

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Решение задач по теоретической механике. Часть 1. Статика.

Учебно-методическое пособие по специальности 010501 (010200)  
Прикладная математика и информатика.

ВОРОНЕЖ  
2005

Утверждено научно-методическим советом факультета ПММ  
(21.02.05, протокол № 6)

Составители: Чеботарев А.С.  
Щеглова Ю.Д.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре Теоретической и прикладной механики факультета ПММ Воронежского государственного университета. Рекомендуется для студентов 2 курса специальности 010501 (010200) «Прикладная математика и информатика», по дисциплине ЕН.Ф.03.1. «Теоретическая механика».

**Оглавление.**

Введение.	4
§1. Основные понятия механики. Механические модели.	5
§2. Классификация векторов.	6
§3. Статика. Аксиомы статики.	8
§4. Примеры действия сил в статике.	9
§5. Свободные, несвободные тела. Виды связей и их реакции.	12
§6. Условия равновесия системы сил.	18
§7. Примеры.	21
§8. Контрольные вопросы для самопроверки остаточных знаний.	35
§9. Задания домашней контрольной работы.	36
§10. Список задач для самостоятельного решения.	41
Литература.	42

## **Введение.**

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов специальности 010501 (010200) “Прикладная математика и информатика”, обучающихся на втором курсе дневного отделения третьем курсе вечернего отделения, по дисциплине ЕН.Ф.03.1. “Теоретическая механика”.

Согласно учебному плану аудиторные занятия по данной дисциплине включают 2 часа лекций и 2 часа практических занятий в неделю, в течение одного семестра. В то же время, объем самостоятельной работы отводимой на освоение предмета составляет 68 часов (72 часа в/о). Предлагаемый учебно-методический материал позволяет студентам индивидуально изучить один из разделов теоретической механики – статику. Определения, положения и постулаты, вводящиеся в статике, затем активно используются в динамике – основном разделе теоретической механики. Пособие включает теоретические основы определения связей и их реакций, главного вектора и главного момента системы сил, уравнение равновесия для общего и всех частных случаев; и практические примеры в виде решения наиболее типичных задач статики.

Так же в пособии содержится список вопросов для самоконтроля и перечень задач для самостоятельного решения.

Итогом изучения статики для студентов факультета ПММ является решение контрольной работы, варианты которой приводятся в пособии, наряду с разбором типичной задачи подобного рода.

## §1. Основные понятия механики. Механические модели.

### Основные понятия механики.

**Теоретическая механика** – это часть физики, которая изучает механическое движение и механическое взаимодействие материальных тел.

**Механическое движение** – перемещение тел относительно друг друга в пространстве и времени.

**Механическое взаимодействие** – действие тел друг на друга, в результате которого происходит либо изменение движения этих тел либо изменение взаимного положения их частиц (деформация).

**Задача механики:** состоит в описании объективных законов механических форм движения материи и их изучения с тем, чтобы объяснить и предсказать конкретные движения материальных объектов.

В основе классической механики лежат следующие понятия: движущаяся материя (материальные тела), пространство и время, масса как мера инертности материальных тел и сила как мера механического взаимодействия между телами.

### Механические модели.

Материальные тела в теоретической механике представляются простейшими моделями:

**материальная точка** – тело, конечной массы, размерами которого можно пренебречь;

**система материальных точек** – совокупность нескольких тел, каждое из которых можно считать материальной точкой, при этом движение и положение каждой точки зависит от движения и положения остальных точек;

**абсолютно твердое тело** (в дальнейшем АТТ) – система материальных точек, расстояние между которыми не меняется при произвольных перемещениях этой системы;

**система абсолютно твердых тел.**

Все физические тела под влиянием приложенных сил изменяют свою форму, причем величина деформации зависит от различных условий: материала, формы, величины и направления силы, температуры и т.д. Жидкость и газ легко деформируются, твердые тела (металл, дерево, и др.) незначительно. В строительном деле, машиностроении и других областях техники тела и нагрузки выбирают так, чтобы возможные деформации не выходили за ограниченные пределы, отсюда следует требование (упрощение) – недеформируемость тел, и возникает естественная абстракция АТТ.

Основной количественной мерой механического взаимодействия тел, характеризующей интенсивность и направление этого взаимодействия, является сила.

Понятия силы зародилось из опытных представлений о давлении одного тела на другое при непосредственном их соприкосновении, о приведении тела в движение при помощи каната и рычага, потом обобщено на силы, возникающие

при упругом деформировании тел, на взаимное притяжение небесных тел, взаимодействие электрически заряженных частиц и т.д.

Сила изменяет движение тела, характер движения зависит от степени податливости тела или от степени инертности тела. Чем больше инертность тела, тем медленнее изменяется его движение под действием данной силы, и наоборот. Мерой инертности материального тела является его масса, зависящая от количества вещества.

Движение тел происходит в пространстве с течением времени. В классической механике движение медленное по сравнению со скоростью света.

Пространство и время в теоретической механике принимаются абсолютными:

**пространство** – трехмерное Евклидово, однородное и изотропное, **время** одинаково во всех точках пространства и для всех тел независимо от их движения.

Для определения положения движущегося тела (или точки), с телом, по отношению к которому изучается движение, жестко связывают какую-либо систему координат, которая вместе с телом образует систему отсчета. Отсчет времени ведется от некоторого момента, который принимается за начальный и обозначается  $t_0$ . Момент времени  $t$  определяется числом секунд, прошедших после начального момента.

Промежуток времени – это разность двух моментов.

Основными единицами измерения в системе СИ являются: единица массы  $[m]=кг$ , длины  $[l]=метр$ , времени  $[t]=секунда$ . Сила в системе СИ измеряется

в Ньютонах, при этом  $H = \frac{кг \cdot м}{с^2}$ .

### **Основные разделы теоретической механики:**

**статика** изучает законы и условия равновесия материальных объектов;

**кинематика** изучает геометрическую сторону движения без причин, вызвавших это движение и без учета массы (свойства инертности);

**динамика** изучает движение с учетом причин, вызвавших движение и с учетом массы.

## **§2. Классификация векторов.**

В зависимости от свойств физических величин, изображаемых векторами, векторы разделяются на:

- 1) свободные (или не связанные),
- 2) скользящие (или связанные с прямой, вдоль которой направлен вектор),
- 3) неподвижные или приложенные (связанные с точкой своего приложения).

Свободный вектор изображает такую векторную величину, которая может быть отнесена к любой точке пространства, не теряя при этом своего первоначального физического смысла, т.е. всякие два равных вектора в этом случае могут представлять ту же самую физическую величину. Так, например,

скорость поступательного движения тела есть свободный вектор, потому что она может быть отнесена к любой точке (рис. 2.1.). Свободный вектор определяется тремя числами (своими проекциями  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$ ).

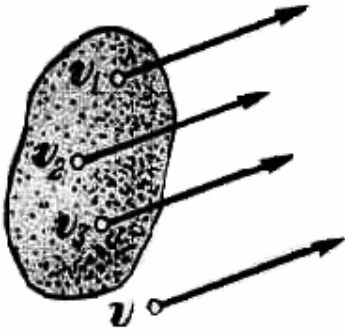


Рис. 2.1.

(основанием вектора); 2) длиной отрезка, изображающего вектор; 3) стороной или направлением действия (это направление обозначается стрелкой на конце вектора). Аналитически скользящий вектор определяется пятью числами, например, тремя проекциями  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  вектора  $a$  и координатами  $x_1$ ,  $y_1$  точки пересечения прямой, вдоль которой направлен этот вектор, с плоскостью  $Oxy$ .

Неподвижный вектор изображает такую физическую величину, которая может быть отнесена лишь к одной определенной точке пространства и теряет свое первоначальное физическое значение, будучи отнесена ко всякой другой точке пространства. Так, скорость движущейся точки представляет собой вектор, связанный с этой точкой. неподвижный вектор, таким образом, определяется шестью числами: тремя проекциями вектора и тремя координатами точки приложения.

При операциях сложения, умножения и дифференцирования скользящие и неподвижные векторы рассматриваются как свободные.

Другая классификация векторов основана на том существенном различии между ними, что направление одних определяется непосредственно по физическому смыслу величин, которые этими векторами изображаются (например, сила, скорость), тогда как другие имеют условное направление, которое физическим смыслом изображаемых ими величин определяется лишь косвенно (например, угловая скорость, момент). Первые векторы называются полярными, а вторые – аксиальными или осевыми.

Скользящий вектор изображает такую величину, которая, не теряя своего первоначального физического смысла, может быть отнесена к любой из точек, лежащих на прямой  $DE$ , вдоль которой направлен вектор, т.е. одну и ту же физическую величину могут в этом случае представлять только те векторы, которые одновременно равны друг другу и направлены вдоль одной и той же прямой; эту прямую, на которой лежит вектор, называют основанием или линией действия вектора (рис. 2.2.). Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу, или угловая скорость. Геометрически скользящий вектор определяется: 1) прямой, на которой он лежит

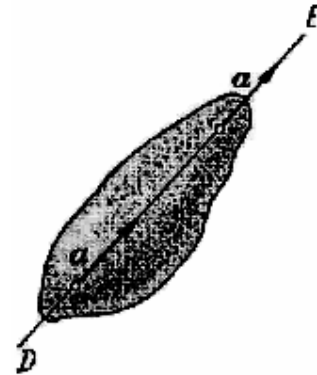


Рис. 2.2.

Выбор направления аксиального вектора зависит от выбора положительного направления вращения, другими словами, от выбора правой или левой системы координат. Переход же от правой системы к левой (или наоборот) может быть совершен простой заменой положительного направления осей на отрицательные. Действительно, правая система  $Oxyz$  при замене положительных направления осей на отрицательные образует показанную пунктиром левую систему координат  $Ox'y'z'$ , которая никакими поворотами не может быть совмещена с правой (рис.2.3.).

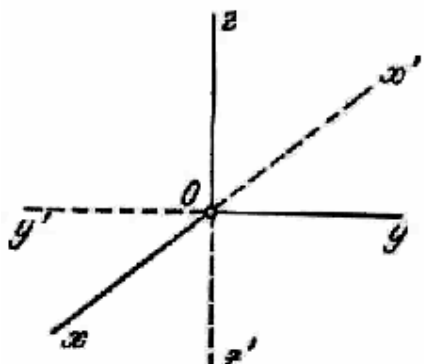


Рис. 2.3.

Заметив это, легко сообразить, что проекции полярного вектора, сохраняющего свою ориентацию в пространстве, при замене осей на прямо противоположные изменяют свой знак, тогда как проекции осевых векторов, меняющих при этом свое направление также на противоположное, должны будут его сохранить. На основании этого можно дать другое определение полярных и аксиальных векторов. Полярным вектором называется такой вектор, проекции которого при изменении направления координатных осей на прямо противоположные меняют свой знак. Аксиальным вектором называется такой вектор, проекции которого при изменении направления координатных осей на прямо противоположные не меняют свой знака.

### §3. Статика. Аксиомы.

Основная задача статики – найти необходимые и достаточные условия равновесия тела или системы тел под действием приложенных сил.

В основе статики лежат следующие аксиомы:

1. Если на свободное АТТ действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис.3.1.).

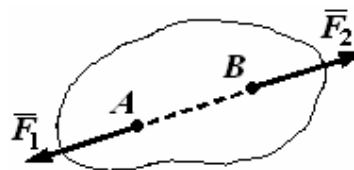


Рис. 3.1.

2. Действие данной системы сил на АТТ не изменяется, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие: действие силы на АТТ не изменится, если перенести точку приложения силы вдоль ее линии действия в любую другую точку тела.

$\vec{F}$  – скользящий вектор (см. §2).

