МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Численные методы обработки данных в системе MathCad

Практикум по специальности
«Радиофизика и электроника» 071500

Воронеж
2004

Утверждено научно-методическим советом физического факультета
(14.01.2004 г. протокол №1)

Составители: Радченко Ю.С.,
Захаров А.В

Практикум подготовлен на кафедре радиофизики физического факультета Воронежского государственного университета
Рекомендуется для для студентов 2 курса дневного отделения
(071500)

Содержание

Часть I. Mathcad

Математический пакет Mathcad позволяет специалистам, не вдаваясь в тонкости программирования, реализовать математические модели. Отметим конкретные преимущества пакета Mathcad:

- математические выражения в среде Mathcad записываются в их общепринятом виде. Текстовый процессор пакета позволяет оформить, например, научную статью. Mathcad — это полноценное Windows-приложение, поэтому ClipBoard (Буфер Обменов) позволяет перенести фрагменты Mathcad-документа в различные приложения ;
- в среде Mathcad процесс создания программы идет параллельно с ее отладкой;
- в пакет Mathcad интегрирован довольно мощный математический аппарат. Вот неполный перечень вычислительных инструментов, доступных в среде Mathcad:
    1) решение алгебраических уравнений и систем (линейных и нелинейных);
    2) решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений ;
    3) решение дифференциальных уравнений в частных производных;
    4) работа с векторами и матрицами (линейная алгебра и др.);
    5) поиск максимумов и минимумов функциональных зависимостей;
    6) статистическая обработка данных;
- пакет Mathcad дополнен справочником по основным математическим и физико-химическим формулам и константам:
- в пакет Mathcad интегрированы средства символьной математики.

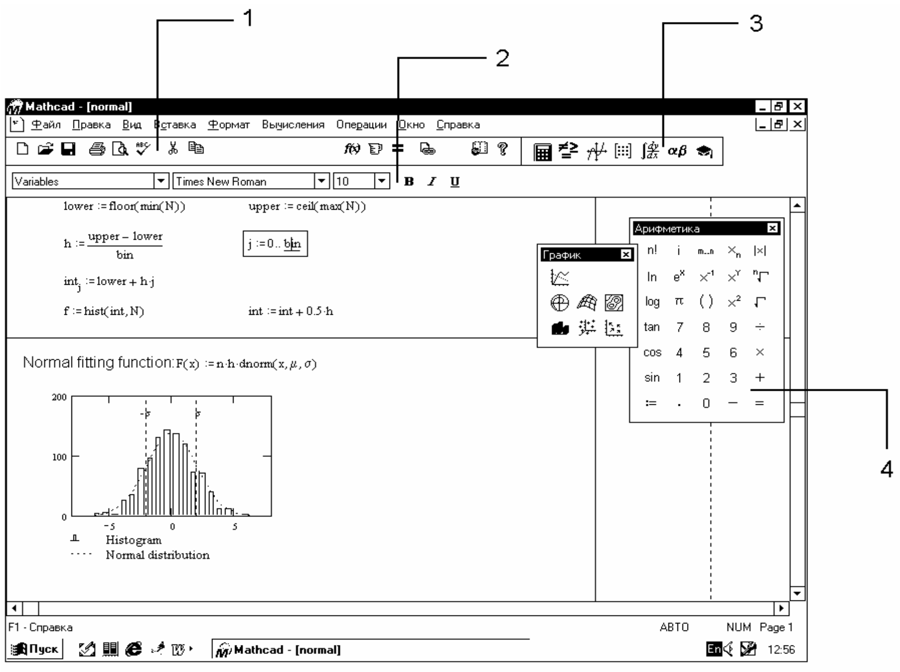

Рис. 1. Окно документа Mathcad 8.0

1 — панель инструментов; 2 — кнопки форматирования текста; 3 — математическое меню; 4 — выбранные панели математического меню.

Арифметические вычисления

Для вычисления значений арифметических выражений в рабочем поле Mathcad следует с помощью клавиатуры или нажав на пиктограмму калькулятора в математическом меню Mathcad (см. рис. 1) набрать выражение, завершающееся знаком “=”.

П р и м е р. $1-\frac{3}{5}+0.2\cdot 4=1.2$

Использование формул в Mathcad

Для набора формул в Mathcad можно использовать числа, переменные, функции как стандартные (встроенные), так и определяемые пользователем, а также различные математические операторы (сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, интегрирования, дифференцирования и т.д.). Набор формул можно осуществлять также с помощью панели математического меню Mathcad (см. рис. 1).

Замечание. *Имена встроенных функций нечувствительны к шрифту, но чувствительны к регистру (верхнему, нижнему) — их следует печатать в точности, как они приведены в настоящем пособии или документации по Mathcad.*

Для определения переменной следует после указания ее имени ввести знак присвоения “**:=**” (нажав клавишу “**:**”), после которого вводится алгебраическое (или логическое) выражение, все операнды которого должны быть определены.

Заметим, что знак “:=” действует по полю Mathcad правее и ниже указанного выражения. Если вместо знака “:=” вводить “≡” (клавиша “~”, а также см. меню на рис. 1), то его действие распространяется по всему полю документа независимо от местоположения рассматриваемого выражения. То есть знак “≡” определяет, в отличие от “:=”, переменную глобально.

П р и м е р.

$x:=1 \quad y:=4 \quad z:=\frac{x+y}{10} \quad v:=\frac{x+2\cdot y}{10}$ $\qquad z=0.2 \quad v=0.9$

Для определения функции одного или нескольких переменных требуется задать имя функции, указав в круглых скобках через запятую имена ее аргументов, и правее знака “:=” (или “≡”) ввести соответствующее функции арифметическое (или логическое) выражение. После определения функции ее можно использовать в выражении как стандартную (встроенную) функцию Mathcad. Особо отметим, что к моменту вычисления по формуле все переменные в этой формуле должны быть определены.

П р и м е р.

$f(x,y):=\sin(x)+x^2-2\cdot y\cdot\cos(x+y)$ определение функции f(x,y)

$g(x):=\cos(x^2+1)-f(4,x)$ использование функции f(x,y) в вычислениях

Работа с векторами и матрицами

Для ввода матрицы (или вектора) требуется проделать следующую последовательность операций:

1. Задаем имя матрицы и вводим знак присваивания. Например, для задания матрицы “A” пишем “A:”. Получаем “A:=”.
2. В панели математического меню Mathcad нажимаем на кнопку с изображением матрицы. После этого на экране дисплея возникает окно работы с матрицами. В этом окне два поля и три кнопки.
3. В первом поле следует указать число столбцов создаваемой матрицы, а во втором — число строк (по умолчанию в этих полях записаны тройки) Для создания матрицы щелкаем по кнопке Create (Создать). Две остальные кнопки Insert (Вставить) и Delete (Удалить) предназначены для изменения размеров ранее созданных матриц: заданное в полях число столбцов или (и) строк вставляется (удаляется) правее и ниже отмеченного курсором элемента уже созданной матрицы.
4. После щелчка по кнопке Create справа от выражения появляется шаблон для ввода информации. Заполнением вакансий завершается формирование матрицы.

Второй вариант формирования матриц и векторов осуществляется через переменные с индексами, например, $A_{i,j}$,B_i . Индекс к имени переменной припечатывается нажатием либо на кнопку X_i на панели математических инструментов, либо на клавишу “[”.

Замечание. Номер первого элемента векторов и матриц хранит переменная ORIGIN. Эта предопределенная (системная) переменная, по умолчанию ORIGIN=0. Изменить значение системной переменной ORIGIN можно либо в пункте меню Math (подпункт (Встроенные переменные)), либо через команду присваивания в поле документа Mathcad.

Операции с матрицами и векторами осуществляются по тем же правилам, что и для арифметических выражений (см. Приложение).

П р и м е р 1.

ORIGIN:=1 определяем номер первого элемента

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ формируем матрицу А

$B := \begin{pmatrix} 138 \\ 540 \end{pmatrix}$ формируем матрицу В

$X := A^{-1}B$ решаем матричное уравнение АХ=В

$X = \begin{pmatrix} 63 \\ 75 \end{pmatrix}$ вывод решения

$AX - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ проверка

П р и м е р 2.

