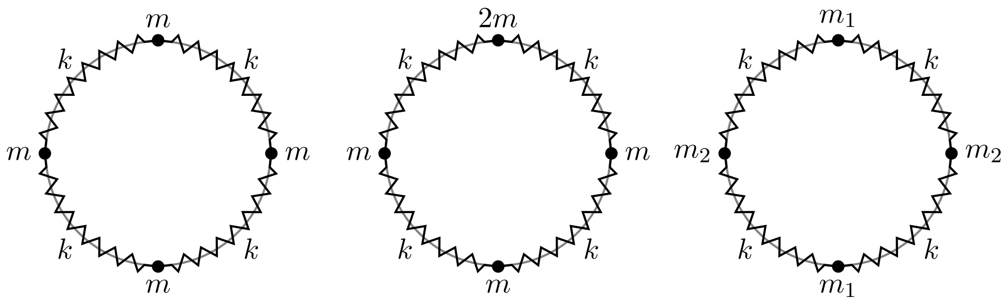
***Задача* 279°.** Дві частинки з'єднані пружиною, рухаються по колу у полі сили тяжіння (рис. 2.5).

***Задача* 280.** Три частинки з'єднані пружинами, рухаються по колу (рис. 2.5).

***Задача* 281.** Три однакові маятники з'єднані пружинами (рис. 2.5). Розглянути спочатку спрощену версію з двома маятниками.

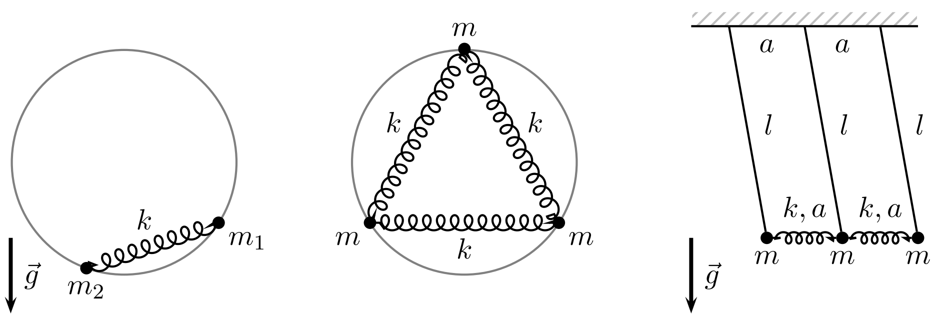
➠ *У задачах* **??–??** *(використовуючи раніше побудовану функцію Лагранжа) дослідити малі коливання та амплітудно-фазові характеристики. Знайти нормальні координати.*

***Задача* 282°.** Див. задачу 147.



до задачі 276 *до задачі 277* *до задачі 278*

Рис. 2.23. *До задач 276–278.*



до задачі 279 *до задачі 280* *до задачі 281*

Рис. 2.24. *До задач 279–281.*

***Задача* 283°.** Див. задачу 157.

***Задача* 284°.** Див. задачу 160 (всі маси вважати однаковими).

***Задача* 285°.** Див. задачу 164 (довжини маятників вважати однаковими).

***Задача* 286°.** Див. задачу 165.

***Задача* 287°.** Див. задачу 169.

***Задача* 288°.** Див. задачу 226.

***Задача* 289°.** Див. задачу 233.

***Задача* 290°.** Див. задачу 234.

Задача* 291.** Дослідити малі коливання циліндра довільного перерізу, який котиться без проковзування у полі сили тяжіння по зовнішній поверхні іншого циліндра.

***Задача* 292°.** Визначити власні частоти коливань лінійної симетричної трьохатомної молекули ABA (рис. 2.5). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней $A - B$ і $B - A$ та від величини кута ABA.

***Задача* 293.** Визначити власні частоти коливань лінійної несиметричної трьохатомної молекули AB (рис. до задачі 292, маси та відстані різні). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней $A-B$ і $B-C$ та від величини кута ABC.

***Задача* 294.** Визначити власні частоти коливань лінійної симетричної чотириатомної молекули $ABBA$ (рис. 2.5). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней $A-B$, $B-B$ і $B-A$ та від величин кутів ABB та BBA.

***Задача* 295.** Визначити власні частоти коливань плоскої симетричної трьохатомної молекули A_2B (рис. 2.5). Вважати, що потенціальна енергія молекули залежить тільки від відстаней $A-B$ і $B-A$ та від величини кута ABA.

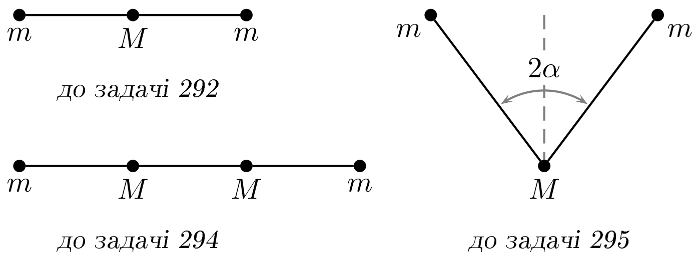


Рис. 2.25. *До задач 292–295.*

Лінійні ланцюжки

***Задача* 296°.** Дослідити коливання лінійного одночастинкового ланцюжка з N однакових частинок (рис. 2.5). Розглянути різні типі граничних умов:

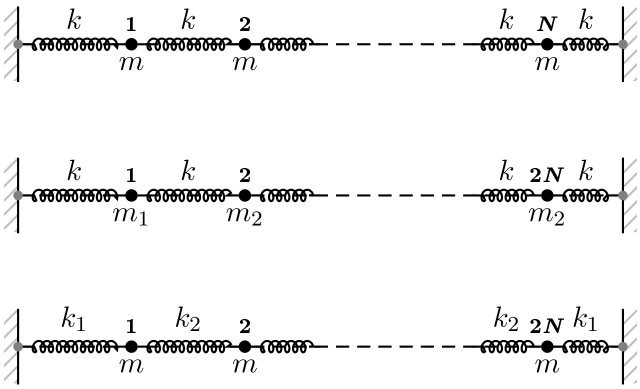
1) ланцюжок жорстко закріплений на обох кінцях;
2) один з кінців ланцюжка — вільний;
3) кінці ланцюжка з'єднані (коло).