3. Закон параллелограмма сил. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке (рис. 3.2.).



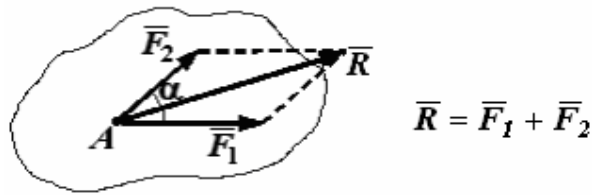


Рис. 3.2.

#### 4. Закон равенства действия и противодействия.

Два тела действуют друг на друга с силами равными по величине, противоположными по направлению, лежащими на одной прямой и приложенными к разным телам (принцип действия-противодействия) (рис. 3.3.).

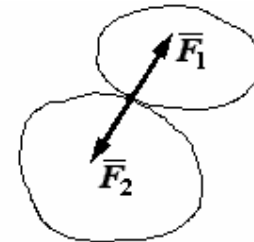


Рис. 3.3.

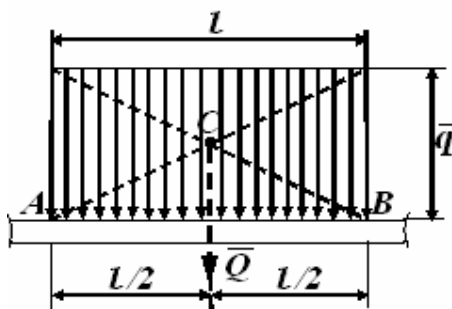
#### 5. Принцип отвердевания.

Равновесие изменяемого (деформируемого) тела, находящегося под действием данной системы сил, не нарушится, если тело считать абсолютно твердым.

### §4. Примеры действия сил в статике.

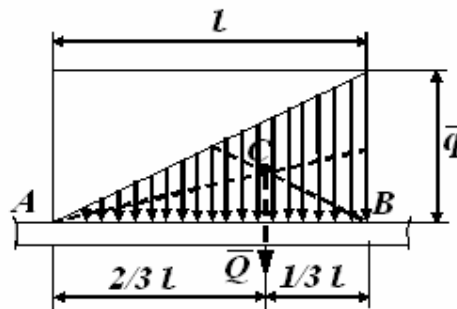
1. Сосредоточенная сила – сила, действующая в одной точке, является абстракцией силы, действующей на небольшой участок. Размерность сосредоточенной силы  $[\bar{F}] = H$  (рис.3.2.).

2. Распределенные силы – силы, действующие на некотором отрезке длины, участке поверхности, части объема. Они характеризуются интенсивностью  $q$ , размерность которой  $[q] = \frac{H}{m}$ ,  $[q] = \frac{H}{m^2}$ ,  $[q] = \frac{H}{m^3}$  на отрезке, участке поверхности, части объема, соответственно. Распределенные силы, действующие на отрезке длины, приводятся к равнодействующей, линия действия которой проходит через точку  $C$ , где точка  $C$  – центр тяжести площади фигуры (рис 4.1 – 4.3.).



$$Q = ql$$

Рис. 4.1.



$$Q = \frac{1}{2}ql$$

Рис. 4.2.

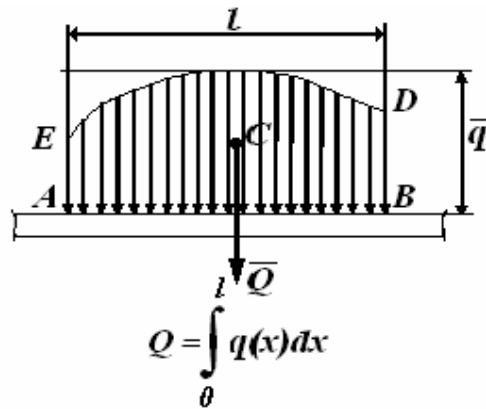


Рис. 4.3.

### 3. Момент силы относительно центра.

Если под действием приложенной силы тело может совершать вращение вокруг некоторой точки, то вращательный эффект силы характеризуется моментом силы. Размерность момента силы  $[\bar{m}_0(\bar{F})] = H \cdot m$ .

Точку, относительно которой берется момент, называют центром момента, а момент силы относительно этой точки – моментом относительно центра.

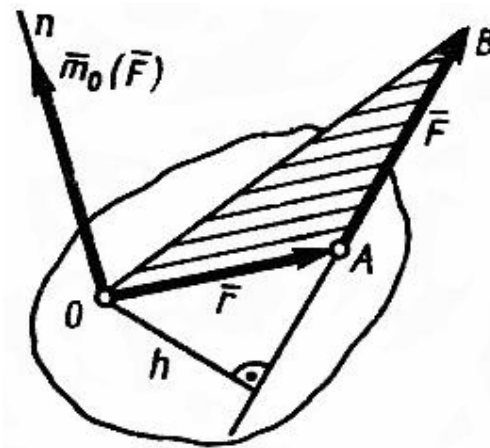


Рис. 4.4.

Рассмотрим силу  $\bar{F}$ , приложенную к телу в точке  $A$  (рис. 4.4.). Из некоторого центра  $O$  опустим перпендикуляр на линию действия силы  $\bar{F}$ ; длину  $h$  этого перпендикуляра называют плечом силы  $\bar{F}$  относительно центра  $O$ . **Момент силы относительно центра  $O$**  равен векторному произведению радиус-вектора  $\bar{r} = \overline{OA}$ , проведенного из центра  $O$  в точку  $A$ , где приложена сила, на саму силу

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = [\bar{r}, \bar{F}],$$

$$|\bar{m}_0(\bar{F})| = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \sin \left( \widehat{\bar{r}, \bar{F}} \right) = F \cdot h.$$

$\bar{m}_0(\bar{F}) = 0$  только в том случае, когда линия действия силы проходит через центр  $O$ . Таким образом, момент направлен перпендикулярно плоскости,

проходящей через центр  $O$  и силу в ту сторону, откуда сила видна стремящейся повернуть тело вокруг центра  $O$  против хода часовой стрелки.

#### 4. Момент силы относительно точки в плоском случае.

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  (рис. 4.5.) в плоском случае является алгебраической величиной, равной произведению модуля силы  $\vec{F}$  на кратчайшее расстояние  $h$  от точки  $O$  до линии действия силы, взятой с определенным знаком. Если сила  $\vec{F}$  стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против хода часовой стрелки, то момент силы положителен, если в направлении по часовой стрелке, то момент отрицателен,  $h$  называется плечом силы.

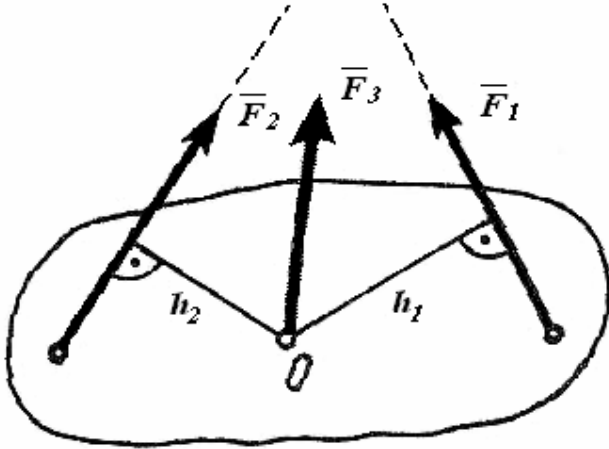


Рис. 4.5.

$$m_0(\vec{F}_1) = F_1 h_1$$

$$m_0(\vec{F}_2) = -F_2 h_2$$

$$m_0(\vec{F}_3) = 0, \quad h_3 = 0$$

#### 5. Момент силы относительно оси.

Проекция вектора  $\vec{m}_0(\vec{F})$ , то есть момента силы  $\vec{F}$  относительно центра  $O$  на какую-нибудь ось  $l$ , проходящую через этот центр, называется **моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси  $l$** , обозначается  $m_l(\vec{F})$ . Момент силы относительно оси  $m_l(\vec{F})$  характеризует вращательный эффект силы  $\vec{F}$ , когда эта сила стремится повернуть тело относительно оси  $l$ .

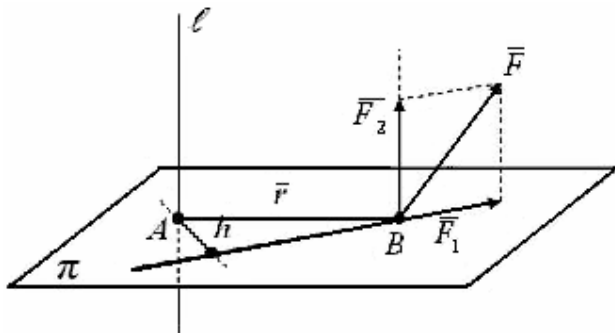


Рис 4.6.

Величина момента силы относительно оси может быть найдена по следующему алгоритму:

1) Через точку  $B$  (точку приложения силы  $\vec{F}$ ) проводят плоскость, перпендикулярную оси  $l$ .

2) силу  $\vec{F}$  раскладывают на две (см. §3, аксиома 3) составляющие проекции:  $\vec{F}_1 \perp l$ ,  $\vec{F}_2 \parallel l$ . При этом

поворот вокруг оси  $l$  будет совершать только сила  $\vec{F}_1$ , а сила  $\vec{F}_2$  может лишь сдвинуть тело вдоль оси  $l$ ,  $m_l(\vec{F}_2) = 0$ .

3) через точку  $A$  проводят прямую, перпендикулярную линии действия силы  $\vec{F}_1$ .

4) Модуль момента силы  $\vec{F}$  относительно оси  $l$  определяется по формуле:  $|m_l(\vec{F})| = m_l(\vec{F}_1) = h / F_1$ .

Если с положительного конца оси сила  $\vec{F}_1$  стремится повернуть тело вокруг точки  $A$  против хода часовой стрелки, то момент силы положителен, если в направлении по часовой стрелке, то момент отрицателен. Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы параллельна оси или пересекает эту ось.

#### 6. Пара сил.

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на АТТ (рис. 4.7.). Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары. Расстояние  $d$  между линиями действия сил пары называется плечом пары. Действие пары сил на твердое тело сводится к вращательному эффекту, который характеризуется величиной, называемой моментом пары.

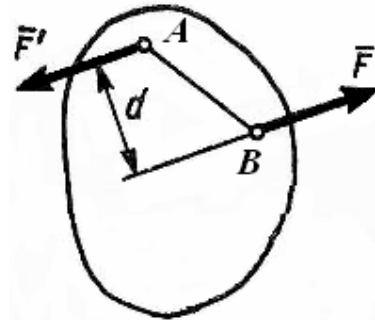


Рис. 4.7.

**Моментом пары** называется вектор  $\vec{m} = [\vec{AB}, \vec{F}] = \vec{m}_A(\vec{F}) = \vec{m}_B(\vec{F}')$ :

- 1) модуль  $|\vec{m}| = F \cdot d = F' \cdot d$ ;
- 2) направлен перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда пара видна стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки.

Свойства пар сил:

- 1) пару можно переносить куда угодно в плоскости действия пары;
- 2) у данной пары можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя ее момент неизменным;
- 3) пару можно перенести из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную данной, без изменения действия на АТТ.

### §5. Свободные, несвободные тела. Виды связей и их реакции.

Твердое тело называется свободным, если его движение ничем не ограничено. В большей части технических задач встречаются лишь несвободные твердые тела. Несвободным называется такое твердое тело, на которое наложены связи, ограничивающие его движение в некоторых направлениях.