ORIGIN:=0 определяем номер первого элемента

$A_{0,0} := 1 \quad A_{0,1} := 1$ формируем матрицу А

$A_{1,0} := 5 \quad A_{1,1} := 3$

$B_0 := 138 \;\; B_0 := 540$ формируем матрицу В

X := lsole(A,B) решаем матричное уравнение АХ=В

$X_0 := 63 \quad X_1 := 75$ вывод решения

$A_{0,0}X_0 + A_{0,1}X_1 - B_0 = 0$ проверка

$A_{1,0}X_0 + A_{1,1}X_1 - B_1 = 0$

Построение графиков в среде Mathcad

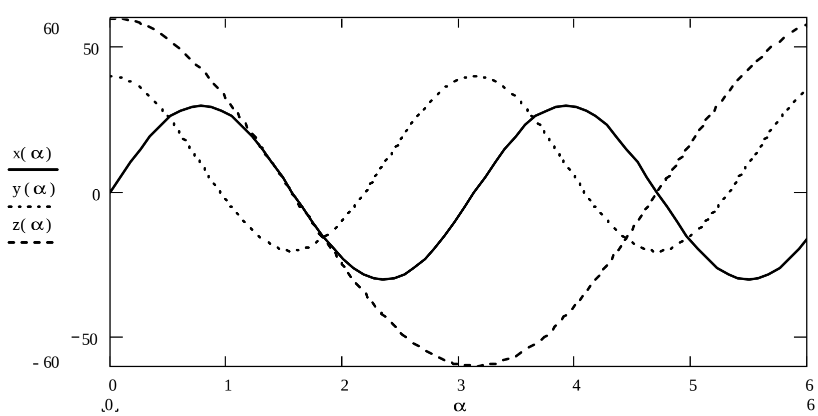

Рис. 2. Декартов график

Двумерный декартов график строится в три этапа:

1. Задается вид функций одной переменной.
2. Формируется вектор значений аргумента.
3. Непосредственное построение графика:
   а) рисование на экране дисплея заготовки графика при нажатии на одну из кнопок математического меню «Графики»;

b) заполнение заготовки графика именем функции и именем аргумента. В случае, если функций больше одной, то их имена вводятся через запятую. График появляется на дисплее после вывода курсора из зоны графика (автоматический режим расчетов) или после нажатия клавиши F9 (ручной режим расчетов);
c) если параметры графика, установленные по умолчанию, пользователь хочет изменить, то двойным щелчком левой клавиши мыши, когда указатель мыши находится в поле графика, вызвать соответствующее меню.

Для задания диапазона изменения переменной следует руководствоваться следующим правилом:

$$x := x_1, x_2 \; .. \; x_n \; .$$

Здесь x_1 — первое значение, x_2 — второе значение и x_n — последнее значение. Таким образом, шаг изменения от x_1 до x_n будет $x_2 - x_1$. Если же используется запись

$$x := x_1 \; .. \; x_n \; ,$$

то шаг изменения переменной x будет по умолчанию равен 1.

Для ввода “..” следует нажать клавишу “;” или воспользоваться математической панелью меню.

П р и м е р 1.

i :=0 .. 10 — i принимает значения от 0 до 10 с шагом 1
j :=-15,-14 .. 12 — j принимает значения от -15 до 12 с шагом 1

П р и м е р 2.

a :=1 b :=2 c :=20

$$x(\alpha) := \frac{-c \cdot (a+b) \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{-2 \cdot a} \qquad y(\alpha) := \frac{c \cdot [a - \cos(\alpha)^2 \cdot (a+b)]}{-a} \qquad z(\alpha) := (a+b) \cdot \frac{c \cdot \cos(\alpha)}{a}$$

$\alpha := 0{,}5 \cdot deg \; .. \; 360 \cdot deg$ (deg — по умолчанию один угловой градус).

Чтение и запись данных

В пакете Mathcad имеются стандартные функции для чтения данных из файла, а также записи или добавления данных в файл. Структурированные файлы имеют расширение prn.
Чтение данных производится с помощью команды READPRN(file).

Процедура READPRN(file) осуществляет присваивание матрице значений из структурированного файла с именем file (файл имеет расширение prn). При этом размер матрицы устанавливается в соответствии с объемом файла. Копирование данных из файла производится построчно. Каждой строке матрицы соответствует строка файла.

П р и м е р.

A :=READPRN(“D:\TSR\Paper1.prn”)

Для записи данных в файл следует воспользоваться функцией WRITEPRN(file). Функция WRITEPRN(file) выводит матрицу в структурированный файл file (с расширением prn).

П р и м е р

ORIGIN :=0

i :=0, 2 .. 10 j :=0 .. 8 $Y_{i,j} := \sin(i - j)$

WRITEPRN(“d:\ user \ file2.prn“) := $Y_{i,j}$

Для добавления данных к существующему файлу используется функция APPENDPRN. Функция APPENDPRN(file) добавляет матрицу к существующему на диске структурированному файлу file.

П р и м е р . APPENDPRN(“d:\ user \ file.prn”) := A

Знакомство с Mathcad

Цель работы. Изучить возможности работы в среде Mathcad по предложенному ниже плану, подкрепляя изучение выполнением соответствующих заданий.

1. Произвести различные арифметические и алгебраические действия.
2. Выполнить расчеты по формулам.
3. Векторы и матрицы.

Задать несколько векторов и матриц произвольной размерности (двумя способами) и произвести с ними различные операции.

4. Построение графиков.

Построить график любой функции, изменить параметры графика, нанести на один график две-три кривые.

5. Чтение данных из файла и запись в файл.

Прочитать файл данных, соответствующих Вашему варианту, преобразовать вектор данных в матрицу, представить данные в виде графика. Записать файл.

Часть II. Лабораторные работы

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МАСШТАБ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. Для удобного графического представления функциональной зависимости $y=f(x)$ могут применяться: a) логарифмический масштаб; b) обратный функциональный масштаб; c)прямой функциональный масштаб.

ОБРАТНЫЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МАСШТАБ . Пусть $y=f(x)=f(kx)$. Преобразуем график в прямую линию $y^*=kx$. Это можно сделать преобразованием $y^* = f^{-1}(y)$. Если исходная функция имеет более общую зависимость $y = f(x) = f((x-c)/s)$, то данное преобразование координаты y дает уравнение в системе координат (x,y^*) $y^* = (x-c)/s$

Пример: y = 1-exp(- k(x-c)), $x > c$. Преобразование y^* = —ln(1-y) приводит к уравнению прямой линии $y^* = k(x-c)$.

Обратный функциональный масштаб удобно применять к "S" -образным кривым.

ПРЯМОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ МАСШТАБ . Пусть $y=f\{x)=kf_1(x)+c$. Тогда преобразование $x^* = f_1(x)$ приводит график к прямой линии $y = kx^* + c$. Такой функциональный масштаб целесообразно использовать для "*U*" и "*J*"-образных кривых.

Пример: $y = 5tg(x) - 2.5, \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \quad x^* = tg(x)$. Тогда y = 5x* - 2.5. Обратите внимание, что обратный функциональный масштаб в этом примере менее удобен, так как бесконечную кривую он преобразует в конечный отрезок прямой $(-p/2 < x < p/2; \ -p/2 < x < p/2;)$, а это приведет к сгущению точек на концах отрезка.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ БУМАГА. Вероятностной бумагой называется функциональный масштаб, в котором функция распределения $F(x)$ случайной величины x преобразуется в прямую линию. Для этого случая необходимо применить обратное функциональное преобразование $y^* = F^{-1}$ (y) . Если на вероятностной бумаге построить полигон накопленных частот P_q (x_q), x_q Î $[a;a+qD]$, где $1 £ q £ r, \quad \Delta = (b - a)/r$, то:

1) нелинейная зависимость $P_q^* = F^{-1}(P_q)$ от x_q указывает на несоответствие эмпирической и теоретической функций распределения; линейная зависимость, напротив, говорит о соответствии эмпирической и теоретической функций распределения;
2) по линейной зависимости $P_q^* = (x - c)/s$ легко найти параметры c и s в функции распределения $F(x)$ случайной величины x.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА, НЬЮТОНА.

Если заданы n+1 узлов (x_k, y_k) , $k = 0..n$, то можно через указанные точки построить интерполяционный полином степени «n» вида

1. $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k L(x,k)$, где $L(x,k)=\prod_{i=0,i\ne k}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$ вспомогательные полиномы Лагранжа.

2. $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k N(x,k)$, где $N(x,k)=\prod_{i=0}^{k-1}\left(x-x_i\right)$, $a_k=\Delta^k y_0/\left(k!h^k\right)$

Для уменьшения неустойчивости интерполяционных полиномов применяют расположение точек по закону нулей Чебышева

$$x_k=\frac{(a+b)}{2}+\frac{(b-a)}{2}\cos\left(\pi\frac{(2k-1)}{2(n+1)}\right),\quad a=x_0,\quad b=x_n$$

Наиболее точное приближение функции дает интерполяция ***сплайнами***.

В пакете Mathcad имеются следующие стандартные функции для интерполяции:

linterp(VY,VY,x)- функция для кусочно-линейной интерполяции . VX, XY-массивы узловых точек - $\{x_k\},\{y_k\}$ соответственно, x- значение аргумент;

cspline(VX,VY)-вспомогательная функция для вычисления массива VS вторых производных при интерполяции кубическими сплайнами;

interp(VS,VX,VY,x)- интерполяционный полином при сплайн-аппроксимации.