***Задача* 297.** Розглянути граничний перехід до континуального випадку у задачі 296 (струна).

***Задача* 298.** Дослідити коливання лінійного двочастинкового ланцюжка з $2N$ частинок (рис. 2.5).

***Задача* 299.** Дослідити коливання лінійного двочастинкового ланцюжка з $2N$ частинок (рис. 2.5).

***Задача* 300.** Дослідити коливання ланцюжка з N однакових маятників, з'єднаних пружинами (рис. 2.5). Рух відбувається у полі сили тяжіння.



до задачі *296*

до задачі *298*

до задачі *299*

Рис. 2.26. *До задач 296–299.*

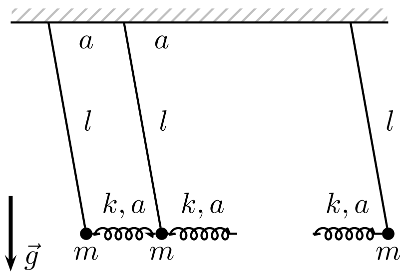


Рис. 2.27. *До задачі 300.*

Нелінійні коливання

➠ *У задачах 301–303 Методами Ляпунова-Пуанкаре та Боголюбова-Крилова дослідити коливання нелінійного осцилятора з функцією Лагранжа* $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} - \delta U$.

***Задача* 301°.** $\delta U = \dfrac{\alpha m x^3}{3}$, α — малий параметр.

***Задача* 302°.** $\delta U = \dfrac{\beta m x^4}{4}$, β — малий параметр.

***Задача* 303°.** $\delta U = \dfrac{\alpha x \dot{x}^2}{2}$, α — малий параметр.

***Задача* 304.** Методом усереднення дослідити рух осцилятора Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \dot{x}\,, \quad \varepsilon > 0\,.$$

***Задача* 305*.** Методом усереднення дослідити рух нелінійного осцилятора із загасанням у полі зовнішньої сили

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t - \varepsilon x^3\,.$$

в околі резонансу $\omega \simeq \omega_0$. Дослідити умови, за яких існує область багатозначних амплітуд.

***Задача* 306.** Дослідити резонанс на частоті $\omega = \omega_0/2$ у задачі 305.

***Задача* 307*.** Методом Боголюбова-Крилова дослідити рух нелінійного осцилятора із загасанням у полі зовнішньої сили

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t - \varepsilon x^3\,.$$

в околі резонансу $\omega \simeq \omega_0$.

***Задача* 308*.** Методом усереднення дослідити параметричний резонанс для нелінійного осцилятора із загасанням на частоті $\omega \simeq \omega_0$:

$$\ddot{x} + \omega^2(t) x = -2\beta\dot{x} - \varepsilon x^3\,, \quad \omega^2(t) = \omega_0^2(1 + \alpha \sin 2\omega t)\,,$$

де α, β, ε — малі величини.

Розділ 3

Механіка Гамільтона

3.1. Перетворення Лежандра, рівняння Гамільтона

Перетворення Лежандра для функції $y = f(x)$ полягає у заміні аргументу та функції за правилом

$$y = f(x)\,, \quad \alpha := f'(x) \longrightarrow \hat{f}(\alpha) = \alpha x(\alpha) - f(x(\alpha))\,.$$

Функція Гамільтона зв'язана з функцією Лагранжа так:

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)\,,$$

де у правій частині всі узагальнені швидкості $\dot{q}_i$ слід замінити на узагальнені імпульси p_i згідно формули $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Канонічні рівняння Гамільтона мають вигляд

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\,, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad i = \overline{1, n}$$

і утворюють систему $2n$ звичайних диференційних рівнянь першого порядку.

➠ *У задачах 309–310 Знайти перетворення Лежандра для вказаних функцій.*

***Задача* 309°.** $f(x) = \frac{1}{a}x^a$, де $a > 1$.

***Задача* 310°.** $f(x) = -\sqrt{1 + x^2}$.

➠ *У задачах 312–314 Побудувати функцію Гамільтона, знайти інтеграли руху та фазову траєкторію для вказаних механічних систем.*

***Задача* 311°.** Вільна частинка маси m у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

***Задача* 312°.** Вільна частинка маси m у декартових, циліндричних та сферичних координатах.

***Задача* 313°.** Частинка з масою m і зарядом e в однорідному стаціонарному електричному полі $\vec{E}$.

***Задача* 314°.** Частинка з масою m і зарядом e в однорідному стаціонарному магнітному полі $\vec{H}$ у декартових, циліндричних та сферичних координатах. У випадку декартових координат вибрати $\vec{A} = Hx\vec{e}_y$.

➠ *У задачах 315–325 побудувати функцію Гамільтона, записати рівняння Лагранжа та Гамільтона, знайти закон руху (якщо це можливо) для систем із заданими функціями Лагранжа.*

***Задача* 315°.** $L(x,\dot x) = \dfrac{1}{2}\, g(x)\dot x^2 + v(x)\dot x - U(x)$.

***Задача* 316°.** $L(x,\dot x) = \dfrac{1}{2}\, g_{ij}(x)\dot x^i \dot x^j + v_i(x)\dot x^i - U(x)$, де $i,j=\overline{1,n}$.