Например, для стола, стоящего на полу, связью является пол, который не дает столу перемещаться вертикально вниз. При этом, стол оказывает на пол действие, которое называется силой давления на связь. В свою очередь, пол оказывает противодействие, то есть действует на стол с силой, равной давлению, но противоположно направленной. Эта сила называется реакцией связи. При этом, сила давления приложена к связи, а реакция связи приложена к телу.

Все силы, действующие на твердое тело, можно разделить на две группы: силы активные и реакции связей.

Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает двигаться. Величина реакции, а в некоторых случаях и направление, зависят от внешних сил, приложенных к телу. Если внешние силы отсутствуют, то отсутствуют и реакции связей.

Уравнения статики написаны для свободных тел, поэтому нужно каким-то образом, свести рассмотрение несвободного тела к свободному телу. Этой цели служит **принцип освобождения от связей (аксиома несвободного тела)**: “несвободное тело можно рассматривать как свободное, если мысленно отбросить связи и заменить их действия реакциями связей”.

Рассмотрим основные виды связей.

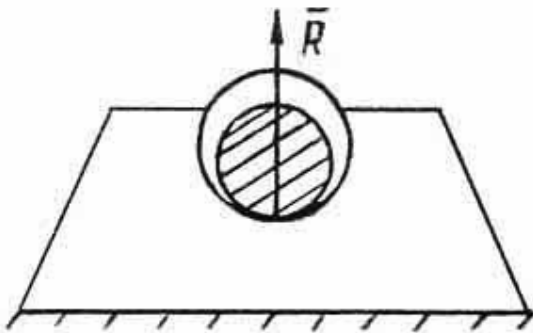


Рис. 5.1.

### **Шарнирно-неподвижная опора (цилиндрический шарнир).**

Примером шарнирно-неподвижной опоры могут служить петли дверных и оконных рам, подшипники и т.д. Связь представляет собой жестко закрепленный полый цилиндр, в который вставлен сплошной цилиндр (рис. 5.1.).

При этом внутренний цилиндр свободно вращается относительно внешнего, но не может сдвинуться в плоскости перпендикулярной оси цилиндра. Вдоль оси цилиндра сдвиг возможен, поэтому реакция лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (рис. 5.2.). Направление реакции зависит от внешних сил, приложенных к телу. Реакция проходит через центр шарнира и точку соприкосновения внутреннего и внешнего цилиндров.

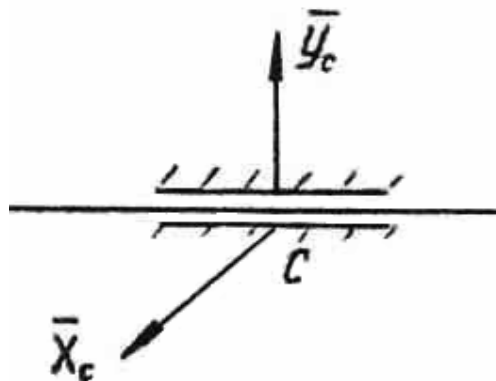


Рис. 5.2.

Для удобства при решении задач реакция шарнира раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 5.3.).

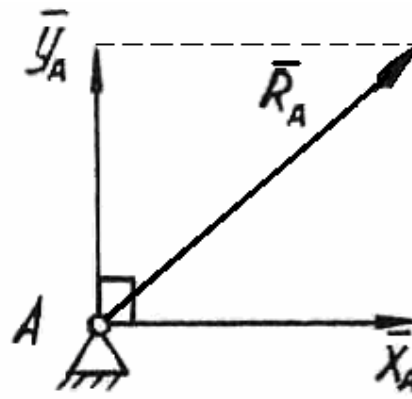


Рис. 5.3.

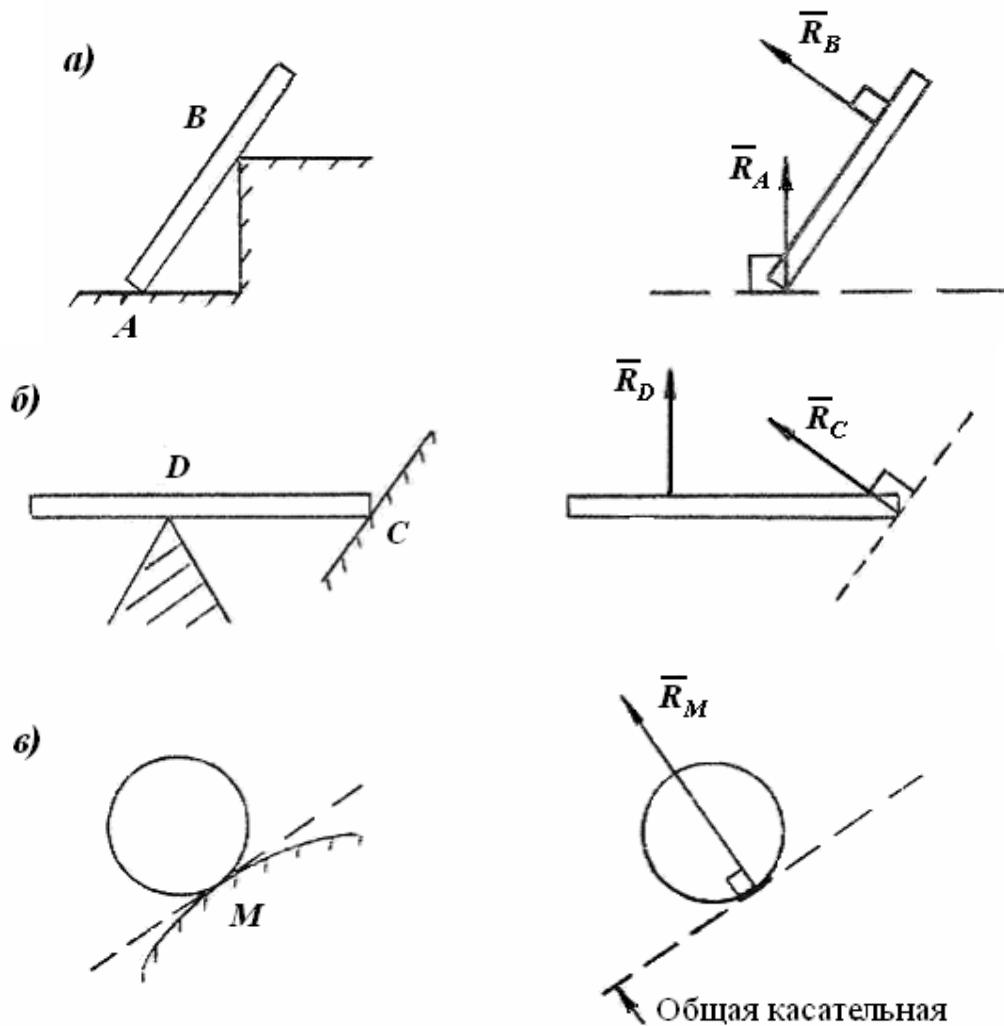
*Свободное опирание.*

Рис. 5.4.

На рис.5.4.(а,б,в) приведены примеры свободного опирания.

При свободном опирании реакция направлена перпендикулярно общей касательной в точке соприкосновения тела и связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает телу двигаться.

В примере на рис.5.4.а для точки  $A$  общей касательной является поверхность пола, а для точки  $B$  поверхность самой балки. На рис.5.4.б общей касательной для точки  $D$  является поверхность балки, а для точки  $C$  поверхность опоры. На рис.5.4.в общая касательная – это воображаемая линия, обозначенная пунктиром.

### **Шарнирно-подвижная опора (каток).**

Реакция катка определяется так же, как и при свободном опирании (рис. 5.5.а,б).

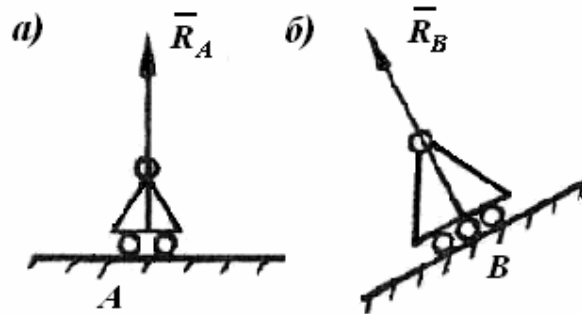


Рис. 5.5.

### **Невесомый стержень с двумя шарнирами.**

Если в задаче встречается невесомый стержень с двумя шарнирами, то реакция направлена вдоль стержня. Точка приложения реакции находится на теле, освобожденном от связи. Направление реакции обусловлено внешней нагрузкой.

Если реакция направлена к разрезу, как в точке  $C$ , то стержень растянут. Если реакция направлена от разреза, как в точках  $A$  и  $B$ , то стержень сжат (рис. 5.6 а,б).

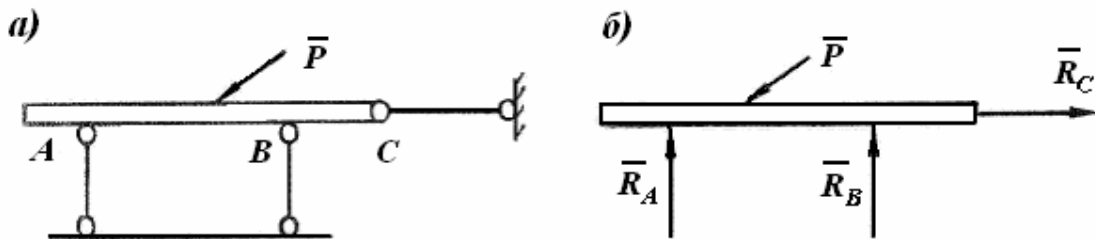


Рис. 5.6.

### **Гибкие связи (цепи, веревки, канаты, и т.д.).**

Реакция гибкой связи всегда направлена вдоль связи от тела, так как такая связь может быть только растянутой.

### **Блок.**

Блок – это гибкая связь, у которой второй конец переброшен через диск и на конце приложена сила (груз), (рис.5.7.а). Блок меняет направление силы, но не меняет ее величины. Применяя принцип освобожденности от связи в этом

случае, отбрасываем груз вместе с диском. Точка приложения реакции находится на теле. Реакция направлена также, как в случае гибкой связи (рис.5.7.б).

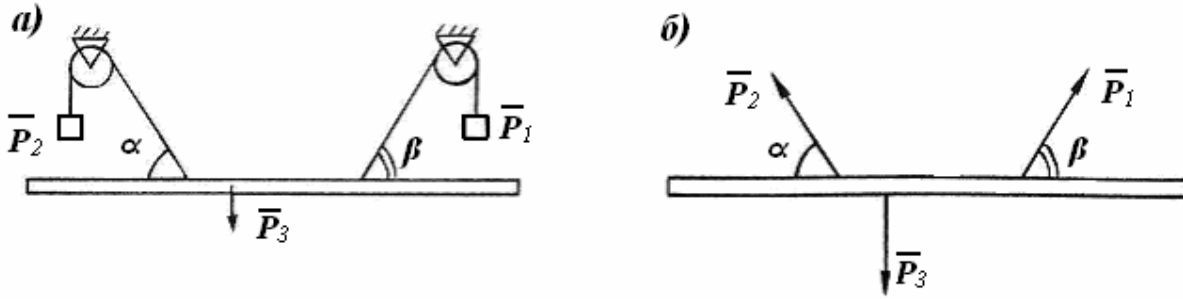


Рис. 5.7.

### Сферический шарнир.

Этот вид связи встречается только в пространственных задачах. Сферический шарнир представляет собой две вложенные друг в друга сферы. Внешняя сфера жестко закреплена, а внутренняя свободно вращается. Как и в случае цилиндрического шарнира, реакция проходит через центр шарнира, и точку соприкосновения сфер. Ее направление и величина обусловлены внешней нагрузкой. Для удобства реакцию раскладывают на три взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 5.8. а,б).

