Задачи по основам теории риска

А.А.Новоселов*

Для студентов математического факультета КГУ

Аннотация

Приведены задачи из различных отраслей математики, которые составляют базу для теории риска. Этот задачный минимум необходимо решить всем студентам, желающим специализироваться в данной области.

1 Задачи

Задача 1 *Пусть компоненты случайного вектора (X, Y) имеют следующие (бернуллиевские) маргинальные распределения:*

$$\mathbf{P}(X = 1) = 1 - p,\ \mathbf{P}(X = 3) = p, \quad \mathbf{P}(Y = 1) = 1 - q,\ \mathbf{P}(Y = 2) = q,$$

где $p, q \in [0, 1]$ – параметры распределений. Найти распределение случайной величины $Z = XY$ в случаях, когда:

a) компоненты X, Y независимы;

b) компоненты X, Y зависимы.

Если X и Y независимы, то что можно сказать о зависимости (независимости) X и Z? Y и Z? Возможна ли ситуация, при которой X и Y зависимы, а X и Z независимы?

Задача 2 *Решить задачу, аналогичную задаче 1, для случайной величины*

$$Z = Y/X.$$

Задача 3 *Решить задачу, аналогичную задачам 1, 2, для случая, когда маргинальные распределения X и Y равномерны на $[0, 1]$. Кроме того, привести пример совместного распределения (X, Y) с равномерными маргинальными, при котором распределение $Z = XY$ также является равномерным на $[0, 1]$, или доказать, что такое совместное распределение не существует.*

Задача 4 *Пусть X, Y имеют дискретные распределения*

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = \mathbf{P}\{X = 2\} = 1/3.$$

$$\mathbf{P}\{Y = 0\} = \mathbf{P}\{Y = 1\} = 1/2,$$

Построить совместное распределение (X, Y) так, чтобы оно имело заданные маргинальные распределения, и X, Y были комонотонными (см. определение 1).

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, Красноярск, Академгородок, e-mail: anov@icm.krasn.ru, т. (3912) 495382

Задача 5 *Дать определение антикомонотонных случайных величин. Построить совместное распределение для X, Y из задачи 4 так, чтобы X, Y были антикомонотонными в соответствии с данным определением.*

Задача 6 *Рассмотрим множество A случайных величин X с конечным вторым моментом $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Рассмотрим дисперсию случайной величины X, как функцию на A: $f(X) = \mathbf{D}X,\ X \in A$. Доказать, что A выпукло в линейном пространстве всех вещественных случайных величин. Является ли функция f выпуклой? строго выпуклой? вогнутой? строго вогнутой?*

Задача 7 *Пусть заданы маргинальные распределения, как в задаче 4. Найти максимальное и минимальное значение ковариации X, Y и совместные распределения, на которых достигаются эти экстремумы.*

Задача 8 *На множестве неотрицательных целых чисел $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ задана функция*

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!},\ x \in \mathcal{N},$$

где $\lambda \neq 0$ – вещественный параметр. Найти максимальное значение f и множество точек $\mathcal{N}_\lambda \subseteq \mathcal{N}$, на которых этот максимум достигается.

Задача 9 *Пусть $\mathcal{G}$ – множество функций распределения G на квадрате $S_2 = [0,1] \times [0,1]$, имеющих равномерные маргинальные распределения:*

$$G(x,1) = x,\ G(1,y) = y;\ \ x, y \in [0,1].$$

а) Вычислить функции

$$U(x,y) = \sup_{G \in \mathcal{G}} G(x,y),\ L(x,y) = \inf_{G \in \mathcal{G}} G(x,y);\ \ x, y \in S_2.$$

б) Являются ли U и L функциями распределения на S_2?
в) Являются ли U и L элементами $\mathcal{G}$?
г) Изобразить графики функций U и L.
д) Вычислить интеграл

$$\int_{S_2} [U(x,y) - L(x,y)]\, dx\, dy.$$

е) Привести пример функции распределения $H \in \mathcal{G}$, отличной от U и L, и удовлетворяющей условию

$$L(x,y) \leq H(x,y) \leq U(x,y). \tag{1}$$

ж) Существует ли функция распределения H на S_2 такая, что выполнено (1) и $H \notin \mathcal{G}$?

Задача 10 *Сформулировать и решить аналогичную задачу на $S_n = [0,1]^n$.*

Задача 11 *Производителя чая "Беседа"решили завлечь потребителя непотребными средствами, и стали вкладывать в каждую пачку чая игральную карту, наугад выбранную из колоды. Любителю чая, собравшему полную колоду, обещан суперприз ... пачка чая "Беседа". Сколько пачек чая в среднем нужно истребить, чтобы заработать призовую? Решить задачу для колоды из 32 и 52 карт.*

Задача 12 *Построить два расходящихся числовых ряда* $\sum_k a_k$ *и* $\sum_k b_k$ *с монотонными положительными слагаемыми* $a_k \geq a_{k+1} > 0$, $b_k \geq b_{k+1} > 0$, $k = 1, 2, ...$ *так, чтобы ряд* $\sum_k c_k$, *где*

$$c_k = \min\{a_k, b_k\}, \ k = 1, 2, ...$$

сходился.