Контрольные задания

1. Построить в логарифмическом масштабе графики функций
   $f(x)=\exp\left(-x^2/2\right)/x,\quad x\in[1..5];$

   $f(x)=x\exp\left(-ax^2/2\right),\quad x\in[1..5];\quad a=0.5,1,2;$

   $f(x)=1-\exp\left(-m\cdot\exp\left(-x^2/2\right)\right),\quad x\in[1..5];\quad m=10,50,80;$

   $P(k)=\lambda^k\exp(-\lambda)/k!,\quad k\in[1..6];\quad \lambda=0.5,1,2;$

   $f(z,m)=1-\int_0^{z+4}\exp\left(-m\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{(x-z)^2}{2}\right)dx/\sqrt{2\pi}\quad z\in[1..6],\ m=10,40$

   $f(h,n)=1-2k\int_0^h\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}dx,\quad h\in[0..8],\ n=2,8,20$
2. Определить, какой одной из двух возможных функциональных зависимостей $y=1-exp(-lx)$, $y=1-exp\left(-l^2x^2\right)$, принадлежат данные из файлов El.prn,..., E10.prn. Найти значение l. (Данные в файлах записаны попарно (x,y) для каждой точки графика).
3. Построить интерполяционные полиномы Лагранжа для зависимостей из файлов Lag1.prn..Lag10.prn.
4. Рассмотреть пример Рунге. Построить интерполяционные полиномы Лагранжа с равномерной сеткой, с узлами Чебышева. Использовать интерполяцию сплайнами.
5. Найти обратные функции для данных, имеющих функциональные зависимости

a) F(x)=1-exp(-x^c) b) F(x)=arctg((x-a)/c) c) F(x)=Φ((x-m)/σ) d) F(x)=1-1/(1+x^{2k}) e) $F(x)=(\Gamma(c))^{-1}\int_0^x x^{c-1}\exp(-x)dx$ f) F(x)=arcsin(x/c) g) F(x)=1-1/$(x/c)^k$

6. При помощи вероятностной бумаги определить, к какому типу распределения – нормальному или релеевскому принадлежат функции распределения, записанные в файлах Paper1.prn,…Paper 10.prn.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотрим задачу вычисления определенного интеграла $I=\int_a^b f(x)dx$ функции $y = f(x)$ на интервале $x\in[a;b]$. Интеграл I приближенно представляется в виде квадратурной формулы

$$I \approx I_N = \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i), \qquad (1)$$

где коэффициенты A_i и точки отсчета (узлы) x_i определяются в соответствии с выбранным способом аппроксимации подинтегральной функции $f(x)$. Погрешность квадратурной формулы (1) зависит от вида аппроксимирующих функций $f_{ai}(x)$, а также от расположения и количества узлов x_i. Точность формулы (1) увеличивается с ростом числа узлов N.

При практических расчетах значение N обычно выбирают из соотношения

$$\left|\,(I_{2N} - I_N)/I_{2N}\right| < \varepsilon, \qquad (7)$$

Перечислим наиболее употребительные квадратурные формулы численного интегрирования для равноотстоящих узлов $x_i = a+ih$, где $h=(b-a)/N$ - шаг интегрирования. Укажем также оценки погрешностей R каждой формулы.

<u>1.Формулы прямоугольников</u>:

<u>Модифицированная формула прямоугольников</u>. Функция $f(x)$ на каждом из интервалов $[x_i; x_{i+1}]$ заменяется на постоянную $f_{ai} = f(x_i + h/2)$. Тогда

$$I \approx h\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i+h/2) = h\sum_{i=1}^{N} f(x_i-h/2).$$

Погрешность формул прямоугольников равна $R=(Nh^3/24)f^{(2)'}(x)$. Здесь и далее под $f^{(m)'}(x)$ понимается m-я производная функции $f(x)$, а $x\in[a;b]$ - точка максимума функции $f^{(m)'}(x)$.

<u>2. Формула трапеций</u>. Здесь функция $f(x)$ на каждом интервале $[x_i; x_{i+1}]$ заменяется на кусочно-линейную функцию, совпадающую со значениями функции $f(x)$ при $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$. Формула имеет вид

$$I \approx h\left[\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right], \qquad R=(Nh^3/12)f^{(3)'}(x).$$

<u>3. Формула Симпсона (формула парабол).</u> Функция $f(x)$ на каждом интервале $[x_{i-1}; x_{i+1}]$ заменяется на параболу. Тогда

$$I \approx \frac{h}{3}\left[4\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i}) + f(a) + f(b)\right],$$

$R = (Nh^6/180)\, f^{(4)'}(x)$. Здесь следует выбирать четное значение N.

<u>4. Формулы Ньютона-Котеса замкнутого типа.</u> В качестве аппроксимирующей функции здесь используются полиномы Лагранжа порядка n.

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \quad A_i = \int_a^b L_k(x)dx.$$

При $n > 8$ коэффициенты A_i в формулах Ньютона-Котеса имеют громоздкий вид. При $n \ge 10$ метод становится численно неустойчивым из-за представления коэффициентов A_i в виде дробей с большим числом значащих цифр и с разными знаками.

<u>5. Экстраполяция по Ричардсону</u>. Подход к вычислению интеграла состоит в том, что интеграл вычисляется дважды: с числом подинтервалов N и 2N и последующим объединением результатов. Так, при использовании формулы трапеций в качестве базового алгоритма квадратурной формулы получаем

$$I \approx \left(4I_{2N} - I_N\right)/3$$

При использовании формулы Симпсона

$$I \approx \left(16I_{2N} - I_N\right)/15$$

<u>6. Формула Гаусса.</u> Точность интегрирования по квадратурной формуле (1) можно повысить, если оптимизировать значения узлов x_i и весов A_i. Формула Гаусса, где значения x_i выбираются в соответствии с расположением нулей полиномов Лежандра порядка n, а A_i связаны с этими полиномами

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} A_j f(x_i), \quad x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2} t_j,$$

где n - порядок используемого полинома Лежандра, t_i -неравноотстоящие значения узлов на стандартном интервале $[-1;1]$, совпадающие с положением нулей соответствующего полинома Лежандра. Значения узлов t_i и коэффициентов A_i для различных n равны :

при $n=1$: $t_1 = 1$, $A_1 = 2$;

при $n=2$: $t_2 = -t_1 = 0.577350269$, $A_1 = A_2 = 1$;

при $n=3$: $t_3 = -t_1 = 0.774596669$, $t_2 = 0$, $A_1 = A_3 = 0.555555555$, $A_2 = 0.888888$;

при $n=4$: $t_4 = -t_1 = 0.861136311$, $t_3 = -t_2 = 0.339981043$, $A_1 = A_4 = 0.347854845$, $A_2 = A_3 = 0.652145155$;

при $n=5$: $t_5 = -t_1 = 0.906179846$, $t_4 = -t_2 = 0.538468310$, $t_3 = 0$, $A_1 = A_5 = 0.236926885$, $A_2 = A_4 = 0.478628670$; $A_3 = 0.568888888$.

6. Формулы а) Гаусса-Эрмита, б) Гаусса-Лагерра

а) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-x^2) f(x) dx \approx \sum\limits_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$;

б) $I = \int\limits_{0}^{\infty} exp(-x) f(x) dx \approx \sum\limits_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$,

где A_i, x_i связаны с полиномами Эрмита и Лагерра порядка n.

ЗАДАНИЯ. Используя одну из формул численного интегрирования, вычислить интеграл из таблицы

f(x)	f(x)
1. x^2, a=0, b=3	16. $1+x^4$ a=-2.5,b=2.5
2. $\sin(x+x^2)$, a=0, b=0.8	17 $\sin(x^2)$ a=0,b=1.5
3. cos(x) a=-1.5, b=1.5	18. $\cos(x^2)$ a=-1.5, b=1.5
4. $(1+x^2)^{-1}$ a=-4, b=4	19. 1/(1+exp(-x)) a=-1,b=2
5. $x(1+\exp(-x^2))^{-1}$ a=0, b=1.5	20 $1/(2+\cos(x^2))$ a=-2.5, b=2.5
6.ln(2+cos(x)) a=0, b=1.5	21. $sh(-x^2)$ a=0, b=3
7. $1/(1+2x^4)$ a=-2, b=2	22. sin(cos(x)) a=0, b=1.5
8. cos(sin(x)) a=-1, b-1	23. $x^2/(1+ch(x^2))$ a=0, b=2.5
9. $\cos(x^3)$ a=-0.5, b=1.2	24. $\ln(1+x+x^2)$ a=0, b= 5
10. sin(x)/(2+sin(x)) a=0,b=1.5	25. exp(sin(x)) a=-1, b=1
11. exp(cos(x)) a=0, b=1	26. sh(cos(x)) a=0. b=1.5
12. arctg(x-1) a=0.5 ,b=4	27. cos (sh(x)) a=-2, b=2
13. arctg(exp(-x)) a=-2, b=2	28. sin(x)/x a=-3, b=3
14. $(x^2+1)/(x^4+1)$ a=0, b=4	29. $\sin(x^2)/x^2$ a=-3,b=3
15. $\sin(x)/(1+x^4)$ a= 0,b=3	30. $\sin(\exp(-x^2))$ a=0, b=2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3
ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. Стандартная гауссовская случайная величина $\eta \to N(0,1)$ имеет плотность вероятности

$$W(x) = \exp\left(-x^2/2\right)/\sqrt{2\pi} \qquad (1)$$

и функцию распределения $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\exp\left(-t^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} dt$ (2)

Для произвольной гауссовской случайной величины $\xi \to N\left(m, \sigma^2\right)$ плотность вероятности *W(x)* и функция распределения *F(x)* имеют вид :

$$W(x) = \frac{\exp\left(-(x-m)^2/2\sigma^2\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\exp\left(-(t-m)^2/2\sigma^2\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dt \qquad (3)$$

Функция $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad \Phi(0) = 0.5$.