***Задача* 317°.** $L(\vec r,\dot{\vec r}) = \dfrac{m\dot{\vec r}^{\,2}}{2} + m\dot{\vec r}[\vec\omega\times\vec r] + \dfrac{m}{2}\,[\vec\omega\times\vec r]^2 - U(\vec r)$.

***Задача* 318°.** $L(x,\dot x) = \dfrac{m\dot x^2}{2} - \dfrac{kx^2}{2}$.

***Задача* 319°.** $L(x,\dot x) = \dfrac{m\dot x^2}{2}\,(1+\alpha x) - \dfrac{kx^2}{2}$.

***Задача* 320°.** $L(x,\dot x) = \dfrac{m\dot x^2}{2} + \dfrac{kx^2}{2} + \dfrac{\alpha x\dot x^2}{2} - \beta x^3$.

***Задача* 321°.** $L(\vec r,\dot{\vec r}) = -mc^2\sqrt{1-\dot{\vec r}^{\,2}/c^2}$. Записати вираз для енергії, розглянути частинний випадок $m=0$.

***Задача* 322°.** $L(x,y,\dot x,\dot y) = \dfrac{m_1\dot x^2}{2} + \dfrac{m_2\dot y^2}{2} - \dfrac{k_1x^2}{2} - \dfrac{k_2y^2}{2} - \alpha\dot x\dot y$.

***Задача* 323°.** $L(x_1,x_2,\dot x_1,\dot x_2) = \dot x_1\dot x_2 - \dfrac{1}{2}\,\dot x_1^2 t$.

***Задача* 324°.** $L(x_1,x_2,\dot x_1,\dot x_2) = \dfrac{1}{2}(1+2x_1)\dot x_1^2 + \dfrac{1}{2}\,\dot x_2^2 + x_2^2\dot x_1$.

***Задача* 325°.** $L(\varphi,\dot\varphi) = \dfrac{1}{2}\,\dot\varphi^2 - \omega^2\,(1-\cos\varphi)$, ввести узагальнену координату $\xi = 2\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

***Задача* 326.** Побудувати перетворення Лежандра функції Лагранжа по координатах, та записати відповідні загальні рівняння руху. Для прикладу розглянути системи з задач 318 та 322.

***Задача* 327.** Побудувати перетворення Лежандра функції Лагранжа по координатах та швидкостях, та записати відповідні загальні рівняння руху. Для прикладу розглянути системи з задач 318 та 322.

***Задача* 328°.** Побудувати функцію Гамільтона для задачі двох тіл з потенціалом взаємодії $U(|\vec r_1-\vec r_2|)$, беручи за узагальнені координати радіус-вектор $\vec R = \frac{m_1\vec r_1+m_2\vec r_2}{m_1+m_2}$ центру мас системи та відносну координату $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$. Розв'язати в квадратурах канонічні рівняння Гамільтона в сферичній системі координат.

➟ *У задачах 329–336 за функцією Гамільтона побудувати (якщо це можливо) функцію Лагранжа та записати рівняння руху.*

***Задача* 329°.** $H(\vec r,\vec p) = \frac{\vec p^{\,2}}{2m} - \vec a\vec p, \quad \vec a = \mathrm{const}$.

***Задача* 330°.** $H(\vec{r},\vec{p}) = \vec{p}\cdot\vec{f}(\vec{r})$.

***Задача* 331°.** $H(\vec{r},\vec{p}) = p_1^2 + p_1 p_2$.

***Задача* 332°.** $H(\vec{r},\vec{p}) = c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$.

***Задача* 333°.** $H(q,p) = \dfrac{p_1^2}{2q_2^2} + \dfrac{p_2^2}{2q_3^2} + \dfrac{p_3^2}{2q_1^2} + q_1q_2q_3$.

***Задача* 334°.** $H(x,p) = -i\omega xp$.

***Задача* 335°.** $H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{c|\vec{p}|}{ar}$.

***Задача* 336°.** $H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{c|\vec{p}|}{n(\vec{r},\vec{p})}$.

***Задача* 337°.** Знайти інтеграли руху, записати і розв'язати рівняння руху для системи з функцією Гамільтона $H(q,p) = -i\omega pq$. Якій системі може відповідати така функція Гамільтона?

➠ *У задачах 339–340 записати рівняння Гамільтона для частинки маси m, що рухається по заданій поверхні у полі сили тяжіння (вважати $\vec{g} = -g\vec{e}_z$).*

***Задача* 338°.** Параболоїд $x^2 + y^2 = az$. Використати циліндричні координати.

***Задача* 339°.** Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2(t)$ ($R(t)$ — задана функція часу).

***Задача* 340°.** Поверхня конуса з кутом розхилу α (z — вісь симетрії). Використати сферичні координати.

***Задача* 341.** Задана механічна система з гамільтоніаном

$$H(x_1,x_2,p_1,p_2) = \frac{1}{2}\left(p_1^2x_1^4 + p_2^2x_2^2\right) - \alpha x_1\,.$$

Знайти залежність $x_1(x_2)$, використовуючи інтеграл енергії.

➠ *У задачах 342–345 Розв'язати рівняння Гамільтона для вказаних механічних систем.*

***Задача* 342.** $H(x,p) = p^2 + \dfrac{1}{x^2}$, де $x(0) = 1$, $p(0) = 0$.

***Задача* 343.** $H(x,p) = \dfrac{1}{4}p^2x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, де $x(0) = 1$, $p(0) = 0$.

***Задача* 344.** $H(x_1,x_2,p_1,p_2) = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2} + x_1$, де $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 1$.

***Задача* 345.** $H(x_1,x_2,p_1,p_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2 - p_1^2 - p_2^2}} - x_1$, де $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$.