Задача 13 *Для треугольника Паскаля*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & ... \\ 1 & 2 & 3 & 4 & ... \\ 1 & 3 & 6 & 10 & ... \\ 1 & 4 & 10 & 20 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{array}$$

вычислить определитель $n \times n$, *расположенный в левом верхнем углу,* $n = 1, 2, ...$

Задача 14 *В дискретном метрическом пространстве* $(\mathcal{X}, d)$ *описать а) совокупность всех открытых множеств; б) совокупность всех замкнутых множеств.*

Задача 15 *Пусть* $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ *– вероятностное пространство. Зададим на* $\mathcal{B}$ *отношение эквивалентности*

$$A \sim B \iff \mathbf{P}(A \Delta B) = 0, \quad A, B \in \mathcal{B},$$

где Δ *– операция симметрической разности множеств. Рассмотрим фактор - множество* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *множества* $\mathcal{B}$ *по этому отношению эквивалентности. Является ли* $\widetilde{\mathcal{B}}$ σ*-алгеброй? Ответ обосновать.*

Задача 16 *Пусть случайные величины* X *и* Y *имеют равномерные распределения на отрезках* $[a, b]$ *и* $[c, d]$, *соответственно,* $0 < a < b$, $0 < c < d$. *Найти*

- *Распределение* $S = XY$, *когда* X, Y *независимы.*
- *В рамках предыдущей модели: условное совместное распределение* X, Y *при условии* $S \leq s$, *где* $ac < s < bd$.

Задача 17 *Для вещественной случайной величины* X *определим функции распределения* F_X, G_X *и* H_X *следующим образом:*

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$G_X(x) = \mathbf{P}(X < x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$H_X(x) = \frac{1}{2}(F_X(x) + G_X(x)), \quad -\infty < x < \infty.$$

Известно, что F_X непрерывна справа, G_X непрерывна слева, и все три функции совпадают в точках непрерывности. Рассмотрим дискретную случайную величину X с распределением $\mathbf{P}(X = x_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $x_1 < \ldots < x_n$, $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $p_1 + \ldots + p_n = 1$, и зададим случайные величины

$$U = F_X(X), \;\; V = G_X(X), \;\; W = H_X(X).$$

Найти $\mathbf{E}U, \mathbf{E}V, \mathbf{E}W, \mathbf{D}U, \mathbf{D}V, \mathbf{D}W$.

Задача 18 (копула Франка). *Задано семейство функций распределения двух переменных*

$$C^{(\alpha)}(u,v) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{(e^{\alpha u} - 1)(e^{\alpha v} - 1)}{e^{\alpha} - 1} \right], \quad u, v \in [0,1], \tag{2}$$

где $\alpha \neq 0$ – параметр. Вычислить функции

$$\lim_{\alpha \to 0} C^{(\alpha)}(u,v), \; \lim_{\alpha \to -\infty} C^{(\alpha)}(u,v), \; \lim_{\alpha \to \infty} C^{(\alpha)}(u,v).$$

Являются ли они функциями распределения на $[0,1]^2$?

Задача 19 (копула Кука-Джонсона). *Задано семейство функций распределения двух переменных*

$$C^{(\alpha)}(u_1, \ldots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} u_i^{-1/\alpha} - n + 1 \right\}^{-\alpha}, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ – параметр. Вычислить функции

$$\lim_{\alpha \to 0} C^{(\alpha)}(u,v), \; \lim_{\alpha \to \infty} C^{(\alpha)}(u,v).$$

Являются ли они функциями распределения на $[0,1]^2$?

2 Определения

Определение 1 *Случайные величины X, Y называются* **комонотонными**, *если они имеют совместную функцию распределения*

$$G(x,y) = \mathbf{P}\{X \leq x, \; Y \leq y\},$$

и для любой другой пары случайных величин $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$, имеющей совместную функцию распределения

$$F(x,y) = \mathbf{P}\{\widetilde{X} \leq x, \; \widetilde{Y} \leq y\}$$

с теми же маргинальными распределениями:

$$F(\cdot, \infty) = G(\cdot, \infty), \;\; F(\infty, \cdot) = G(\infty, \cdot)$$

выполняется неравенство

$$F(x,y) \leq G(x,y), \; x, y \in \mathbf{R}.$$

Определение 2 *Функция f, заданная на выпуклом множестве A линейного пространства, называется выпуклой, если*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad x, y \in A, \ \lambda \in (0,1)$$

и строго выпуклой, если

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad x, y \in A, \ \lambda \in (0,1).$$

Определение 3 *Метрическое пространство $(\mathcal{X}, d)$ называется дискретным, если $\mathcal{X}$ – произвольное множество, а метрика d имеет вид*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in \mathcal{X}.$$

Список литературы

[1] В.Феллер (1984) *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.*- М.: "Мир", **1**, 527 с.; **2**, 751 с.

[2] Боровков А.А. (1986) *Теория вероятностей.* М.: "Наука", 432 с.

[3] Wang, S.(1996) Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin*, **26**, pp. 71-92.

[4] Лоэв М. (1962) *Теория вероятностей.* М.: Изд–во иностр. лит. - 720 с.