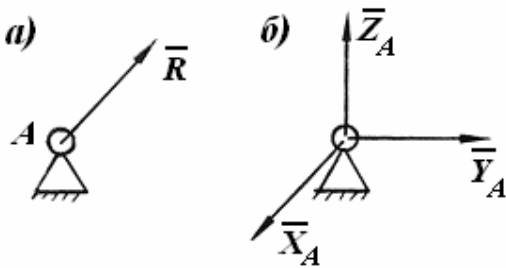


Рис. 5.8.

### Подпятник.

Как и сферический шарнир, подпятник встречается, в основном, в пространственных задачах. Он представляет собой цилиндрический шарнир с упором на одном конце, поэтому к двум составляющим реакции

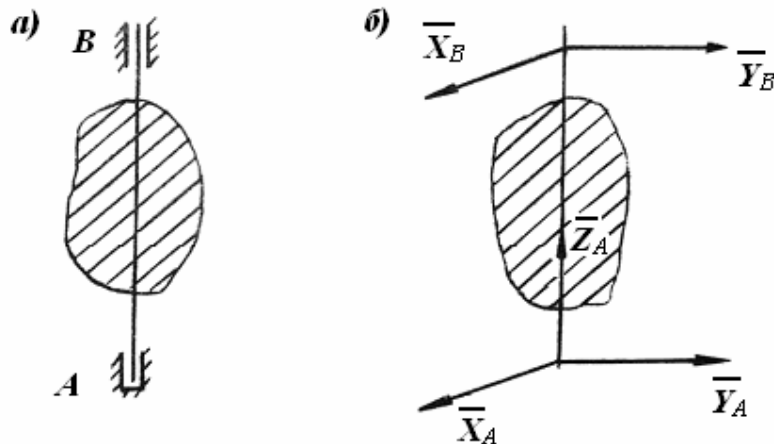


Рис. 5.9.



цилиндрического шарнира добавляется реакция от упора, которая направлена всегда в сторону противоположную упору (рис. 5.9.а,б). В точке  $A$  подпятник, а в точке  $B$  цилиндрический шарнир. Если подпятник встречается в плоской задаче, то одна из составляющих реакции,  $X_A$ , будет отсутствовать.

### Заделка.

Рассмотрим заделку в случае плоской задачи. Примером может служить плита, вцементированная в стену, гвоздь вбитый в стену и т.д. Этот вид связи не позволяет телу не только сдвинуться в какую-либо сторону, но и повернуться на какой-либо угол. Следовательно, к двум составляющим реакции заделки нужно добавить момент заделки  $m_A$  (рис. 5.10.).

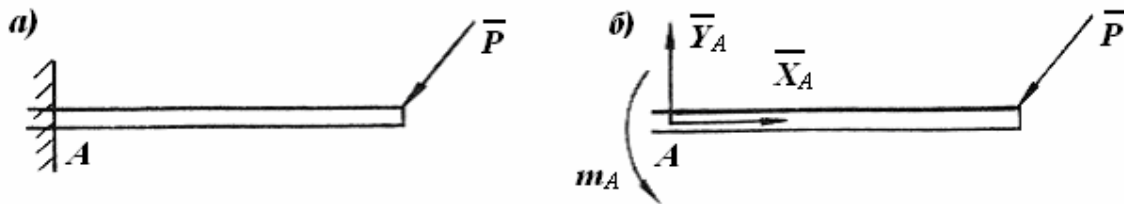
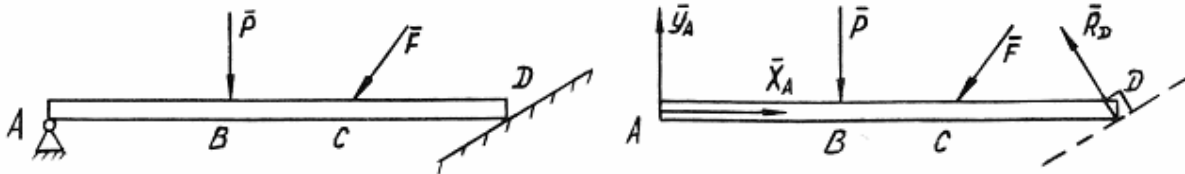


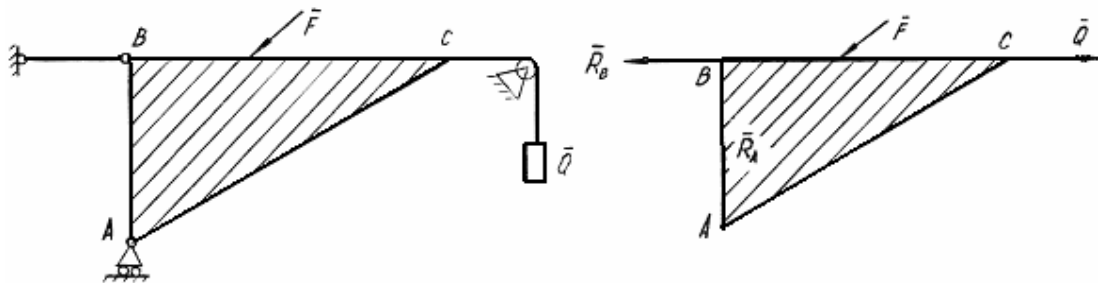
Рис. 5.10.

### Примеры освобождения тел от связей.

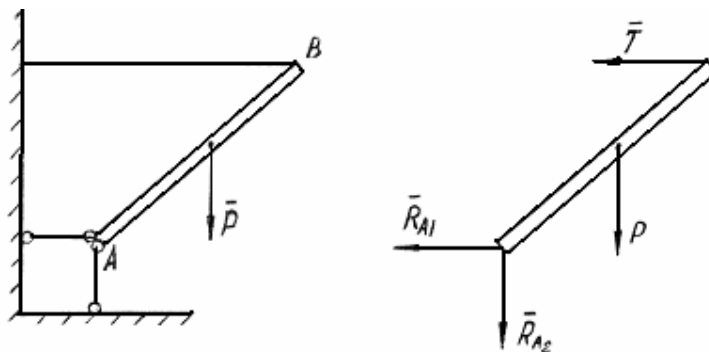
Пример 1.



Пример 2.



Пример 3.



### §6. Условия равновесия системы сил.

Пусть дана система сил  $S(F_1 F_2 \dots F_n)$ .

**Главным вектором** системы сил называется построенный в полюсе  $A$  свободный вектор  $\bar{R}_A = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$  (рис. 6.1.)

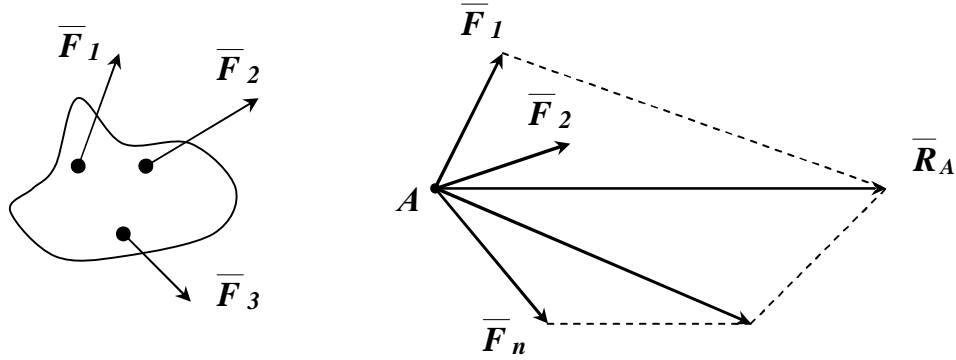


Рис. 6.1.

**Главным моментом** системы сил относительно полюса  $A$  называется векторная сумма моментов сил, вычисленных относительно полюса  $A$  (рис. 6.2.).

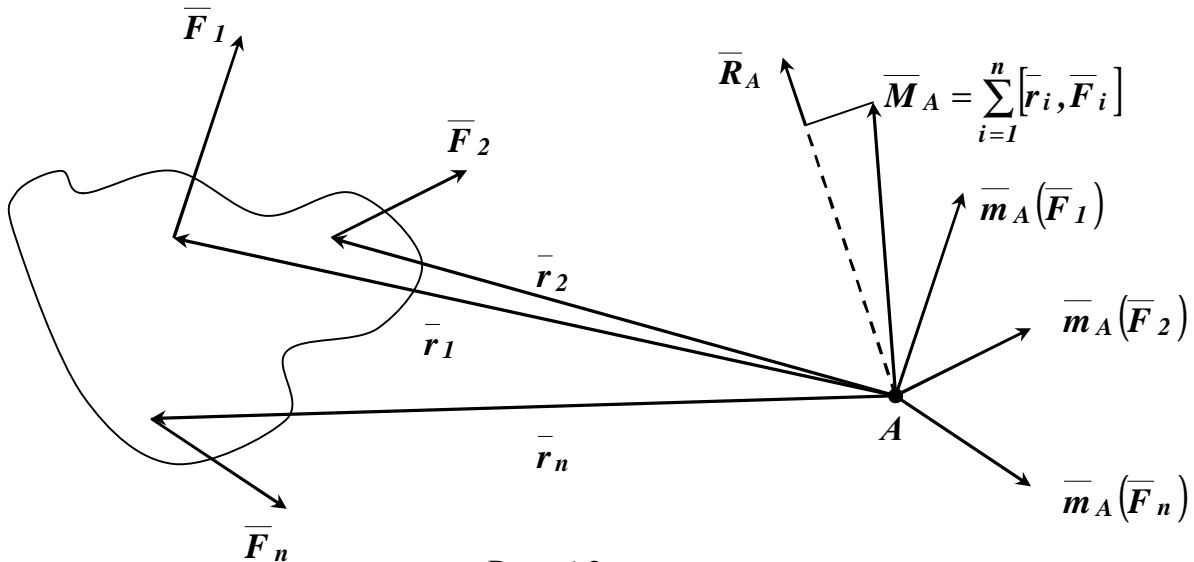


Рис. 6.2.

**Теорема** (необходимое и достаточное условие равновесия системы сил).

Для того чтобы система сил находилась в равновесии необходимо и достаточно, чтобы ее главный вектор и главный момент относительно произвольного центра были равны нулю, то есть:

$$\bar{R}_A = 0, \quad (6.1)$$

$$\bar{m}_A = 0. \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) представляют собой два векторных уравнения. Если расписать их в проекциях на оси то получим шесть алгебраических уравнений, которые называют уравнениями равновесия для пространственной системы сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (6.3) \quad \sum_{i=1}^n m_x(F_i) = 0, \quad (6.6)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad (6.4) \quad \sum_{i=1}^n m_y(F_i) = 0, \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad (6.5) \quad \sum_{i=1}^n m_z(F_i) = 0. \quad (6.8)$$

**Теорема.** Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей были равны нулю.

В случае плоской системы сил векторные уравнения (6.1) и (6.2) эквивалентны одной из ниже следующих систем. При этом уравнение (6.2) дает алгебраическое уравнение моментов относительно точки.

1)

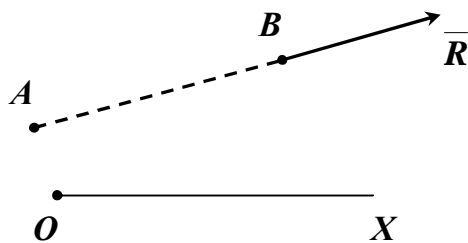
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad (6.9)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad (6.10)$$

$$\sum_{i=1}^n m_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (6.11)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно произвольного центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю.