***Задача* 346.** Задана механічна система з функцією Гамільтона $H(\vec{r},\vec{p}) = \dfrac{c|\vec{p}\,|}{n(\vec{r}\,)}$, де $n(\vec{r}\,) = a|\vec{r}\,|$. У сферичних координатах, використовуючи інтеграл енергії, знайти рівняння траєкторії (залежності $r(\varphi)$, $r(\theta)$) системи та залежності координат від часу.

***Задача* 347.** Знайти закон руху системи з функцією Гамільтона

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega_0 x^2\right) + \frac{\alpha}{4}\left(p^2 + \omega_0 x^2\right)^2 .$$

***Задача* 348.** Знайти закон руху частинки з масою m та зарядом e в однорідному стаціонарному магнітному полі $\vec{H}$ методом Гамільтона.

***Задача* 349.** Побудувати функцію та Гамільтона для зарядженого гармонічного осцилятора в однорідному стаціонарному магнітному полі $\vec{H}$ та знайти закон руху.

***Задача* 350.** Побудувати функцію Гамільтона для дзиги з нерухомою точкою опори.

3.2. Дужки Пуассона

Означення дужок Пуассона для функцій динамічних змінних $A(q,p,t)$, $B(q,p,t)$:

$$[A,B] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p_i}\right) .$$

Необхідна і достатня умова того, що функція $f(p,q,t)$, є інтегралом руху механічної системи запишеться так

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f,H] = 0\,.$$

***Задача* 351°.** Обчислити дужки Пуассона:

$$1)\ [x_i, L_j]\,;\quad 2)\ [p_i, L_j]\,;\quad 3)\ [L_i, L_j]\,.$$

***Задача* 352°.** Обчислити дужки Пуассона:

$$1)\ \left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,),(\vec{b}\cdot\vec{p}\,)\right];\quad 2)\ \left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,),(\vec{b}\cdot\vec{L}\,)\right];\quad 3)\ \left[(\vec{a}\cdot\vec{p}\,),(\vec{b}\cdot\vec{L}\,)\right];\quad 4)\ \left[(\vec{a}\cdot\vec{L}\,),(\vec{b}\cdot\vec{L}\,)\right],$$

де $\vec{a}$, $\vec{b}$ — сталі вектори.

***Задача* 353°.** Обчислити дужки Пуассона:

$$1)\ \left[\vec{L},(\vec{r}\cdot\vec{p}\,)\right];\quad 2)\ \left[\vec{r},(\vec{r}\cdot\vec{p}\,)\right];\quad 3)\ \left[\vec{p},(\vec{r}\cdot\vec{p}\,)\right];\quad 4)\ \left[r^n,\vec{p}\,\right];\quad 5)\ \left[(\vec{a}\cdot\vec{r}\,)^n,\vec{p}\,\right].$$

***Задача* 354.** Знайти: 1) $[\vec{L}, f(\vec{a}\cdot\vec{r})]$; 2) $[\vec{L}, f(\vec{a}\cdot\vec{p})]$; 3) $[\vec{L}, \vec{a}\cdot(\vec{r}\times\vec{L})]$.

***Задача* 355.** Показати, що $[\varphi, L_z] = 0$, де φ — довільна скалярна функція координат та імпульсу частинки.

***Задача* 356.** Показати, що $\left[\vec{f}, L_z\right] = \vec{e}_z \times \vec{f}$, де $\vec{f}$ — довільна векторна функція координат та імпульсу частинки, $\vec{e}_z$ — орт у напрямку осі z.

***Задача* 357.** Обчислити дужки Пуассона $\left[A_i, A_j\right]$, якщо

$$A_1 = \frac{1}{4}\left(x^2 + p_x^2 - y^2 - p_y^2\right), \quad A_2 = \frac{1}{2}\left(xy + p_x p_y\right),$$
$$A_3 = \frac{1}{2}\left(xp_y - yp_x\right), \qquad A_4 = x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2 .$$

***Задача* 358.** Обчислити дужки Пуассона $[\vec{L}, \Lambda_{ij}]$, $[\Lambda_{ij}, \Lambda_{kl}]$, де $\Lambda_{ij} = x_i x_j + p_i p_j$.

***Задача* 359°.** Для гармонічного осцилятора з масою m та частотою ω обчислити дужки Пуассона $[a, a^*]$, де

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}}\, e^{i\omega t} .$$

***Задача* 360.** Обчислити дужки Пуассона $[v_i, v_j]$ (швидкостей) для частинки в магнітному полі.

***Задача* 361.** Обчислити дужки Пуассона $\left[H, p_x\right]$, $\left[H, \vec{r}\right]$, $\left[H, \vec{L}\right]$ для випадків:

$$1)\ H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}, \quad 2)\ H(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + U(r) .$$

***Задача* 362*.** Для частинки в полі $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ існує інтеграл руху $\vec{A} = \left[\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right] - \dfrac{\alpha\vec{r}}{r}$ (вектор Рунге-Ленца). Обчислити дужки Пуассона:

$$1)\ \left[A_i, A_j\right]; \quad 2)\ \left[A_i, L_j\right]; \quad 3)\ \left[x_i, A_j\right]; \quad 4)\ \left[p_i, A_j\right]; \quad 5)\ \left[H, \vec{A}\right].$$

***Задача* 363.** Використовуючи дужки Пуассона, показати, що для руху частинки у центрально-симетричному полі $U(r)$ зберігається її момент імпульсу.

***Задача* 364.** Перевірити, чи є функції $\varphi_1 = p_1^2 + q_2^2$, $\varphi_2 = p_2^2 + q_1^2$ та $\varphi_3 = [\varphi_1, \varphi_2]$ першими незалежними інтегралами механічної системи з функцією Гамільтона $H = p_1 p_2 + q_1 q_2$.