Кроме функции $\Phi(x)$, в вероятностных расчетах используются функции

$$erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{p}}\int_{0}^{x}\exp\left(-t^{2}\right)dt,\quad erfc\left(x\right)=1-erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{p}}\int_{x}^{\infty}\exp\left(-t^{2}\right)dt, \qquad (4)$$

.Для этих функций имеют место соотношения

$$\mathrm{erf}(-x)=-\mathrm{erf}(x);\quad 0<\mathrm{erf}(x)<1;\quad \mathrm{erf}(0)=0;\quad \mathrm{erf}(¥)=1;$$

С интегралом вероятности эти функции связаны соотношениями

$$\Phi(x)=\left(1+erf\left(x/\sqrt{2}\right)\right)/2;\quad erf\,(x)=2\Phi\left(x\sqrt{2}\right)-1;$$

Центральные моменты m_k равны:

$$m_k=<(x-m)^k>=\begin{cases}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(k-1)s^{\,k}, & k-\textit{четное}\\ 0, & k-\textit{нечетное}\end{cases} \qquad (5)$$

<u>РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ.</u> Так как интеграл вероятности $\Phi(x)$ является специальной функцией, то простого аналитического соотношения для $\Phi(x)$ нет. Для расчета $\Phi(x)$ можно использовать следующие аппроксимации

$$\Phi(x)=1-\exp\left(-x^2/2\right)\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3\right)/\sqrt{2p}+e;\quad x>0;\quad e<10^{-5}; \qquad (6)$$

$$t=1/\left(1+p|x|\right);\quad p=0.33267;\quad a_1=0.4361836;\quad a_2=-0.1201676;\quad a_3=0.937298;$$

$$\Phi(x)=1-\exp\left(-x^2/2\right)\left(b_1t+b_2t^2+b_3t^3+b_4t^4+b_5t^5\right)/\sqrt{2p}+e;\quad e<7.5\cdot 10^{-8}; \qquad (7)$$

$$t=1/\left(1+p|x|\right);\quad p=0.2316419;\quad b_1=0.31938153;\quad b_2=-0.356563782;$$

$$b_3=1.781477937;\quad b_4=-1.821255978;\quad b_5=1.330274429;$$

Для уточнения значений $\Phi(x)$ при больших аргументах x может применяться асимптотический ряд (x > 2)

$$\Phi(x)=1-\frac{\exp\left(-x^2/2\right)}{\sqrt{2p}\cdot x}\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\ldots+\frac{(-1)^n1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{x^{2n}}\right) \qquad (8)$$

Для расчетов целесообразно брать $n=3-5$ и $x>2.5\ldots 5$.

Стандартные функции системы MCAD

cnorm(x) – вычисляет интеграл вероятностей $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$

pnorm(x,m,s) вычисляет функцию распределения $F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

erf(x) вычисляет функцию ошибок $(2/\sqrt{\pi})\int_0^x\exp(-t^2)dt$

dnorm(x,m,s) – вычисляет $w(x)=\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)/\sqrt{2\pi\sigma^2}$

qnorm(p,m,s)-вычисляет квантиль нормального закона с параметрами (μ,σ) для вероятности p . Квантиль распределения порядка p является решением уравнения $F(x_q)=\Phi((x_q-\mu)/\sigma)=p$. Вычисляет обратную функцию к $\Phi\left((x-m)/\sigma\right)$

Контрольные задания

1. Запрограммировать вычисление по формуле (6), (7).
2. Запрограммировать вычисление по формуле (8).
3. Сравнить вычисление интеграла вероятности при помощи функции cnorm(x), аппроксимации (6) и асимптотической формулы (8). Построить графики различных представлений 1-Φ(x) в диапазоне 1<x<8 в логарифмическом масштабе.
4. Сформировать реализацию из 100 гауссовских чисел, используя функцию rnorm(n,μ,σ), построить график этой реализации.

Задачи

1. Для стандартной гауссовской случайной величины $x \to N(0{,}1)$ вероятность какого из неравенств больше $P(|x| < 0.7)$ или $P(|x| > 0.7)$.
2. Генератор шума вырабатывает гауссовский случайный процесс с параметрами $m=0$ и $s = 1.5$ вольта. Чему равна вероятность того, что мгновенные значения шума находятся в интервале [-1.5 в; +1.5 в], [-3 в; +3 в], [-4.5 в; +4.5 в].
3. На пороговое устройство с напряжением срабатывания $\boldsymbol{h}$ вольт подается гауссовский шум с параметрами $\boldsymbol{m=0.2}$ *в* и $s = 0.25$ в. Рассчитать вероятность превышения мгновенными отсчетами шума порогового уровня 0.2<$\boldsymbol{h}$<2.5 v.
4. Рассчитать вероятность пропуска β(A) импульса с амплитудой A, лежащей в диапазоне, 0.4<A<=1.5 v, который поступает вместе с шумом с параметрами m=0 и $s = 0.5$ в на пороговое устройство с уровнем срабатывания 0.6 в. Построить зависимость β(A), проследить динамику этой ошибки при различных σ.
5. Вероятность ложной тревоги при обнаружении на интервале, содержащем «m» элементов разрешения, определяется выражением $P_{ЛТ} = 1 - \Phi^m(u)$. Рассчитайте вероятность ложной тревоги для $u \in [0;5]$ при значениях m=1, 10, 20.
6. Вероятность ошибки различения неортогональных видеосигналов определяется формулой $P_{ОШ} = 1 - \Phi\left(u\sqrt{(1-R_S)/2}\right)$. Рассчитайте зависимость $P_{ОШ}(u)$ для $u \in [0;6]$ при значениях R_S =0.2, 0.5, 0.8.
7. Ошибка различения M сигналов с системе связи определяется формулой $P_e(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/2)\Phi^{M-1}(u+z)du$. Заменяя ∞ числовым значением 5, исследуйте Pe(z) в диапазоне 0< z<6 при разных M (M=2,3,5,10)
8. Найти квантиль гауссовского распределения, соответствующий вероятности $P = 0.4, 0.9, 0.95, 0.99$ при m=1, σ=1, 1.5
9. Построить и проанализировать двумерную гауссовскую плотность вероятности $w(x,y) = \exp\left(-(x^2 - 2rxy + y^2)/2(1-r^2)\right)/2\pi\sqrt{(1-r^2)}$ в диапазоне {–2<x,y<2}

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4
МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Формирование непрерывных случайных величин

Имеется несколько методов формирования непрерывных случайных величин из равномерных и гауссовских чисел.

1. Метод обратных функций. Если необходимо сформировать случайную величину ξ с функцией распределения $F_x(x)$, то используется преобразование базового равномерно распределенного числа $\alpha \in [0,1]$ вида

$$\xi = F_\xi^{-1}(\alpha),$$

где $F_\xi^{-1}(z)$-функция, обратная к функции распределения.

Пример: Сформировать релеевскую случайную величину ξ с плотностью вероятности $$w_\xi(x) = \frac{x}{\sigma^2} exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}).$$

Решение: $F_\xi(x) = 1 - exp(-x^2/2\sigma^2)$. Уравнение для нахождения ξ имеет вид $\alpha = 1 - \exp(-\xi^2/2\sigma^2)$. Его решение $\xi = \sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)}$. Здесь учтена статистическая эквивалентность величин α и 1-α.

2. Метод Неймана (метод исключения). Пусть $g(x) = c \times w_\xi(x)$, где C-некоторая константа, $a<x<b$, $g(x)<M$. Кривая g(x) вписана, таким образом, в прямоугольник. Формируем два равномерно распределенных числа $\gamma_1 = a + (b-a)\cdot\alpha_1$, $\gamma_2 = M\alpha_2$, которые рассматриваются как координаты случайной точки в этом прямоугольнике. Если $\gamma_2 \le g(\gamma_1)$, то есть точка лежит под кривой, то $\xi \equiv \gamma_1$. Иначе эта точка отбрасывается.

   Пример. Сформировать случайную величину ξ с плотностью вероятности $$w_\xi(x) = \pi \times cos(2\pi x),\ x \in [-0.25, 0.25].$$

Решение: g(x)=cos(2πx), $\gamma_1 = 0.25(2\alpha_1 - 1)$, $\gamma_2 = \alpha_2$. Если $\gamma_2 < \cos(2\pi\gamma_1)$, то $\xi = \gamma_1$.

3. Формирование случайных величин с χ_n^2, χ_n законами распределения.

Пусть $\eta_1,...\eta_n$ независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами m=0,σ=1. Тогда

$$\xi = \chi_n^2 = (\eta_1^2 + ...\eta_n^2), \qquad \xi = \chi_n = \sqrt{(\eta_1^2 + ..\eta_n^2)}.$$

4. Формирование стандартных гауссовских случайных величин на основе центральной предельной теоремы. Алгоритм

$$\xi = \sqrt{12/n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - 0.5)$$

формирует случайное число с распределением, близким к нормальному. Частным случаем его является алгоритм $\xi = \sum_{i=1}^{12}\alpha_i - 6$. Хорошим качеством случайных чисел обладает метод суммирования 5 чисел с поправкой $\eta = \xi + 0.01(\xi^3 - \xi)$.

Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Метод 1.0 $I = \int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f(\gamma_i)$, где $\gamma_i = a + (b-a)\cdot\alpha_i$

Здесь n- число испытаний, α_i-независимые стандартные равномерно распределенные на интервале [0,1] случайные числа.

Метод 2.0 $I = \int_a^b f(x)dx \approx k/n$,

где k- количество событий $a < \xi < b$ в n испытаниях, ξ имеет плотность вероятности $w_\xi(x) = f(x)$. ξ формируется из α путем соответствующего нелинейного преобразования на основе метода обратных функций или метода Неймана.