2)



$$\sum_{i=1}^n m_A(\bar{F}_i) = 0, \quad (6.12)$$

$$\sum_{i=1}^n m_B(\bar{F}_i) = 0, \quad (6.13)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0. \quad (6.14)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил этих относительно каких-нибудь

двух центров  $A$  и  $B$  и сумма их проекций на ось  $OX$ , не перпендикулярную прямой  $AB$ , были равны нулю.

3)

$$\sum_{i=1}^n m_A(\bar{F}_i) = 0, \quad (6.15)$$

$$\sum_{i=1}^n m_B(\bar{F}_i) = 0, \quad (6.16)$$

$$\sum_{i=1}^n m_C(\bar{F}_i) = 0, \quad (6.17)$$

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любого из трех центров  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

В случае системы тел решение задач статики усложняется. В число неизвестных помимо реакций связей войдут усилия или моменты, возникающие между телами системы. Это требует привлечения дополнительных уравнений. Приходится разбивать систему на части и рассматривать равновесие каждого тела, привлекая формулы (6.3) – (6.9) в пространственном случае и формулы (6.9) – (6.11) [(6.12) – (6.14), (6.15) – (6.17)] в плоском случае.

## §7. Примеры.

При решении задач статики обычно придерживаются следующего алгоритма:

- 1) определяют тело (систему тел), равновесие которого (которой) надо рассмотреть, чтобы определить искомые величины. Вводят систему координат;
- 2) если среди заданных активных сил есть распределенные силы, то их заменяют равнодействующей (см. §4);
- 3) определяют связи и их типы (см. §5);
- 4) мысленно отбрасывают связи, наложенные на тело (систему тел) и заменяют связи реакциями связей. При этом точка приложения реакции находится на рассматриваемом теле;
- 5) рассматривают равновесие несвободного тела (системы тел) как тела свободного под действием активных сил и реакций связей, то есть применяют уравнения равновесия (6.3) – (6.8) для пространственной системы сил или (6.9) – (6.11) [(6.12) – (6.14), (6.15) – (6.17)] для плоской системы сил;
- 6) решают уравнения и находят искомые величины. Как правило, ими являются реакции связей.

### Задача № 1

Стержни  $AC$  и  $BC$  соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт  $C$  действует вертикальная сила  $P=1000H$ . Определить реакции этих стержней на шарнирный болт  $C$ , если углы, составляемые стержнями со стеной равны:  $a = 30^\circ$ ,  $b = 60^\circ$  (рис. 7.1.).

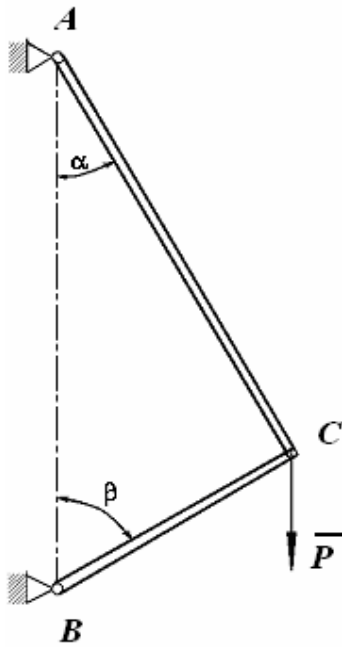


Рис. 7.1.

Решение:

Возьмем начало координат в точке  $C$ , равновесие которой мы рассматриваем. Направим ось  $x$  горизонтально вправо, а ось  $y$  – вертикально вверх. На рисунке 7.2. укажем реакции стержней  $AC$  и  $BC$  на шарнир  $C$ . Так как реакция шарнирно опертого невесомого стержня направлена вдоль него, то силы  $T_1$  и  $T_2$ , направим от точки  $C$  к точкам  $A$  и  $B$  соответственно, предполагая что стержни растянуты.

Получаем сходящуюся систему сил (система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке). Сумма проекций всех сил на ось  $x$  должна быть равна нулю и сумма проекций всех сил на ось  $y$  должна быть равна нулю.

Уравнения моментов не будет, потому что каждая из сил проходит через полюс  $C$ , и значит ее момент относительно этого полюса равен нулю.

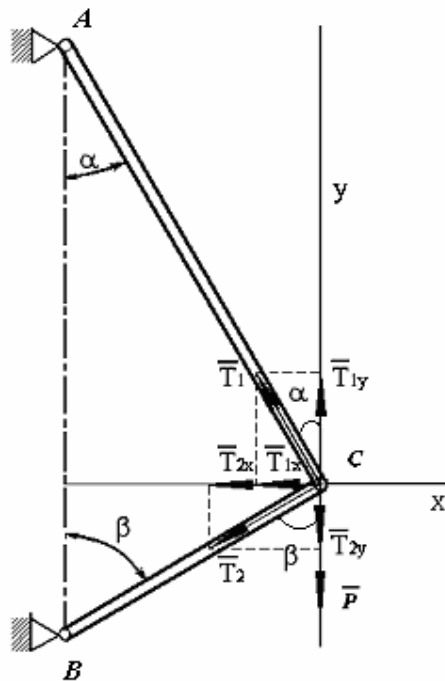


Рис. 7.2.

Находим значения проекций всех сил на выбранные координатные оси:

Сила	Проекция силы на ось	
	$x$	$y$
$T_1$	$-T_1 \sin a$	$T_1 \cos a$
$T_2$	$-T_2 \sin b$	$-T_2 \cos b$
$P$	$0$	$-P$

Составляем уравнения равновесия шарнира  $C$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \end{cases} \begin{cases} -T_1 \cdot \sin a - T_2 \cdot \sin b = 0; \\ T_1 \cdot \cos a - T_2 \cdot \cos b - P = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим выражение для  $T_1$ :

$$T_1 = -T_2 \cdot \frac{\sin b}{\sin a}.$$

Из второго уравнения получим выражение для  $T_2$ :

$$T_2 = -\frac{P}{\left(\frac{\sin b}{\sin a} \cdot \cos a + \cos b\right)}.$$

Откуда следует, что  $T_2 = -500H$ . Знак «минус» указывает на противоположное направление силы  $T_2$  показанному на рисунке.  $T_1 = 866H$ .

Ответ:  $T_1 = 866H$  – стержень растягивается;  $T_2 = -500H$  – стержень испытывает сжатие.

### Задача № 2.

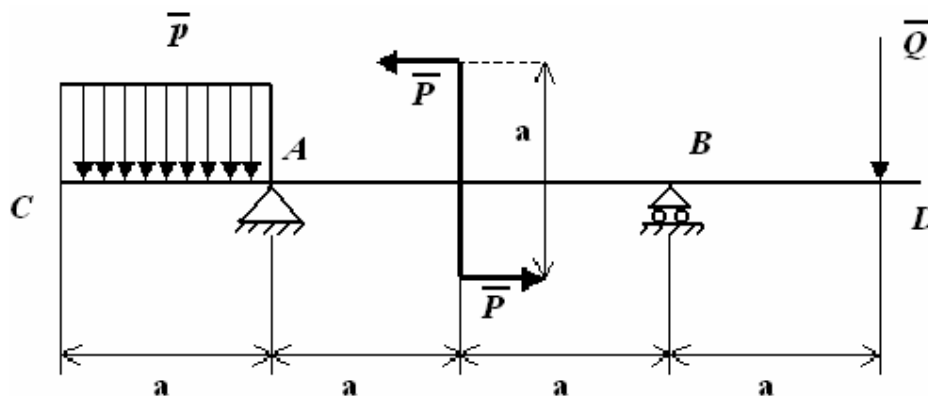


Рис. 7.3.

На двухконсольную горизонтальную балку действует пара сил  $(P, P)$ , на левую консоль – равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $p$ , а в

точке  $D$  правой консоли – вертикальная нагрузка  $Q$  (рис. 7.3).  
 Определить реакции опоры, если  $P=1\text{кН}$ ,  $Q=2\text{кН}$ ,  $p=2\text{кН/м}$ ,  $a=0,8\text{м}$ .

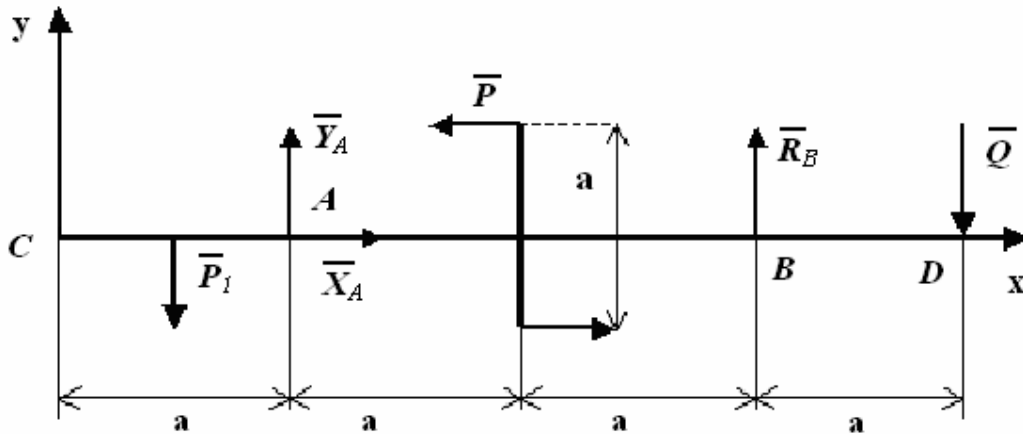


Рис. 7.4.

Решение :

На рисунке 7.4. сила  $\bar{P}_1$  изображается по середине отрезка  $CA$ , так как нагрузка распределена равномерно.

$$P_1 = p \cdot a = 2 \cdot 0,8 = 1,6\text{кН}.$$

Введем оси координат  $x, y$ . В точке  $A$  отбрасываем связь – шарнирно-неподвижную опору и заменяем ее реакциями связи  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ . В точке  $B$  находится шарнирно-подвижная опора, ее заменяем реакцией  $\bar{R}_B$ . Система сил, действующая на балку, является плоской. Запишем три уравнения равновесия: два уравнения проекций и уравнение моментов относительно точки  $A$  (6.9) – (6.11). Выбор точки  $A$  в качестве центра обусловлен тем, что через нее проходят две реакции связи  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$ , и  $m_A(\bar{X}_A) = m_A(\bar{Y}_A) = 0$ . Таким образом, в уравнение моментов будет входить только одна неизвестная реакция  $\bar{R}_B$ , что существенно упрощает его решение. Действие пары сил характеризуется положительным моментом, равным по величине  $p \cdot a$ , который момент входит только в уравнение моментов.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} &= 0, & X_A &= 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} &= 0, & Y_A - P_1 + R_B - Q &= 0; \\ \sum_{i=1}^n m_A(\bar{F}_i) &= 0, & Pa + R_B \cdot 2a - Q \cdot 3a + P_1 \frac{a}{2} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{cases} X_A = 0; \\ Y_A - 1,6 + R_B - 2 = 0; \\ 1 \cdot 0,8 + R_B \cdot 2 \cdot 0,8 - 2 \cdot 3 \cdot 0,8 + 1,6 \cdot \frac{0,8}{2} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_A = 0; \\ Y_A = 1,5; \\ R_B = 2,1. \end{cases}$$

Ответ:  $X_A = 0$ ;  $Y_A = 1,5$ ;  $R_B = 2,1$ .

### Задача № 3.

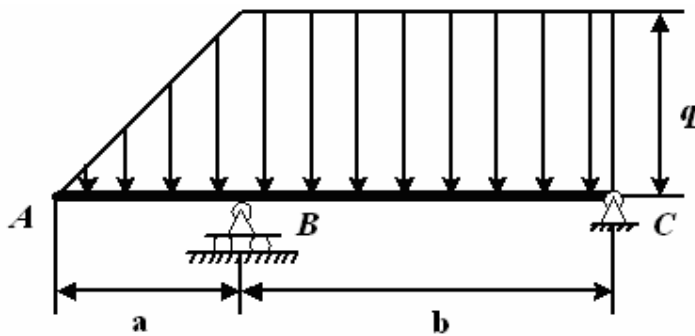


Рис. 7.5.