3.3. Канонічні перетворення

У незалежних змінних q_i і q_i' $(i = \overline{1,n})$ диференціал твірної функції $F(q_i, q_i', t)$ канонічного перетворення має вигляд

$$dF(q, q', t) = \sum_{i=1}^{f} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} p_i' dq_i' + (H'(q', p', t) - H(p, q, t))dt ,$$

звідки маємо

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad p_i' = -\frac{\partial F}{\partial q_i'}, \quad H'(q', p', t) = H(p, q, t) + \frac{\partial F}{\partial t} .$$

Для твірних функцій інших типів вирази аналогічні їх можна записати перестановками пар спряжених змінних (q_i та p_i) з одночасними змінами знаків правої частини.

***Задача* 365°.** Знайти канонічні перетворення, які описуються твірними функціями:

$$1)\ F(q,q') = q\,q'\,; \qquad 2)\ F(p,p') = p\,p'\,;$$
$$3)\ F(q,p') = q\,p'\,; \qquad 4)\ F(q',p) = -q'\,p\,;$$
$$5)\ F(q,p') = \sum_i \varphi_i(q)p'_i\,.$$

***Задача* 366°.** Знайти канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$1)\ F(x,p') = \frac{1}{2}\,x^2p'\,; \qquad 2)\ F(x,p') = x\sqrt{2p'}\,;$$
$$3)\ F(x,p') = x\ln p'\,; \qquad 4)\ F(x,p') = p'\ln x\,.$$

***Задача* 367°.** Знайти умову, за якої лінійне перетворення $Q = aq + bp$, $P = cq + dp$ змінних p і q буде канонічним, якщо a, b, c, d — сталі.

***Задача* 368°.** Знайти канонічне перетворення, яке задається твірною функцією $V(q,P,t) = qP + (bq - aP)t$, де a, b — сталі. Записати рівняння Гамільтона в нових змінних.

***Задача* 369°.** Знайти новий гамільтоніан вільної частинки та канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$1)\ V(\vec r,\vec r\,',t) = \frac{m}{2t}(\vec r - \vec r\,')^2\,; \quad 2)\ V(\vec r,\vec p\,',t) = \vec r\,\vec p\,' - \frac{\vec p\,'^2}{2m}\,t\,.$$

Розв'язати задачу в нових змінних.

***Задача* 370°.** Знайти новий гамільтоніан та канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$1)\ V(\vec r,\vec p\,',t) = \vec r\,\vec p\,' - \vec a\,\vec p\,'t + m\vec r\,\vec a\,; \quad 2)\ V(\vec r,\vec p\,',t) = \vec r\,\vec p\,' - \varphi(\vec r,t)\,.$$

***Задача* 371°.** Частинка маси m рухається в однорідному полі сили тяжіння. Знайти її новий гамільтоніан і канонічне перетворення породжене твірною функцією

$$F(\vec r,\vec p\,',t) = \vec r\,\vec p\,' + m\vec g\,\vec r\,t\,.$$

***Задача* 372°.** Знайти канонічні перетворення та новий гамільтоніан гармонічного осцилятора з масою m і частотою ω для таких твірних функцій:

$$1)\ F(x,p') = \frac{1}{2}\left[ip'^2 - im\omega x^2 + 2\sqrt{2m\omega}\,xp'\right]\,;$$
$$2)\ F(x,x') = -\frac{1}{2}\,m\omega x^2\ \mathrm{tg}\,x'\,;$$
$$3)\ F(x,x',t) = -\frac{1}{2}\,m\omega x^2\ \mathrm{tg}(x' + \omega t)\,;$$
$$4)\ F(x,x') = \alpha x^2\ \mathrm{ctg}\,x'$$

у випадку 4 підібрати зручне значення α.

***Задача* 373.** Знайти канонічне перетворення, яке задається твірною функцією $F(x, x', t) = \frac{1}{2} m\omega(t) x^2 \operatorname{ctg} x'$. Записати в змінних q' і p' рівняння руху гармонічного осцилятора з частотою $\omega(t)$.

***Задача* 374.** Знайти канонічне перетворення, яке задається твірною функцією

$$F(x, x', t) = \frac{1}{2} m\omega \left(x - \frac{F(t)}{m\omega^2} \right)^2 \operatorname{ctg} x'.$$

У змінних x' і p' записати рівняння руху гармонічного осцилятора під дією зовнішньої сили $F(t)$.

***Задача* 375.** Вияснити зміст канонічних перетворень, які задаються твірними функціями:
1) $V(\vec{r}, \vec{p}\,') = \vec{r} \cdot \vec{p}\,' + \delta\vec{a} \cdot \vec{p}\,'$;
2) $V(\vec{r}, \vec{p}\,') = \vec{r} \cdot \vec{p}\,' + \delta\vec{\varphi} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}\,')$;
3) $V(q, p', t) = qp' + \delta\tau\, H(q, p', t)$;
4) $V(\vec{r}, \vec{p}\,') = \vec{r} \cdot \vec{p}\,' + \delta\alpha\, (\vec{r}^{\,2} + \vec{p}\,'^2)$,
де $\vec{r}$ — радіус-вектор, $\delta\vec{a}$, $\delta\vec{\varphi}$, $\delta\tau$, $\delta\alpha$ — нескінченно малі параметри.

***Задача* 376.** Знайти канонічні перетворення, які задаються твірними функціями:

$$1)\ V(\vec{r}, \vec{p}\,') = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}\,'}{p'^2}; \quad 2)\ V(\vec{r}, \vec{p}\,') = \vec{r} \cdot \vec{p}\,' + \varepsilon(\vec{r}^{\,2} + \vec{p}\,'^2).$$

***Задача* 377.** Знайти твірну функцію виду $\bar{F}(p, x')$, яка приводить до такого самого канонічного перетворення, що і функція $F(x, p') = x^2 \exp(p')$.

***Задача* 378.** Показати, що для системи з однією степеню вільності поворот у фазовому просторі (q, p) є канонічним перетворенням.