Метод 3.0. Пусть функция f(x) вписана в прямоугольник: a<x<b, 0<y<M. Формируем пару равномерно распределенных чисел $\gamma_1 = a + (b-a)\cdot\alpha_1$, $\gamma_2 = M\alpha_2$, рассматривая их как координаты случайной точки в прямоугольнике. Затем подсчитываем количество точек k, попавших под кривую f(x), т.е. при выполнении условия $\gamma_2 \le f(\gamma_1)$ в n испытаниях. Тогда

$$I = \int_a^b f(x) \approx c(b-a)\frac{k}{n}$$

Задания.

1. Сформировать гауссовский случайный процесс из 200 независисмых случайных чисел. Построить график процесса. Найти матожидание и дисперсию процесса.
2. Сформировать релеевский процесс из 100 независимых случайных чисел согласно алгоритму $\xi=\sigma\sqrt{-2\ln(\mathrm{rnd}(1))}$. Вычислить первый и второй начальные моменты и сравнить с теоретическими значениями.
3. Сформировать процесс с χ_n^2распределением, используя функцию rchisq(NN,n), где NN=100 объем выборки, n – число степеней свободы. Вычислить мат. ожидание и дисперсию процесса, сравнить их с теоретическими значениями.
4. Сформировать процесс с экспоненциальным распределением, используя функцию rexp(NN, λ). NN- объем выборки, λ- параметр распределения. (λ=1, 2) . Вычислить мат. ожидание и дисперсию процесса, сравнить их с теоретическими значениями.
5. Сформировать процесс с χ_n распределением согласно алгоритму $\xi = \sigma\sqrt{\eta_1^2 + .. + \eta_n^2}$, η_k~N(0,1). Вычислить первый и второй начальные моменты и сравнить с теоретическими значениями.

6. Сформировать процесс с гамма-распределением при различных значениях параметра “**с**”.
7. Сформировать 100 значений пуассоновской случайной величины с параметром λ=0.4, 1, 8
8. Сформировать 100 значений биномиальной случайной величины с параметрами p=0.4, k=4, 20, 100.

Вычисление интегралов методом Монте-Карло.

1. $\int_0^2\int_0^2 exp(-x-y)dxdy$; 2. $\int_0^{10}\int_0^{10} x^n y^m exp(-x-y)dxdy,\ n=3, m=2$;

3. $\int_0^b sh(x)dx,\ b=1,\ 2$; 4. $\int_0^b ch(x)^2 dx,\ b=0.5,\ 1.2$; 5. $\int_0^b th(x)dx,\ b=1,\ 1.5$;

6. $\int_0^1 x^m\sqrt{1-x^2}dx,\ m=1,2,3$; 7. $\int_0^\pi sin(x)^m cos(mx)dx,\ m=2,3,4$;

8. $\int_0^b exp(-x^2/2)dx/\sqrt{2\pi},\ b=1,\ 1.5,\ 2$; 9. $\int_0^b x\cdot exp(-x^2/2)dx,\ b=1,\ 2$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ

ЧАСТЬ 1. ВЫБОРОЧНЫЕ МОМЕНТЫ. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. Набор значений $\vec{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$ измеряемой величины x, полученный при n -кратном повторении эксперимента, называется реализацией выборки. Можно считать, что все возможные реализации составляют случайную выборку $\vec{X}=(X_1, X_2,..., X_n)$.: Оценкой $\Theta_m=\Theta_m(\vec{x})$ параметра Q называется некоторая статистика (функция выборки) $\Theta_m(\vec{x})$, приближенно соответствующая Q, и при объеме выборки $n\to\infty$ сходящаяся (в вероятностном смысле) к истинному значению параметра. Случайная оценка Θ_m может быть охарактеризована следующими числовыми значениями:

1) средним значением оценки: $m_\Theta = <\Theta_m> = \int_{-\infty}^{+\infty} uW_\Theta(u)du;$

2) смещением оценки: $b(\Theta)=m_\Theta-\Theta;$

3) дисперсией оценки: $D_\Theta = <(\Theta_m-m_\Theta)^2> = \int_{-\infty}^{+\infty}(u-m_\Theta)^2 W_\Theta(u)du;$

4) доверительной вероятностью P_0 и доверительным интервалом Δ, $P\left[|\Theta_m-\Theta|<\Delta\right]=P_0$, $\int_{\Theta-\Delta}^{\Theta+\Delta} W_\Theta(u)du=P_0$. Здесь $W_\Theta(u)$- плотность вероятности оценки.

ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ОЦЕНОК

1. Параметр $\Theta \equiv m_x$ - математическое ожидание:

Оценка: $\Theta_m = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i;$ (1)

смещение оценки: $b(\Theta) = 0;$ дисперсия оценки: $D_\Theta = \sigma_x^2/n;$ распределение оценки – нормальное, т.е. $\Theta_m \to N(\Theta, \sigma^2/n);$ доверительный интервал: $\Delta = \sigma\, z_p/\sqrt{n}$, где $z_p = \Phi^{-1}((1+P_0)/2).$

2. Параметр $\Theta \equiv \sigma_x^2$ - дисперсия:

   a. математическое ожидание известно

Оценка: $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_\xi\right)^2;$ (2)

смещение: $b(\Theta) = 0;$ дисперсия: $D_\Theta = 2\sigma_s^4/n \approx 2s^4/n;$ распределение: χ_n^2 - хи-квадрат (при n>100 – асимптотически нормальное); асимптотически доверительный интервал $\Delta = \sigma_\xi^2 z_p\sqrt{2/n} \approx s^2 z_p\sqrt{2/n}$ где $z_p = \Phi^{-1}((1+P_0)/2)$..

   b. математическое ожидание неизвестно

Оценка $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2;$ (3)

смещение: $b(\Theta) = 0;$ дисперсия: $D_\Theta = 2\sigma^4/(n-1) \approx 2s^4/(n-1);$ распределение: χ_{n-1}^2 (при n>100 – асимптотически нормальное)

3. Параметр m_k - начальный момент k-ого порядка:

Оценка: $\tilde{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$ (4)

смещение: $b(\Theta) = 0;$ дисперсия: $D_\Theta = \left(m_{2k} - m_k^2\right)/n$.

4. Параметр μ_k - выборочный центральный момент k-ого порядка

Оценка: $\tilde{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_\xi\right)^k, \quad \hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^k;$ (5)

смещение: $\tilde{\mu}_k$ - несмещенная, $\hat{\mu}_k$ - асимптотически несмещенная.

5. Связь $\tilde{m}_k$ и $\hat{\mu}_k$ при k=2,3,4

$\hat{\mu}_2 = \tilde{m}_2 - (\bar{x})^2; \quad \hat{\mu}_3 = \tilde{m}_3 - 3\tilde{m}_2\bar{x} + 2(\bar{x})^3; \quad \hat{\mu}_4 = \tilde{m}_4 - 4\tilde{m}_3\bar{x} + 6\tilde{m}_2(\bar{x})^2 - 3(\bar{x})^4.$ (6)

6.Параметр - выборочные коэффициенты асимметрии $\tilde{g}_1$ и эксцесса $\tilde{g}_2$

$\tilde{\gamma}_1 = \hat{\mu}_3/s^3, \quad \tilde{\gamma}_2 = \hat{\mu}_4/s^4 - 3.$ (7)

Задание “А” (Моделирование выборки)

1. Обратиться к датчику-генератору случайных величин из библиотеки стандартных функций Matcad
   a) rnorm(n,μ,σ) ; b)rexp(n,λ); c) rchisq(N, nn); d)rpois(n, λ);
   e) rbinom(n,k,p); f)rgamma(n,c) ; g) runif(n,a,b); h)$\xi = \sigma\sqrt{-2\ln(\mathrm{rnd}(1))}$ σ=1, 0.5,2.

–датчик релеевской случайной величины.

2. Сформировать выборку объемом $n = 10^3$. Параметры процедуры задаются пользователем.
3. Вычислить выборочные моменты: $\bar{x}$, s^2, $\hat{m}_2$, $\hat{m}_3$, $\hat{m}_4$.
4. Определить выборочные коэффициенты асимметрии $\tilde{g}_1$ и эксцесса $\tilde{g}_2$.
5. Вычислить теоретические моменты распределений и сравнить с экспериментальными.
6. Определить доверительные границы оценок параметров для значений доверительных вероятностей $P_0 = 0.9; 0.95$;

Задание “В” (Выборка из файлов данных)

1. Считать данные из файлов V1.prn ….V12.prn
2. Определить тип случайной величины
3. Вычислить моменты $\bar{x}$, s^2, $\hat{m}_2$, $\hat{m}_3$, $\hat{m}_4$.
4. Определить выборочные коэффициенты асимметрии $\tilde{g}_1$ и эксцесса $\tilde{g}_2$.

ЧАСТЬ 2. ВЫБОРОЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. Теоретическими вероятностными характеристиками для непрерывной случайной величины x являются: плотность вероятности $W_x(x)$; функция распределения $F_\xi(x) = P[\xi < x] = \int_{-\infty}^{x} W_\xi(t)\,dt$.

Для дискретной случайной величины x:
распределение вероятностей $P_k = P[x = x_k]$; функция распределения $F_\xi(x) = \sum_{k: x_k < x} x_k P_k$;

При проведении эксперимента теоретическое распределение $F_\xi(x)$ может быть:

a) либо известно частично, с точностью до некоторых неизвестных параметров;
b) либо полностью неизвестным.