Горизонтальная балка  $AC$ , опёртая в точках  $B$  и  $C$ , несёт между опорами  $B$  и  $C$  равномерно распределённую нагрузку интенсивностью  $q$   $H/m$ ; на участке  $AB$  интенсивность нагрузки уменьшается по линейному закону до нуля (рис. 7.5.). Найти реакции опор  $B$  и  $C$ ,

пренебрегая весом балки.

Решение:

Заменяем распределённые нагрузки сосредоточенными силами.  $Q_2$  действует по середине  $BC$ , так как нагрузка постоянная.  $Q_1$  делит отрезок  $AB$  в отношении 1:2, так как нагрузка распределена по линейному закону. В точке  $B$  одна реакция, так как связь – подвижный шарнир, в точке  $C$  две реакции, так как связь – неподвижный шарнир (рис. 7.6.).

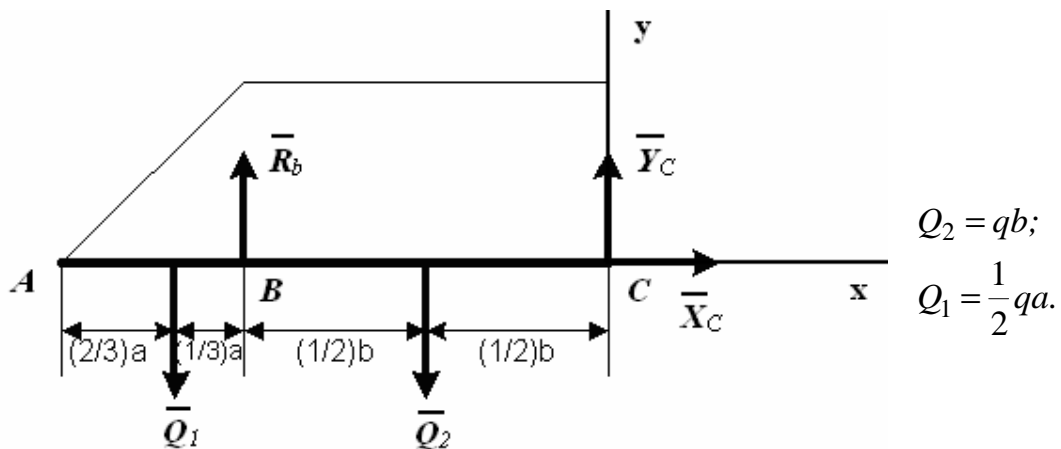


Рис. 7.6.



Система уравнений равновесия для заданной задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_C(\bar{F}_i) = 0.$$

$$\begin{cases} X_c = 0; \\ R_b + Y_c - Q_2 - Q_1 = 0; \\ -bR_b + Q_1\left(b + \frac{a}{3}\right) + Q_2 \frac{b}{2} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow R_B = \frac{q}{6}\left(3a + 3b + \frac{a^2}{b}\right); Y_C = \frac{q}{6}\left(3b - \frac{a^2}{b}\right); X_C = 0.$$

$$\text{Ответ: } R_B = \frac{q}{6}\left(3a + 3b + \frac{a^2}{b}\right)H; Y_C = \frac{q}{6}\left(3b - \frac{a^2}{b}\right)H; X_C = 0H.$$

#### Задача № 4.

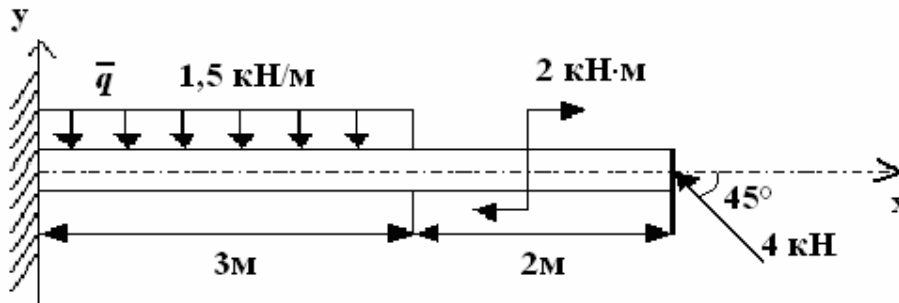


Рис. 7.7.

Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рис.7.7. и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

Решение:

На рис.7.8.  $Q$  изображается одной силой приложенной в середине отрезка  $AB=3\text{м}$ , потому что нагрузка распределена равномерно,  $Q = 1,5 \cdot 3 = 4,5\text{кН}$ .

Отбрасывая заделку в точке  $A$ , заменяем ее реакциями связи  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  и моментом  $m_A$ . Составляем два уравнения проекций и уравнение моментов, которые берем относительно точки  $C$ .

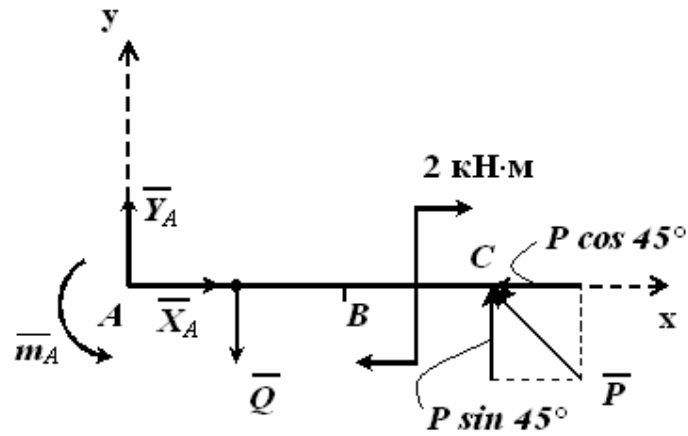


Рис. 7.8.

$$\begin{cases} X_A - \cos 45^\circ \cdot P = 0 \\ Y_A - Q + P \cdot \sin 45^\circ = 0 \\ m_A + 3,5Q - 2 - Y_A \cdot 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_A = 2\sqrt{2} = 2,8 \\ Y_A = 4,5 - 2,8 = 1,7 \\ m_A = -3,5 \cdot 4,5 + 2 + 1,7 \cdot 5 = -5,25 \end{cases}$$

Ответ:  $X_A = 2,8$  кН,  $Y_A = 2,8$  кН,  $m_A = -5,25$  кН·м.

### Задача № 5.

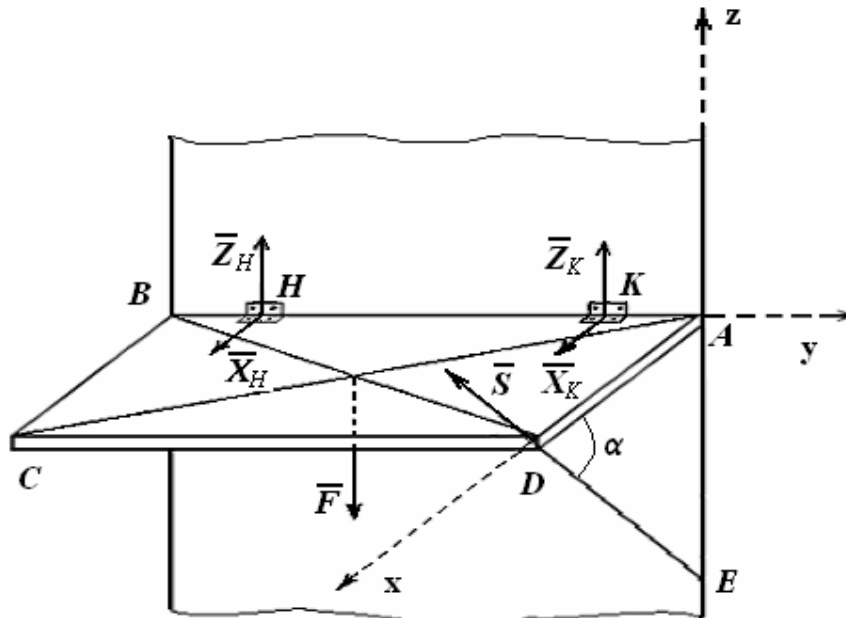


Рис. 7.9.

Полка  $ABCD$  вагона, которая может вращаться вокруг оси  $AB$ , удерживается в горизонтальном положении стержнем  $ED$ , прикреплённым при помощи шарнира  $E$  к вертикальной стене  $BAE$ . Вес полки и лежащего на ней

груза  $P$  равен  $80\text{ Н}$  и приложен к точке пересечения диагоналей прямоугольника  $ABCD$ .

Даны размеры:  $AB=150\text{ см}$ ,  $AD=60\text{ см}$ ,  $AK=BH=25\text{ см}$ . Длина стержня  $ED=75\text{ см}$ . Определить усилие  $S$  в стержне  $ED$ , пренебрегая его весом, и реакции петель  $K$  и  $H$  (рис.7.9.).

Решение:

Так как  $H$  и  $K$  цилиндрические шарниры, то они заменяются реакциями  $X_H$ ,  $X_K$ ,  $Z_H$ ,  $Z_K$ . Сила  $S$  действует вдоль стержня  $ED$  (рис. 7.9.).

$$\sin \alpha = \frac{9}{15}, \quad \cos \alpha = \frac{AD}{DE} = \frac{60}{75} = \frac{12}{15},$$

$$HA = AB - BH = 150 - 25 = 125;$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{144}{225}}.$$

Составляем уравнения для пространственной системы сил:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S \cos \alpha + X_H + X_K = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad 0 = 0; \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad S \sin \alpha + Z_H + Z_K - P = 0; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n m_x(\bar{F}_i) = 0; \quad P \frac{1}{2} AB - Z_K AK - Z_H HA = 0; \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n m_y(\bar{F}_i) = 0; \quad P \frac{1}{2} AD - S \sin \alpha AD = 0; \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n m_z(\bar{F}_i) = 0; \quad X_K KA + X_H HA = 0; \quad (6)$$

Из уравнения (5) находим

$$S = \frac{P AD}{2 \sin \alpha AD} = \frac{80 \cdot 15}{18} = \frac{1200}{18} = 66 \frac{2}{3} \text{ Н}. \quad (7)$$

Из уравнения (6) имеет связь реакций  $X_K, X_H$

$$25 X_K = -125 X_H; \quad X_K = -5 X_H \quad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в (1), получаем

$$\frac{200 \cdot 12}{3 \cdot 15} + X_H - 5X_H = 0; \quad X_H = 13\frac{1}{3}H; \quad X_K = -66\frac{2}{3}H;$$

Уравнения (3) и (4) решаем относительно  $Z_K$  и  $Z_H$  с учетом (7).

$$Z_K = -S \sin \alpha - Z_H + P; \quad \frac{1}{2} P AB - Z_K AK - Z_H HA = 0;$$

$$6000 + \frac{200 \cdot 9}{3 \cdot 15} 25 + 25 Z_H - 25 \cdot 80 - 125 Z_H = 0;$$

$$-100Z_H = -6000 - 1000 + 2000;$$

$$Z_H = 50H; \quad Z_K = -\frac{200 \cdot 9}{3 \cdot 15} - 50 + 80; \quad Z_K = -10H.$$

Ответ:  $S = 66\frac{2}{3}H$ ,  $X_K = -66\frac{2}{3}H$ ,  $Z_K = -10H$ ,  $X_H = 13\frac{1}{3}H$ ,  $Z_H = 50H$ .