***Задача* 379.** У двовимірному випадку знайти канонічне перетворення, що задається твірною функцією $V(x', y', p_x, p_y) = -x' p_y \sin y' - x' p_x \cos y'$.

***Задача* 380.** Показати, що канонічне перетворення, яке задається твірною функцією $V(x, y, p'_x, p'_y) = x p'_x + y p'_y + \varepsilon\big(xy + p'_x p'_y\big)$, де $\varepsilon \to 0$, являє собою поворот у фазовому просторі.

***Задача* 381°.** Показати, що перетворення $p = \alpha\sqrt{2p'} \cos q'$, $q = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{2p'} \sin q'$ є канонічним та знайти його твірну функцію.

***Задача* 382°.** Показати, що перетворення $q' = \ln\left(\dfrac{\sin p}{q}\right)$, $p' = q \operatorname{ctg} p$ є канонічним та знайти його твірну функцію.

***Задача* 383.** Знайти умови, за яких канонічне перетворення з твірною функцією

$$F(x, x', t) = \frac{1}{2}(ax^2 - 2bxx' + cx'^2)$$

зберігає вигляд рівняння $\ddot{x} + \omega(t)x = 0$, де коефіцієнти a, b, c — явно залежать від часу.

***Задача* 384*.** У твірній функції $F = xp' + ax^3p' + bxp'^3$ канонічного перетворення сталі a і b підібрати так, щоб малі коливання ангармонічного осцилятора

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}$$

у нових змінних x' та p' зводилися до гармонічних. Доданками порядку $\alpha\omega^2x'^2$ у новій функції Гамільтона знехтувати.

3.4. Рівняння Гамільтона-Якобі

Рівняння Гамільтона-Якобі має вигляд

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\Big) = 0\,, \quad i = \overline{1, n}\,.$$

Алгоритм розв'язку задачі за допомогою рівняння Гамільтона-Якобі:

1) знайти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі $S = S(q, \alpha, t)$;
2) ототожнити нові координати зі сталими інтегрування, $q'_i = \alpha_i$. Виразити старі координати з рівнянь канонічного перетворення:

$$\beta_i = -\frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i} \quad \Rightarrow \quad q_i = q_i(\alpha, \beta, t)\,,$$

   де $p'_i = \beta_i$ — сталі величини, які позначають нові імпульси;
3) знайти старі імпульси підстановкою $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ до рівняння канонічного перетворення:

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q_i}\bigg|_{q = q(\alpha, \beta, t)} \quad \Rightarrow \quad p_i = p_i(\alpha, \beta, t)\,;$$

4) у формулах $q_i = q_i(\alpha, \beta, t)$ та $p_i = p_i(\alpha, \beta, t)$, які задають обернене канонічне перетворення до старих змінних (і розв'язок задачі), визначити фізичний зміст сталих α та β, або виразити їх через початкові умови.

➠ *Методом рівняння Гамільтона-Якобі розв'язати задачі 385–402.*

***Задача* 385°.** Знайти траєкторію та закон руху вільної частинки.

***Задача* 386°.** Знайти траєкторію та закон руху частинки маси m у полі сталої сили.

***Задача* 387°.** Знайти закон руху для частинки маси m, що рухається по гладкій похилій площині з кутом нахилу α.

***Задача* 388°.** Знайти закон руху в квадратурах для математичного маятника.

***Задача* 389°.** $H(x, p) = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2x^2}{2}$ (одновимірний осцилятор).

***Задача* 390°.** $H(\vec{r},\vec{p}) = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \dfrac{k_x x^2}{2} + \dfrac{k_y y^2}{2} + \dfrac{k_z z^2}{2}$ (тривимірний осцилятор).

***Задача* 391°.** $H(x,y,p_x,p_y) = \dfrac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2}{2}(x^2 - y^2)$.

***Задача* 392.** Знайти повний інтеграл рівняння Гамільтона-Якобі та закон руху в квадратурах частинки з масою m та зарядом e в однорідному стаціонарному магнітному полі $\vec{B}$ у:

1) прямокутній декартовій системі координат;
2) циліндричній системі координат.

Вказівка: Векторній потенціал магнітного поля вибрати у такому вигляді: 1) $\vec{A} = -\vec{e}_x yB$; 2) $\vec{A} = \dfrac{1}{2}\,Br\,\vec{e}_\varphi$.

***Задача* 393.** Знайти траєкторію та закон руху частинки маси m у кулонівському потенціалі $U(r) = \dfrac{\alpha}{r}$. Розглянути випадки $\alpha > 0$ та $\alpha < 0$.

***Задача* 394.** Знайти в квадратурах закон руху частинки маси m у полі диполя $U(\vec{r}\,) = \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$, де $\vec{p}$ — сталий вектор.

***Задача* 395.** У циліндричній системі координат знайти в квадратурах закон руху частинки маси m у потенціалі $U(\vec{r}\,) = \dfrac{\alpha\sin\varphi}{r^2}$ при $\alpha > 0$.

***Задача* 396*.** У сферичній системі координат знайти в квадратурах закон руху частинки маси m у потенціалі:

$$1)\,U(\vec{r}\,) = \frac{\alpha\cos^2\theta}{r^2} \text{ при } \alpha > 0\,; \quad 2)\,U(\vec{r}\,) = \alpha r^2 + \frac{\beta\cos\theta}{r^2} \text{ при } \alpha,\beta > 0\,.$$

***Задача* 397*.** Розглянути рух частинки маси m у потенціалі $U(\vec{r}\,) = \dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$, де $\alpha > 0$, $\vec{p}$ — сталий вектор.