В первом случае экспериментальное определение $W_x(x), F_x(x), P_k$ сводится к оценке параметров распределения, которые находятся из выборочных моментов $\bar{x}$, s^2, $\hat{m}_2$., рассмотренных в части I работы.

Во втором случае производится непараметрическая оценка распределения на основе 1) эмпирической функции распределения, 2) гистограммы, 3) полигона накопленных частот. *Эмпирической функции распределения* называется оценка $F_\xi(x)$ по несгруппированной выборке. *Гистограммой* называется оценка плотности вероятности $W_x(x)$ по сгруппированным данным. *Полигоном накопленных частот* называется оценка функции распределения $F_x(x)$ по сгруппированным данным.

I.Правило построения эмпирической функции распределения.

1. Берется выборка $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ объемом n>100, производится ее упорядочивание $x_{(1)} < x_{(2)} .... < x_{(n)}$.

2. Строится функция $F_n(t,\vec{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U(t - x_{(i)})$, где U(t)- функция Хевисайда

II. Правило построения гистограмм:

1. Берется выборка $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ объемом n>100, как правило, $n \approx (2 \div 20)10^2$.
2. Определяется число интервалов группировки $\boldsymbol{r}$:

   a) $r = (0.55 \div 1.25)n^{0.4}$; b) $r = (4 \div 5)\lg n$. (8)

   Обычно число интервалов группировки 9<r<21 . Если распределение предполагается симметричным, то $\boldsymbol{r}$ желательно брать нечетным.
3. Определяются длина и границы интервалов группировки. Для всех $x_i : a < x_i < b$, где

   $$d = (b - a) = 1.02(x_{max} - x_{min}), \quad \Delta x = d / r = 1.02(x_{max} - x_{min}) / r,$$

   $$a = x_{min} - 0.01\Delta x, \quad a = x_{max} + 0.01\Delta x.$$

   Границы j-ого интервала $\Delta j : \Delta j = (a + (j-1)\Delta x; a + j\Delta x), \quad j = \overline{1,r}$ (9)

   Для односторонних распределений (экспоненциального, релеевского, хи-квадрат и др.) $a=0$.
4. Подсчитывается количество k_j элементов выборки $\bar{x}$, попавших в интервал группировки $\Delta j = (a + (j - 1)\Delta x; a + j\Delta x)$ Число $k_j > 5 \div 10$.
5. Определяются частоты $\nu_j : \nu_j = k_j / n$ (10)

либо относительные частоты $\omega_j : \omega_j = \nu_j / \Delta x = k_j / n\Delta x$ и строится диаграмма из столбцов высотой n_j или w_j, $j = \overline{1,r}$.

Гистограмма меньше всего отличается от теоретической в центре интервала группировки $(a + (j - 0.5)\Delta x)$

III. Правило построения полигона накопленных частот:

Берется выборка и определяется число интервалов группировки так же, как и при построении гистограммы (пункты 1,2,3).

4. Подсчитывается количество K_q элементов выборки $\bar{x}$, попавших в интервал $(a; a + q\Delta x)$,

   $$K_q = \sum_{j=1}^{q} k_j, \quad q = \overline{1,r} \qquad (11)$$

5. Определяются выборочные вероятности

   $$F_q = K_q / n = \sum_{j=1}^{q} \nu_j \qquad (12)$$

   и строится ступенчатая диаграмма, высота которой равна F_q на интервале $\Delta q = [a + (q - 1)\Delta x; a + q\Delta x)$.

Полигон меньше всего отличается от теоретической функции распределения в конце интервала группировки.

III. Сравнение теоретического и эмпирического распределений

Вероятностная бумага. Вероятностная бумага принадлежит к полукачественному критерию, на основе которого можно судить о соответствии эмпирического распределения и предполагаемого теоретического распределения.

Этапы проверки:

1. Построение обратной функциональной зависимости для функции распределения $y = F_\xi(x): \ y^* = F_\xi^{-1}(y)$ (13)
2. Построение полигона накопленных частот $F_q, q = \overline{1,r}$
3. Пересчет полигона накопленных частот $F_q^* = F_\xi^{-1}(F_q), q = \overline{1,r}$. (14)
4. Построение в системе координат (x, y^*) графиков по точкам (x_q, F_q^*), где $x_q = a + q\Delta x$.
5. Если график пересчитанного полигона накопленных частот F_q^* - прямая линия, то эмпирическое распределение F_q соответствует $y = F_x(x)$, иначе соответствия нет.

Критерий согласия c^2 (хи-квадрат) Пирсона. Критерий согласия c^2 Пирсона принадлежит к универсальным количественным критериям. С помощью этого критерия можно проверить соответствие теоретического и эмпирического распределений для любого типа случайных величин: непрерывных, дискретных. Он имеет вид:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(k_j - np_j)^2}{np_j} = n \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - p_j)^2}{p_j} = n\left(\sum_{j=1}^{r} \frac{\nu_j^2}{p_j} - 1 \right) < \chi^2_{кр}(\alpha, l) \qquad (15)$$

Здесь n - объем выборки, r- число интервалов группировки, $n_i = k_j / n$- частота попадания выборки $\overset{\bullet}{x}$ в интервал $\Delta j = (a + (j-1)\Delta x; a + j\Delta x)$, $j = \overline{1,r}$, p_j - теоретическая вероятность попадания случайной величины x в интервал Δj,

$$p_j = \int_{a+(j-1)\Delta x}^{a+j\Delta x} W_\xi(x)dx = F_\xi(a + j\Delta x) - F_\xi(a + (j-1)\Delta x)$$

$c^2_{кр}(a, l)$ - критическое значение, зависящее от параметров a и l, a - уровень значимости (вероятность отбросить правильную гипотезу о соответствии распределений), $l = r - 1 - \text{v}$- число степеней свободы, где v - количество неизвестных параметров в теоретическом распределении, которые доопределяются по той же выборке $\overset{\bullet}{x}$.

Например:

a) $F_x(x) = \Phi((x-m)/s)$, где m и s известны (или заданы). Тогда v=0.

b) $F_x(x) = \Phi((x-m)/s)$, где m неизвестно, а s задано. Тогда $m \approx \bar{x} = \left(\sum x_i\right)/n$ и v=1.

c) $F_x(x) = \Phi((x-m)/s)$, где m и s неизвестны. Тогда $m \approx \bar{x} = \left(\sum x_i\right)/n$, $s^2 \approx s^2 = \left(\sum (x_i - \bar{x})^2\right)/(n-1)$ и v=2.

Типичные значения уровня значимости a=0.1, 0.05, 0.01. Чаще всего a=0.1.

Критические значения $c_{кр}^2(a,l)$, являются квантилями вероятностей 1 - a для хи-квадрат распределения с l -степенями свободы - c_l^2, которые вычисляются при помощи функции Mcad **qchisq(*1*-*a*,*l*).**

Построение гистограмм в системе Mcad

Для построения гистограмм в системе **Mcad** имеется функция **hist(int,X).** Здесь **X** -выборка из **n** элементов, **int** – массив границ интервалов группировки, содержащий **r**+1 элемент, **r** - число интервалов группировки. Результатом вычислений этой функции является массив из **r** элементов $\mathbf{k_j}$,определяющих число элементов выборки из интервала $\mathbf{[int_j, int_{j+1}], j=0..r-1}$.

Задание "А" (Моделирование выборки)

1. Обратиться к датчику-генератору случайных величин из библиотеки стандартных функций Matcad

a) rnorm(n,μ,σ) ; b)rexp(n,λ); c) rchisq(N, nn); d) rpois(n, λ);

e) rbinom(n,k,p); f)rgamma(n,c) ; g) runif(n,a,b); h)$\xi=\sigma\sqrt{-2\ln(\alpha)}$ σ=1, 0.5,2. релеевская случайная величина.

2. Сформировать выборку объемом n=50÷400. Построить эмпирическую функцию распределения $F_n(t,x_n)$. Исследовать ее эволюцию от объема *n*. Сопоставить с теоретической функцией распределения.
3. Сформировать выборку $(x_1, x_2,...,x_n)$ объемом $n=10^3 \div 2\cdot 10^3$. Параметры процедур задаются преподавателем.
4. Для непрерывных случайных величин строится гистограмма n_j и полигон накопленных частот F_q . Для дискретных - распределение вероятностей P_j и полигон F_q .
5. По критерию согласия хи-квадрат Пирсона проверяется гипотеза о соответствии теоретического и эмпирического распределений.
6. Для непрерывных случайных величин строится вероятностная бумага и наносятся пересчитанные значения полигона $F_q*(x_q), \quad x_q=a+q\Delta x, \quad q=\overline{1,r}$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6
МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. Метод наименьших квадратов используется для аппроксимации функциональных зависимостей, полученных экспериментальным путем, кривыми $y=f(t,\vec{\Theta})$ заданной формы, но содержащими вектор неизвестных параметров $\vec{\Theta}=(\Theta_1,...,\Theta_k)$. Процедура МНК позволяет на основе реализации $\vec{x}=(x_1,...,x_L)$ определить коэффициенты $(\Theta_1,...,\Theta_k)$.