### Задача № 6.

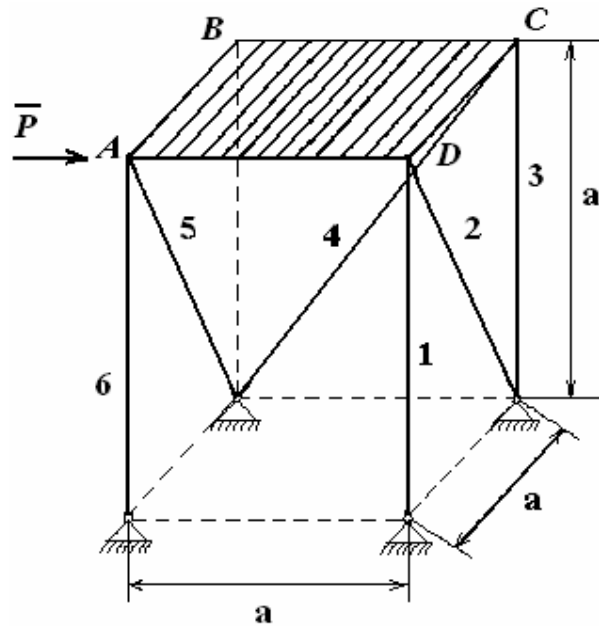


Рис. 7.10.

Определить усилие в шести опорных стержнях, поддерживающих квадратную плиту ABCD, при действии горизонтальной силы  $P$  вдоль стороны AD. Размеры указаны на рис.7.10.

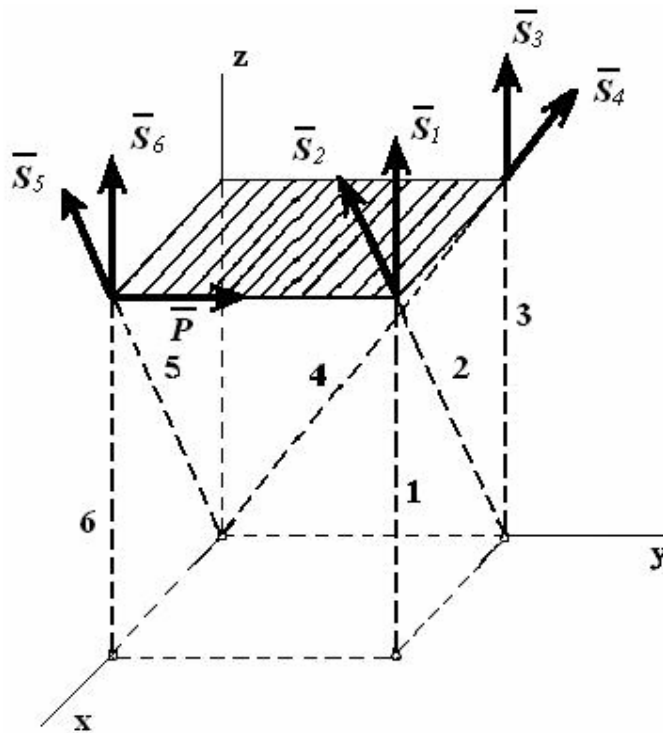


Рис. 7.11.

Решение:

Перейдем к эквивалентной системе сил: мысленно отбросим стержни заменим их действия реакциями  $S_i$ ; Направляем векторы сил  $S_i$  в предположении, что все стержни сжаты (рис. 7.11).

Составим уравнения равновесия (6.3) – (6.5) – проекции сил на оси координат; (6.6) – (6.8) – проекции моментов сил относительно координатных осей:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad S_5 \cdot \cos 45^\circ + S_2 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad P + S_4 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad S_1 + S_2 \cdot \sin 45^\circ + S_3 + S_4 \cdot \sin 45^\circ + S_5 \cdot \sin 45^\circ + S_6 = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_x(\bar{F}_i) = 0; \quad -P \cdot a + S_1 \cdot a + S_2 \cdot a \cdot \sin 45^\circ + S_3 \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_y(\bar{F}_i) = 0; \quad -S_1 \cdot a - S_6 \cdot a = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_z(\bar{F}_i) = 0; \quad P \cdot a - S_2 \cdot a \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Система статически определима: число уравнений равно числу неизвестных. Найдем усилия  $S_i$  в стержнях. Если значение  $S_i$  будет отрицательным, то это будет означать, что данный  $i$ -й стержень не сжат, а растянут.

$$S_2 = \frac{P}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \cdot P;$$

$$S_5 = -S_2 = -\sqrt{2} \cdot P;$$

$$S_4 = -\frac{P}{\cos 45^\circ} = -\sqrt{2} \cdot P;$$

$$\begin{cases} S_1 + P \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + S_3 - P \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} - P \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + S_6 = 0; \\ -P + S_1 + P \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + S_3 = 0; \\ S_1 + S_6 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1 + S_3 - P + S_6 = 0; \\ S_1 + S_3 = 0; \\ S_1 + S_6 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_3 = -S_1; \\ S_6 = -S_1; \end{cases} \Rightarrow S_1 = -P, S_2 = P, S_6 = P.$$

$$\begin{cases} S_1 - S_1 - P + S_1 = 0; \end{cases}$$

Ответ:  $S_1 = -P$ ;  $S_2 = P\sqrt{2}$ ;  $S_3 = P$ ;  $S_4 = -P\sqrt{2}$ ;  $S_5 = -P\sqrt{2}$ ;  $S_6 = P$ .

### Задача № 7.

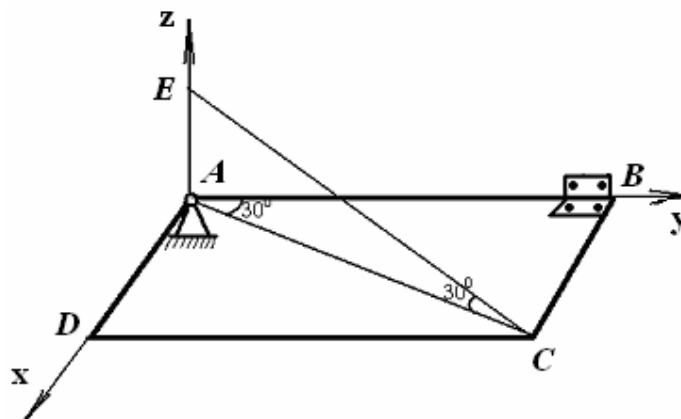


Рис. 7.12.

Однородная прямоугольная рама весом  $20H$  прикреплена к стене при помощи шарового шарнира  $A$  и петли  $B$  и удерживается в горизонтальном положении веревкой  $CE$ , привязанной к точке  $C$  рамы и к гвоздю  $E$ , вбитому в стену на одной вертикали с  $A$ , причем  $\angle ECA = \angle BAC = 30^\circ$ .

Определить натяжение веревки и опорные реакции (рис. 7.12.).

Решение:

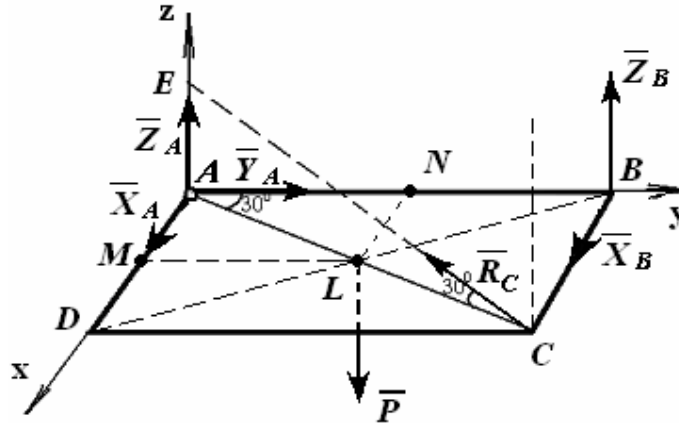


Рис. 7.13.

Отбросим шаровой шарнир в точке  $A$ , заменив его реакциями связи  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{Z}_A$ . Петля  $B$  является цилиндрическим шарниром, который позволяет перемещение вдоль оси  $Ay$ . Реакциями связей в этой точке будут  $\bar{X}_B, \bar{Z}_B$ . Веревка  $CE$  является гибкой связью, ее реакция  $\bar{R}_C$  направлена по  $CE$  к точке  $E$  (рис. 7.13.). Вес рамы приложен в точке  $L$  пересечения диагоналей прямоугольника  $ABCD$ .

Составим уравнения равновесия пространственной системы сил (6.3) – (6.8):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad X_A + X_B - R_C \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad Y_A - R_C \cos^2 30^\circ = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad Z_A + Z_B + R_C \sin 30^\circ - P = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_x(\bar{F}_i) = 0; \quad Z_B \cdot AB + R_C \cdot DC \cdot \sin 30^\circ - P \cdot LM = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_y(\bar{F}_i) = 0; \quad P \cdot LN - R_C \cdot \sin 30^\circ \cdot BC = 0;$$

$$\sum_{i=1}^n m_z(\bar{F}_i) = 0; \quad -X_B \cdot AB = 0.$$

Учитывая, что  $AB=DC$ ,  $LM= \frac{1}{2} AB$ ,  $LN=\frac{1}{2}BC$ , получим

$$\begin{cases} X_A + X_B - R_C \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0; \\ Y_A = R_C \frac{3}{4}; \\ Z_A + Z_B + R_C \frac{1}{2} - 20 = 0; \\ Z_B + R_C \frac{\sqrt{3}}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2} = 0; \\ 20 \cdot \frac{1}{2} - R_C \cdot \frac{1}{2} = 0; \\ X_B = 0. \end{cases}$$

$$X_A = 5\sqrt{3};$$

$$Y_A = 15;$$

$$Z_A = 10\sqrt{3};$$

$$Z_B = 10 - 10\sqrt{3} = -10(\sqrt{3} - 1);$$

$$R_C = 20;$$

$$X_B = 0.$$

Знак «минус» у реакции  $Z_B$  означаем, что она направлена в противоположную сторону.

$$\text{Ответ: } X_A = 5\sqrt{3}H, Y_A = 15H, Z_A = 10\sqrt{3}H, \\ R_C = 20H, X_B = 0H, Z_B = -10(\sqrt{3} - 1)H.$$



### Задача № 8.

Кронштейн состоит из горизонтального бруса  $AD$  (рис. 7.14.) весом  $P_1 = 15H$ , прикрепленного к стене шарниром, и подкоса  $CB$  весом  $P_2 = 12H$ , который с брусом  $AD$  и со стеной также соединен шарнирами (все размеры показаны на чертеже). К концу  $D$  бруса подвешен груз весом  $Q = 30H$ . Определить реакции шарниров  $A$  и  $C$ , считая брус и подкос однородными.

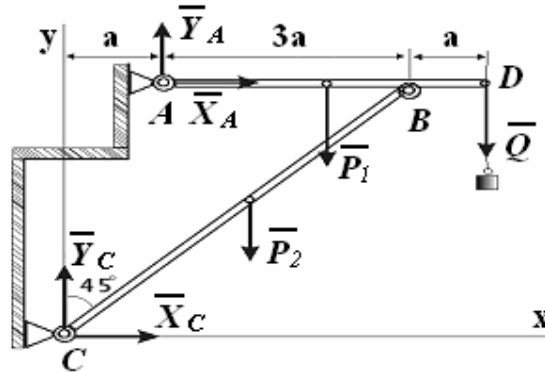


Рис. 7.14.