***Задача* 398.** При $L_z = 0$ у сферичній системі координат знайти в квадратурах закон руху частинки маси m у потенціалі:

$$1)\,U(\vec{r}\,) = \frac{\alpha\cos\theta}{r^2} - \frac{\beta}{r}\,; \quad 2)\,U(\vec{r}) = \frac{\alpha\cos\theta}{r^2} + \beta r^2$$

при $\alpha,\beta > 0$.

***Задача* 399*.** У сферичній системі координат знайти закон руху механічної системи з функцією Гамільтона:

$$H(\vec{r},\vec{p}) = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}} + \frac{k\vec{r}^{\,2}}{2}$$

(релятивістський рух у гармонічному потенціалі).

***Задача* 400*.** У сферичній системі координат знайти закон руху механічної системи з функцією Гамільтона:

$$H(\vec{r}, \vec{p}\,) = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}} - \frac{\alpha}{r}$$

(релятивістський рух у потенціалі Кулона).

***Задача* 401.** Знайти закон руху у квадратурах для системи з функцією Лагранжа

$$L(x, \dot{x}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \alpha x^2 + \beta} \text{ при } \alpha, \beta > 0\,.$$

***Задача* 402.** Розглянути задачу про рух дзиги з нерухомою точкою.

Розділ 4

Механіка суцільного середовища

4.1. Теорія пружності

Тензори деформації та швидкості деформації мають вигляд

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \quad v_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big), \quad i,j = \overline{1,f}\,,$$

де $\vec{u} = \{u_i\}$, $\vec{v} = \{v_i\}$ — відповідно, векторні поля зміщення та швидкостей.

Абсолютно пружне ізотропне тверде тіло характеризується лише двома пружними сталими λ та μ і закон Гука для нього має вигляд

$$p_{ij} = \lambda \mathrm{div}\vec{u}\,\delta_{ij} + 2\mu u_{ij}\,,$$

а рівняння руху такого тіла без врахування сил внутрішнього терт запишеться так

$$\rho\,\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho\vec{f} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\mathrm{div}\vec{u} + \mu\Delta\vec{u}\,,$$

де ρ — поле густини, $\vec{f}$ — масова густина зовнішньої об'ємної сили.

Граничні умови для задач теорії пружності мають вигляд

$$\vec{u}|_I = \vec{u}|_{II}\,, \quad \big(p_{ij}n_j\big)_I = \big(p_{ij}n_j\big)_{II}\,,$$

де $\vec{n}$ — одиничний вектор нормалі до поверхні розділу двох середовищ.

***Задача* 403°.** Записати тензори деформації і швидкості деформації в циліндричній та сферичній системах координат. Розглянути випадок малих деформацій.

***Задача* 404°.** Записати тензори деформації і швидкості деформації в довільній ортогональній криволінійній системі координат. Розглянути випадок малих деформацій.

***Задача* 405°.** Виразити тензор деформацій u_{ij} через тензор механічних напруг λ_{ijkl} для ізотропного суцільного середовища.

***Задача* 406°.** Знайти деформації однорідного прямого стержня висоти h і прямокутного перерізу $a \times b$, нижня основа якого закріплена, а до верхньої прикладена рівномірно розподілена по перерізу стержня статична сила F. Розглянути випадки:
а) сила напрямлена вздовж нормалі до верхньої основи;
б) сила напрямлена паралельно одному із ребер верхньої основи;
в) орієнтація сили — довільна.

***Задача* 407°.** Знайти деформацію однорідного циліндра радіуса R, що рівномірно обертається навколо своєї осі із сталою кутовою швидкістю ω.

***Задача* 408°.** Знайти деформацію однорідної кулі радіуса R під дією власного гравітаційного поля.

***Задача* 409.** Знайти деформацію однорідного сферичного шару з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім — R_2, якщо з середини на нього діє тиск p_1, а з зовні — p_2.

***Задача* 410°.** Знайти деформацію нескінченного однорідного циліндричного шару з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім — R_2, якщо з середини на нього діє тиск p, а з зовні — тиск відсутній.

***Задача* 411.** Знайти деформації кручення однорідного стержня циліндричної форми висотою l і радіуса R, нижня основа якого закріплена, а верхня повернута на кут φ_o відносно ненапруженого стану.

***Задача* 412°.** Знайти частоти власних поздовжніх коливань безмежної однорідної пластинки товщиною h.

***Задача* 413°.** Знайти частоти власних радіальніх коливань ізотропної пружньої кулі радіуса R, що знаходиться у вакуумі.

***Задача* 414°.** Знайти частоти власних радіальніх коливань сферичної порожнини радіуса R у необмеженому однорідному ізотропному суцільному середовищі.

***Задача* 415°.** Знайти дисперсійне рівняння для розповсюдження пружних хвиль в ізотропному суцільному середовищі. Визначити фазові швидкості поширення хвиль.

***Задача* 416.** Записати дисперсійне рівняння поширення пружних хвиль у монокристалі кубічної симетрії. Знайти фазові швидкості пружних хвиль у двох випадках: хвилі поширюються паралельно і перпендикулярно боковим поверхням куба.

***Задача* 417.** Знайти закон відбиття плоскої поздовжньої пружної хвилі, що падає під кутом α до межі розділу ізотропного суцільного середовища з вакуумом. Визначити коефіцієнт відбиття.

***Задача* 418.** Розглянути попередню задачу при умові, що падаюча хвиля — поперечна, а напрямок коливань у ній лежить у площині падіння.

4.2. Гідродинаміка

Для рідин та газів тензор в'язких напруг має вигляд

$$\sigma_{ij} = (\xi - \eta)\,\mathrm{div}\vec{v}\,\delta_{ij} + 2\eta v_{ij}\,, \quad i,j = \overline{1,f}$$

і, відповідно, повний тензор механічних напруг можна записати так

$$P_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + (\xi - \eta)\,\mathrm{div}\vec{v}\,\delta_{ij} + 2\eta v_{ij}\,,$$

де $\vec{v}$ — поле швидкостей, p — поле тиску, η, ξ — коефіцієнти зсувної та об'ємної в'язкості, відповідно.