Пусть результаты измерений $x_i, i=\overline{1,L}$ являются выборкой в моменты времени t_i процесса

$$x(t) = f\left(t,\vec{\Theta}\right) + \varepsilon(t)\,. \qquad (1)$$

Если $\varepsilon(t_i) \to N(0,\sigma^2)$, т.е. имеют нормальный закон распределения, то функция правдоподобия имеет вид

$$W\left(\vec{x}\middle|\vec{\Theta}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{L}\left[\left(x_i - f\left(t_i,\vec{\Theta}\right)\right)^2 \Big/ \left(2\pi\sigma^2\right)^{L/2}\right]\right\}.$$

В качестве оценки параметра Θ можно взять ОМП. Максимуму функции правдоподобия соответствует минимум выражения

$$M\left(\vec{\Theta}\right) = \sum_{i=1}^{L}\left(x_i - f\left(t_i,\vec{\Theta}\right)\right)^2. \qquad (2)$$

Решая систему уравнений

$$dM\left(\vec{\Theta}\right)\Big/d\Theta_j = 0, \quad j = \overline{1,k}\,, \qquad (3)$$

получаем вектор оценок $\hat{\vec{\Theta}} = \left(\hat{\Theta}_1,\ldots,\hat{\Theta}_k\right)$ параметра $\vec{\Theta}$.

В МНК целесообразно использовать линейно-параметрические модели функций

$$f\left(t,\vec{\Theta}\right) = \Theta_0 g_0(t) + \Theta_1 g_1(t) + \ldots + \Theta_k g_k(t)\,, \qquad (4)$$

где $g_j(t),\ j = \overline{1,k}$ - набор некоторых функций. Наиболее употребительны из таких моделей аппроксимация полиномом

$$f\left(t,\vec{\Theta}\right) = \Theta_0 + \Theta_1 t + \Theta_2 t^2 + \ldots + \Theta_k t^k = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + \ldots \qquad (5)$$

Тогда получаем систему k линейных уравнений относительно $A, B, C, \ldots$, решаемую одним из численных методов для систем алгебраических выражений. Например, для кубического полинома система имеет вид

$$\begin{aligned}
&AL + B\sum t_i + C\sum t_i^2 + D\sum t_i^3 = \sum x_i\\
&A\sum t_i + B\sum t_i^2 + C\sum t_i^3 + D\sum t_i^4 = \sum x_i t_i\\
&A\sum t_i^2 + B\sum t_i^3 + C\sum t_i^4 + D\sum t_i^5 = \sum x_i t_i^2\\
&A\sum t_i^3 + B\sum t_i^4 + C\sum t_i^5 + D\sum t_i^6 = \sum x_i t_i^3
\end{aligned}$$

Эта система упрощается, если перейти к центрированному аргументу $\dot{t} = t - \bar{t},\ \bar{y} = \sum_{i=1}^{L} t_i / L$, то есть перенести ось координат в точку $\bar{t}$. Тогда суммы всех нечетных степеней $\sum \dot{t}_i = 0,\quad \sum \dot{t}_i^3 = 0,\quad \sum \dot{t}_i^5 = 0$, и т.д.

Аппроксимация полиномами $f(t) = \sum_j^k \Theta_j t^j$ имеет следующие особенности:

a) $k \le L$; т.е. число неизвестных коэффициентов k не должно превышать число точек;
b) $k \le 5$, так как численные методы при $k > 5$ становятся неустойчивыми и плохо обусловленными.

Если функция $f\left(t,\vec{\Theta}\right)$ по условиям задачи нелинейно-параметрическая, то можно сделать обратное функциональное преобразование $z = f^{-1}(y)$ и привести зависимость к линейной. Например,

$$f\left(t,\vec{\Theta}\right)=\Theta_0 \exp\left(\Theta_1 t\right),\quad z(t)=\ln\left(\Theta_0\right)+\Theta_1 t=A+Bt. \tag{6}$$

Однако такой подход является приближенным, так как при нелинейном преобразовании погрешности $\varepsilon(t)$ дисперсия $\sigma^2=\sigma_i^2$, т.е. изменяется от точки к точке. В этом случае можно усовершенствовать МНК на случай неравноточных измерений или использовать численные методы решения систем нелинейных уравнений.

<u>РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ:</u>

1) Линейная регрессия, линейная функциональная зависимость

$$f\left(t,\vec{\Theta}\right)=\Theta_0+\Theta_1 t=A+B\dot{t},\quad \dot{t}=t-\bar{t}; \tag{7}$$

Система уравнений правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Theta_0 L+\Theta_1\sum_1^L t_i=\sum_1^L x_i &&\Rightarrow\quad AL=\sum_1^L x\\
&\Theta_0\sum_1^L t_i+\Theta_1\sum_1^L t_i^2=\sum_1^L x_i t_i &&\Rightarrow\quad B\sum_1^L \dot{t}_i^2=\sum_1^L x_i\dot{t}_i
\end{aligned} \tag{8}$$

Решение системы уравнений (8)имеет вид

$$\begin{aligned}
&\Theta_0=\frac{\left(\sum t_i^2\right)\left(\sum x_i\right)-\left(\sum t_i\right)\left(\sum x_i t_i\right)}{\Delta_L} &&\Rightarrow\quad A=\frac{1}{L}\sum_1^L x_i=\bar{x}\\
&\Theta_1=\frac{L\left(\sum x_i t_i\right)-\left(\sum t_i\right)\left(\sum x_i\right)}{\Delta_L} &&\Rightarrow\quad B\sum_1^L x_i\dot{t}_i\Big/\sum_1^L \dot{t}_i^2
\end{aligned} \tag{9}$$

(Очевидно, что $B=\Theta_1\quad A=\Theta_0+\Theta_1\bar{t}$) где $\Delta_L=L\left(\sum t_i^2\right)-\left(\sum t_i\right)^2,\quad i=\overline{1,L}$

2) Нелинейная регрессия (экспоненциальная модель)

$$f\left(t,\vec{\Theta}\right)=\Theta_0 \exp\left(\Theta_1 t\right), \tag{10}$$

Преобразование

$$\ln\left[f\left(t,\vec{\Theta}\right)\right]=\ln\left(\Theta_0\right)+\Theta_1 t=A+Bt. \tag{11}$$

приводит зависимость к линейной. Обозначая $z_i=\ln\left(x_i\right)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\hat{A}=\ln\hat{\Theta}_0=\frac{\left(\sum t_i^2\right)\left(\sum z_i\right)-\left(\sum t_i\right)\left(\sum z_i t_i\right)}{\Delta_L}\\
&\hat{B}=\hat{\Theta}_1=\frac{L\left(\sum z_i t_i\right)-\left(\sum t_i\right)\left(\sum z_i\right)}{\Delta_L},
\end{aligned} \tag{12}$$

здесь $\Delta_L=L\left(\sum t_i^2\right)-\left(\sum t_i\right)^2,\quad i=\overline{1,L}$

Функции системы Matcad для регрессионного анализа

Пусть вектор аргументов t_i обозначен как **vt**, а вектор выборочных значений функции x_i как **vx.** Тогда функции Matcad при задании зависимости f(t)=A+Bt определяют A и B:

intercept(vt,vx) – возвращает значение A

slope(vt,vx)- возвращает значение коэффициента наклона B.

Если задана линейно параметрическая зависимость $X(t)= a_0f_0(t)+a_1f_1(t)+..a_nf_n(t)$, то функция **linfit(vt,vx,F)** возвращает вектор $(a_0,a_1,..a_n)$. Здесь F –имя векторной функции F(t), элементами которой являются функции $f_1(t)$, $f_2(t)\ldots f_n(t)$

Для контроля МНК полезна функция **corr(vt,vx)**, определяющая коэффициент корреляции векторов **vt, vx**. Если он меньше 0.9÷0.95, то МНК нельзя применять

Задания

1) Линейная регрессия:

   Предполагаемая зависимость сопротивления материала от температуры имеет вид $R(T)= A+BT$. Выбрать данные из файлов MNK_G1.prn, … MNK_G10.prn. Используя решения (9), найти оценки A и B. Объем выборки L=20.

2) Нелинейная регрессия (экспоненциальная модель):

   Изменение активности радиоактивного источника определяется $F(t)=Q\exp(-bt)$. Выбрать данные из файлов MNK_E1.prn, … MNK_E10.prn. Используя решения (9), найти оценки Q и b. Объем выборки L=20.

3) Вольт-амперная характеристика мощного полевого транзистора аппроксимируется функцией $I_c = I_0 + SU_3 + cU_3^2 + d\cdot U^3$. В файлах MNK_T1.prn MNK_T5.prn приведены по 20 значений зависимости $I_c(U_3)$. Найти оценки I_0, S, c, d.

4) Передаточная характеристика частотного детектора описывается функцией $U_{вых} = k\cdot F + d\cdot F^3$. В файлах MNK_det1.prn,… MNK det5.prn приведены по 20 значений зависимости $U_{вых}(F)$.Найти оценки коэффициентов k, d .

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые встроенные функции Mathcad

Обозначения:

x и y — вещественные числа;
z — вещественное либо комплексное число;
m, n, i, j, k — целые числа;
v и все имена, начинающиеся с v — векторы;
A и B — матрицы либо векторы;
M — квадратная матрица.

Элементарные функции

sin(z) — синус   asin(z) — арксинус
cos(z) — косинус   acos(z) — арккосинус
tan(z) — тангенс   atan(z) — арктангенс
cot(z) — котангенс   ln(z) — натуральный логарифм
exp(z) — экспонента   log(z) — десятичный логарифм

Другие функции

Re(z) — действительная часть комплексного числа z.
Im(z) — мнимая часть комплексного числа z.
arg(z) — аргумент комплексного числа z (в радианах).
$d(x,y)$ — символ Кронекера (1, если x=y, и 0, если $x \neq y$; x и y — целочисленные величины.
$\Phi(x)$ — функция Хевисайда (1, если $x \geq 0$, и 0 в противном случае).
ceil(x) — наименьшее целое, не превышающее x.
floor(x) — наибольшее целое число, меньшее или равное x.
mod(x, modulus) — остаток от деления x по модулю. Аргументы должны быть действительными. Результат имеет такой же знак, как и x.
if(cond, x, y) — x, если cond больше 0, иначе y.
until(выражение1, выражение2) — выражение1, пока выражение2 отрицательное.

Функции для матриц и векторов

augment(A, B) — присоединение матрицы B к матрице A справа; обе матрицы должны иметь одинаковое число строк.
cols(A) — число столбцов в матрице A.
csort(A, n) — сортировка матрицы A по столбцу n (перестановка строк по возрастанию значений элементов в столбце n).
submatrix(A, ir, jr, ic, jc) — выделение из матрицы A субматрицы, состоящей из элементов, содержащихся в строках с ir по jr и в столбцах с ic по jc. Для сохранения порядка строк и столбцов необходимо, чтобы $ir \leq jr$, $ic \leq jc$.
diag(v) — диагональная матрица, элементы главной диагонали которой — вектор v.
identity(n) — единичная квадратная матрица размером n.

last(v) — индекс последнего элемента вектора v.
lenght(v) — число элементов в векторе v.
matrix(m, n, f) — матрица, в которой (i, j)-й элемент содержит f(i, j), где i=0, 1, ... , m и j=0, 1, ... , n.
max(A) — наибольший элемент матрицы A.
mean(v) — среднее значение вектора v.
median(v) — медиана.
min(A) — наименьший элемент матрицы A.
norme(M) — евклидова норма матрицы M.
rank(A) — ранг матрицы A.
reverse(v) — перевернутый вектор v.
rows(A) — число строк в матрице A.
rsort(A, n) — сортировка матрицы A по строке n (перестановка столбцов по возрастанию значений элементов в строке n).
sort(v) — сортировка вектора v по убыванию.
stack(A, B) — формирование матрицы путем расположения A над B. Матрицы A и B должны иметь одинаковое число столбцов.
stdev(v) — среднеквадратическое отклонение элементов вектора v.
tr(M) — след матрицы M (сумма элементов, расположенных на главной диагонали квадратной матрицы M).
var(v) — дисперсия (вариация) элементов вектора v.
hist(intervals, data) — гистограмма. Вектор intervals задает границы интервалов в порядке возрастания; data — массив данных. Возвращает вектор, содержащий число точек из data, попавших в соответствующий интервал.

Линейная регрессия и прогноз

corr(vx, vy) — коэффициент корреляции двух векторов — vx и vy.
cvar(X, Y) — ковариация X и Y.
intercept(vx, vy) — коэффициент линейной регрессии $y=a+b \cdot x$ векторов vx и vy.
predict(v, m, n) — прогноз. Вектор, содержащий равноотстоящие предсказанные значения n переменных, вычисленных по m заданным в массиве v данным.
slope(vx, vy) — коэффициент линейной регрессии $y=a+b \cdot x$ векторов vx и vy.

Решение уравнений и систем

lsolve(M, v) — решение системы линейных алгебраических уравнений вида $M \cdot x=v$.
Minerr($x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$) — вектор значений для $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$, которые приводят к минимальной ошибке в системе уравнений.
root(expr, var) — значение переменной var, при которой выражение expr равно нулю (в пределах точности TOL).
polyroots(v) — корни многочлена степени n, коэффициенты которого находятся в векторе v длины n+1.

Основные законы распределения

Функции, имена которых начинаются с “d”, вычисляют плотность вероятности (или вероятность для дискретных величин), с “p” — функции распределения, с “q” — квантили и с “r” — генерируют вектор n случайных чисел с соответствующим законом распределения.

dbeta(x, s_1, s_2), pbeta(x, s_1, s_2), qbeta(p, s_1, s_2), rbeta(n, s_1, s_2) — β-распределение

$$f(x) = \frac{\Gamma(s_1 + s_2)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} x^{s_1 - 1}(1 - x)^{s_2 - 1}, \quad 0 < x < 1, \quad s_1, s_2 > 0.$$

dbinom(k, m, p), pbinom(k, m, p), qbinom(p, m, q), rbinom(n, m, p) — биномаильное распределение

$$P(k) = C_m^k p^k (1 - p)^{m - k}, \quad 0 \le k \le m, \quad 0 \le p \le 1.$$

dcauchy(x, l, s), pcauchy(x, l, s), qcauchy(p, l, s), rcauchy(n, l, s) — распределение Коши

$$f(x) = \frac{1}{\pi s(1 + ((x - l)/s)^2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad s > 0.$$

dchisq(x, k), pchisq(x, k), qchisq(p, k), rchisq(n, k) — χ^2-распределение

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{k/2 - 1} \frac{\exp(-x/2)}{2\Gamma(k/2)}, \quad x > 0, \quad k > 0.$$

dexp(x, r), pexp(x, r), qexp(p, r), rexp(n, r) — экспоненциальное распределение

$$f(x) = re^{-rx}, \quad x > 0, \quad r > 0.$$

dF(x, n_1, n_2), pF(x, n_1, n_2), qF(p, n_1, n_2), rF(n, n_1, n_2) — распределение Фишера

$$f(x) = \frac{\Gamma\left((n_1 + n_2)/2\right) \; n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} x^{(n_1 - 2)/2}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)(n_2 + n_1 x)^{(n_1 + n_2)/2}}, \quad x > 0, \quad n_1, n_2 > 0.$$

dgamma(x, s), pgamma(x, s), qgamma(p, s), rgamma(n, s) — γ-распределение

$$f(x) = \frac{x^{s-1}e^{-x}}{\Gamma(s)}, \quad x \ge 0, s > 0.$$

dgeom(k, p), pgeom(k, p), qgeom(p, q), rgeom(n, p) — геометрическое распределение

$$P(k) = p(1 - p)^k, \quad 0 < p < 1.$$

dlnorm(x, μ, σ), plnorm(x, μ, σ), qlnorm(p, μ, σ), rlnorm(n, μ, σ) — логнормальное (логарифмически нормальное) распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln(x) - \mu)^2 / (2\sigma^2)}, \quad x > 0, \quad \sigma > 0.$$

dlogis(x, l, s), plogis(x, l, s), qlogis(p, l, s), rlogis(n, l, s) — логистическое распределение

$$f(x) = \frac{e^{-(x - l)/s}}{s(1 + e^{-(x - l)/s})^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad s > 0.$$

dnbinom(k, m, p), pnbinom(k, m, p), qnbinom(p, m, q), rnbinom(n, m, q) — отрицательное биномиальное распределение

$$P(k) = C_k^{m + k - 1} p^m (1 - p)^k, \quad 0 < p \le 1, \quad m > 0, \quad k \ge 0.$$

dnorm(x, μ, σ), pnorm(x, μ, σ), qnorm(p, μ, σ), rnorm(n, μ, σ) — нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \ \sigma > 0.$$

dpois(k, λ), ppois(k, λ), qpois(p, λ), rpois(n, λ) — распределение Пуассона

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda > 0, \ k \ge 0.$$

dt(x, k), pt(x, k), qt(p, k), rt(n, k) — распределение Стьюдента

$$f(x) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty, \ k > 0.$$

dunif(x, a, b), punif(x, a, b), qunif(p, a, b), runif(n, a, b) — равномерное распределение

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \le x \le b, \ a < b.$$

dweibull(x, s), pweibull(x, s), qweibull(p, s), rweibull(n, s) — распределение Вейбулла

$$f(x) = s x^{s-1} e^{-x^s}, \quad x > 0, \ s > 0.$$

Другие функции

cnorm(x) — интеграл вероятности $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$.

erf(x) — функция ошибок $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

$\Gamma(z)$ — гамма-функция.

rnd(x) —равномерно распределенное число в диапазоне от нуля до x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов/ В.М. Вержбицкий. – М.:Выс. шк., 2002.-840 с.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы/ Н.С.Бахвалов. М.:Наука, 2000.- 630 с.
3. Тюрин Ю.Н. Статистический анализ данных на компьютере/Ю.Н.Тюрин, А.А. Макаров. М.:Инфа-М, 1998. -528 с.
4. Плис А. И. Mathcad 2000: математический практикум для экономистов и инженеров. Учеб. пособие/А.И. Плис, Н.А. Сливина. — М.: Финансы и статистика, 1999. — 600 с.
5. Гурский Д.А. Вычисления в Mathcad/Д.А. Гурский. — Минск.:ООО «Новое знание», 2003. — 814 с.
6. Радченко Т. А. Теория вероятностей и математическая статистика / Радченко Т. А., Радченко Ю. С. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1998. — 240 с.

Составители: Радченко Юрий Степанович
Захаров Александр Викторович

Редактор Тихомирова Ольга Александровна