Повна система рівнянь руху в'язкої рідини або газу має вигляд:

- рівняння Нав'є-Стокса

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{f} - \vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v} + \xi\vec{\nabla}\mathrm{div}\vec{v}\,,$$

- рівняння неперервності

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}\vec{v} = 0\,,$$

- рівняння балансу енергії

$$\rho\frac{du}{dt} = \mathrm{div}(\kappa\vec{\nabla}T) - p\,\mathrm{div}\vec{v} + \sigma_{ij}v_{ij}\,.$$

де ρ — поле густини, u — внутрішня термодинамічна енергія одиниці маси рідини, κ — коефіцієнт теплопровідності.

Умова нестискуваності рідини має вигляд

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0\,.$$

***Задача* 419°.** Записати рівняння Навьє-Стокса в циліндричній та сферичній системах координат.

***Задача* 420°.** В'язка нестислива рідина під дією перепаду тиску Δp на довжині l протікає між двома нескінченними паралельними площинами, розташованими на відстані d одна від одної. Визначити поле швидкостей і тиску в просторі між площинами. Знайти масу рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз. Знайти розподіл температури в рідині та потік тепла на стінках за умов:

1) на нижній і верхній площині за допомогою термостата підтримується стала температура T_0;

2) нижня площина теплоізольована, а температура верхньої підтримується сталою і рівною T_0.

***Задача* 421°.** В'язка нестискувана рідина знаходиться між двома нескінченними паралельними площинами, одна з яких рухається із сталою швидкістю $\vec{v}_o$ паралельно іншій, що знаходиться на відстані d від неї. Визначити поле швидкостей і тиску в просторі між площинами. Знайти масу рідини, яка протікає за одиницю часу через поперечний переріз.

***Задача* 422°.** В'язка нестислива рідина під дією перепаду тиску Δp на довжині l протікає по прямій трубі: круглого перерізу радіуса R. Знайти поле швидкостей та тиску в трубі. Знайти масу рідини, яка протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби. Визначити розподіл температури в рідині, якщо температура стінки труби підтримується сталою і рівною T_0.

***Задача* 423.** Знайти розв'язок задачі 422 для випадку труби еліптичного перерізу з півосями a та b.

***Задача* 424°.** В'язка нестискувана рідина під дією перепаду тиску Δp на довжині l протікає по прямій трубі кільцевого перерізу, відповідно, з внутрішнім та зовнішнім радіусами R_1 та R_2. Визначити поле швидкостей та тиску в рідині. Знайти масу рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби.

***Задача* 425°.** В'язка нестискувана рідина знаходиться між двома коаксіальними циліндрами з радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$). Визначити поле швидкостей та тиску в рідині, якщо один із циліндрів рухається із сталою швидкістю $\vec{v}_o$ вздовж своєї осі. Знайти масу рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз такої труби.

***Задача* 426.** В'язка нестискувана рідина знаходиться між двома коаксіальними циліндрами з радіусами R_1 та R_2 ($R_1 < R_2$). Визначити поле швидкостей та тиску в таких випадках:

1) зовнішній циліндр обертається з кутовою швидкістю ω_1;
2) внутрішній циліндр обертається з кутовою швидкістю ω_2;
3) обидва циліндри обертаються з кутовими швидкостями ω_1 та ω_2.

***Задача* 427.** Для умов попередньої задачі знайти поле температур у рідині, якщо внутрішній циліндр теплоізольований, а зовнішній підтримується при сталій температурі T_0.

***Задача* 428°.** Шар рідини товщиною h обмежений зверху вільною поверхнею, а знизу — нерухомою площиною, яка нахилена під кутом α до горизонту. Визначити поле швидкостей та тиску при русі рідини в однорідному полі сили тяжіння.

Література

[1] Єжов С.М., Макарець М.В., Романенко О.В. *Класична механіка.* К.: ВПЦ "Київський Університет". 2008 — 480 с. Т. 1. Механика. — М.: Наука, 1988. — 215 с.

[2] Федорченко А. Ф. *Теоретична фізика: В 2 т. Т. 1. Класична механіка і електродинаміка.* — К.: Вища школа, 1992. — 533 с.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 1. Механика.* — М.: Наука, 1988. — 215 с.

[4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 2. Теория поля.* — М.: Наука, 1988. — 512 с.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 6. Гидродинамика.* — М.: Наука, 1988. — 733 с.

[6] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика: В 10 т. Т. 7. Теория упругости.* — М.: Наука, 1987. — 248 с.

[7] Гречко Л. Г., Сугаков В. И., Томасевич О. Ф., Федорченко А. Ф. *Сборник задач по теоретической физике.* — К.: Вища школа, 1984. — 319 с.

[8] Коткин Г. Л, Сербо В. Г. *Сборник задач по классической механике.* — М.: Наука, 1969. — 240 с.

[9] Голдстейн Г. *Классическая механика.* — М.: Мир, 1975. — 415 с.

[10] Д. тер Хаар *Основы гамильтоновой механики.* — М.: Наука, 1974. — 223 с.

[11] И.И.Ольховский, *Курс теоретической механики для физиков*, М.: Наука, 1970.

[12] И.И.Ольховский, Ю.Г.Павленко, Л.С.Кузьменков, *Задачи по теоретической механике для физиков*, М.: Изд-во МГУ, 1977.

[13] Ю.Г.Павленко, *Лекции по теоретической механике*, М.: Изд-во МГУ, 1991.

[14] Ю.Г.Павленко, *Задачи по теоретической механике*, М.: Изд-во МГУ, 1988.