Решение:

Отбрасывая внешние связи, рассматриваем равновесие всего кронштейна в целом. На него действуют заданные силы  $P_1, P_2, Q$  и реакции связей  $X_A, Y_A, X_C, Y_C$ . Кронштейн, освобожденный от внешних связей, не образует жесткой конструкции (брусья могут поворачиваться вокруг шарнира  $B$ ), но по принципу отвердевания действующие на него силы при равновесии должны удовлетворять условиям равновесия статики. Составляя эти условия, найдем:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = X_A + X_C = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n m_A(\bar{F}_i) = X_C \cdot 4a - Y_C \cdot a - P_2 \cdot a - P_1 \cdot 2a - Q \cdot 4a = 0.$$

Полученные три уравнения содержат, как видим, четыре неизвестных  $X_A, Y_A, X_C, Y_C$ . Для решения задачи рассмотрим дополнительно условия равновесия бруса  $AD$  (рис. 7.15.).

На него действуют силы  $P_1, Q$  и реакции  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$ . Недостающее нам четвертое уравнение составим, беря моменты этих сил относительно центра  $B$  (тогда в уравнение не войдут новые неизвестные  $X_B, Y_B$ ).

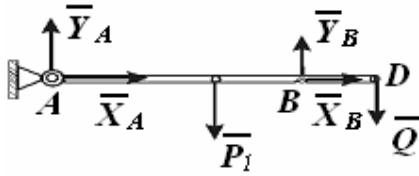


Рис. 7.15.

Получим :

$$\sum_{i=1}^n m_B(\bar{F}_i) \equiv -Y_A \cdot 3a + P_1 \cdot a - Q \cdot a = 0.$$

Решая теперь систему четырех составленных уравнений (начиная с последнего), найдем:

$$Y_A = \frac{1}{3}(P_1 - Q) = -5H, \quad Y_C = \frac{2}{3}P_1 + P_2 + \frac{4}{3}Q = 62H,$$

$$X_C = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{4}{3}Q = 56H, \quad X_A = -X_C = -56H.$$

Из полученных результатов видно, что силы  $X_A$  и  $Y_A$  имеют направления, противоположные показанным на чертеже. Реакции шарнира В, если их надо определить, найдутся из уравнений проекций на оси  $x$  и  $y$  сил, действующих на брус  $AD$ , и будут равны  $X_B = -X_A$ ;  $Y_B = P_1 + Q - Y_A = 50H$ .

Ответ:  $X_A = -56$ ,  $Y_A = -5H$ ,  $X_C = 56H$ ,  $Y_C = 62H$ .

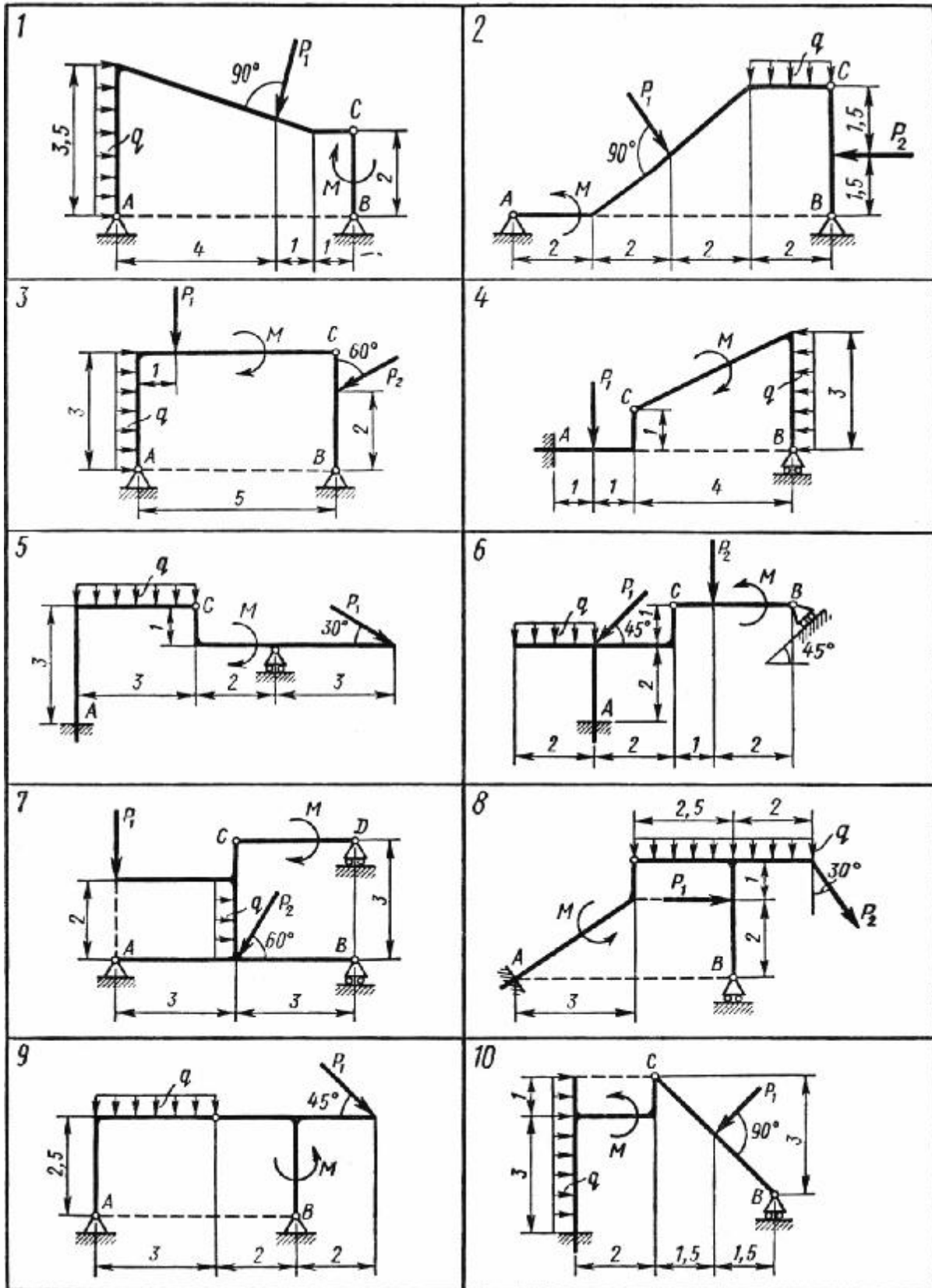
### §8. Контрольные вопросы для самопроверки остаточных знаний.

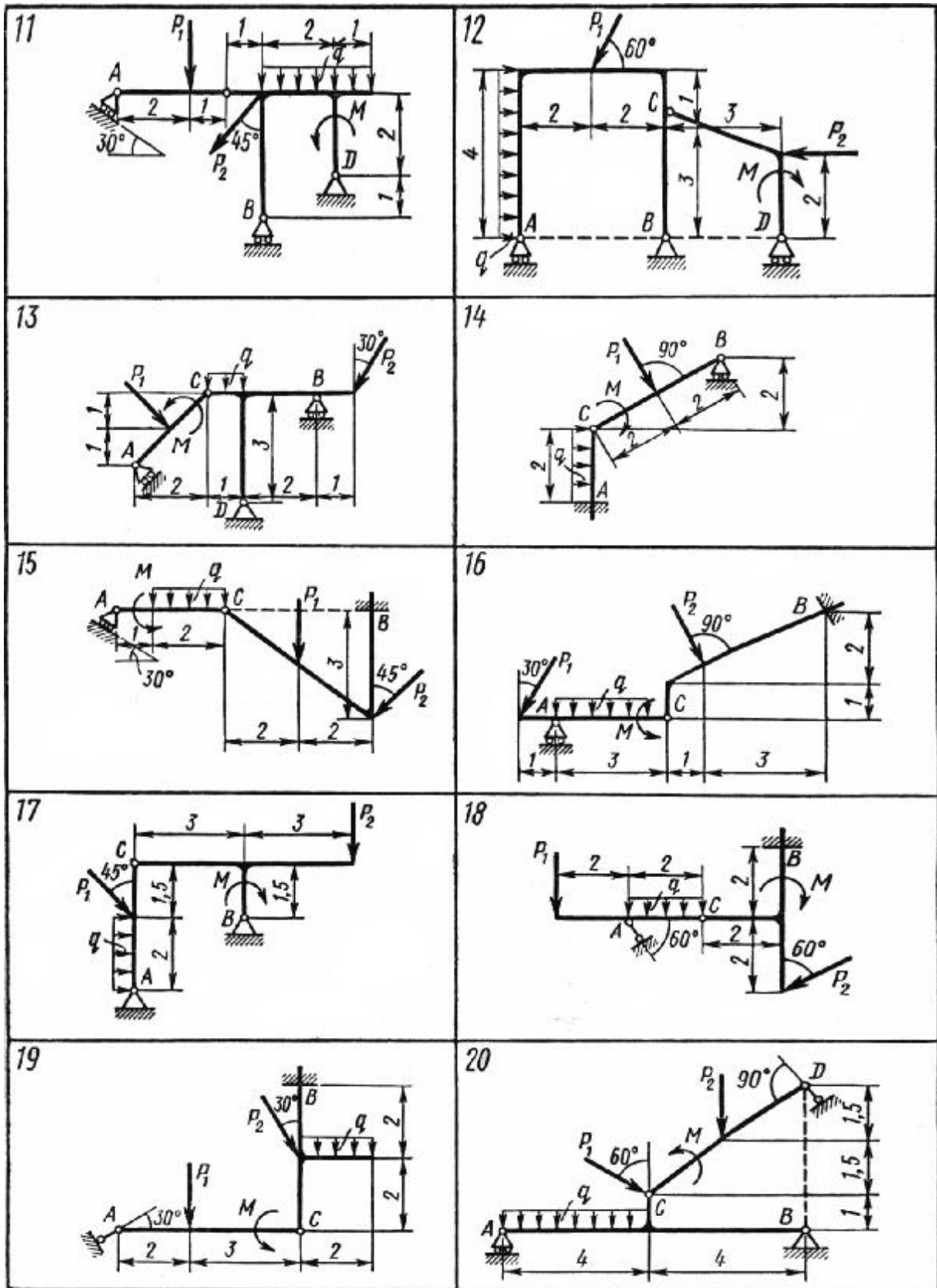
- 1) Чему равен главный вектор пары сил? А главный момент?
- 2) Записать уравнение равновесия сходящейся системы сил в пространственном случае! В плоском случае!
- 3) Чем отличаются условия равновесия от уравнений равновесия!
- 4) Расстояние от линии действия силы до полюса равно  $h$ . Чему равен момент силы относительно полюса? Куда он направлен?
- 5) В каких случаях момент силы относительно полюса равен нулю? А относительно оси?
- 6) Куда направлена реакция невесомого абсолютно жесткого шарнирно опертого стержня (А гибкой нити)?
- 7) Показать на каком-либо примере, что для плоского случая уравнения равновесия (6.9) – (6.11); (6.12) – (6.14); (6.15) – (6.18) – эквивалентны.
- 8) Решить задачу №1 с помощью уравнения трех моментов.
- 9) Главный вектор сил относительно полюса  $O$  равен  $\bar{R}_0$ , главный момент  $\bar{M}_0$ ; как изменится главный вектор и главный момент сил при изменении полюса на  $O'$ .
- 10) Почему заменяя распределенную нагрузку сосредоточенной силой помещаем ее в центре тяжести?
- 11) Какие задачи называются статически неопределимыми?
- 12) Сколько реакций имеет консольная заделка? Почему?
- 13) Куда направлена реакция сферического шарнира?
- 14) Перечислите основания механической модели.
- 15) Сформулируйте аксиомы статики.
- 16) Что такое сила? А пара сил?
- 17) Какое действие на тело оказывают прямо противоположные силы? А пара сил?
- 18) Сила  $\bar{F}$  проходит через начало координат. Найти  $M_x(\bar{F})$ ,  $M_y(\bar{F})$ ,  $M_z(\bar{F})$ ?

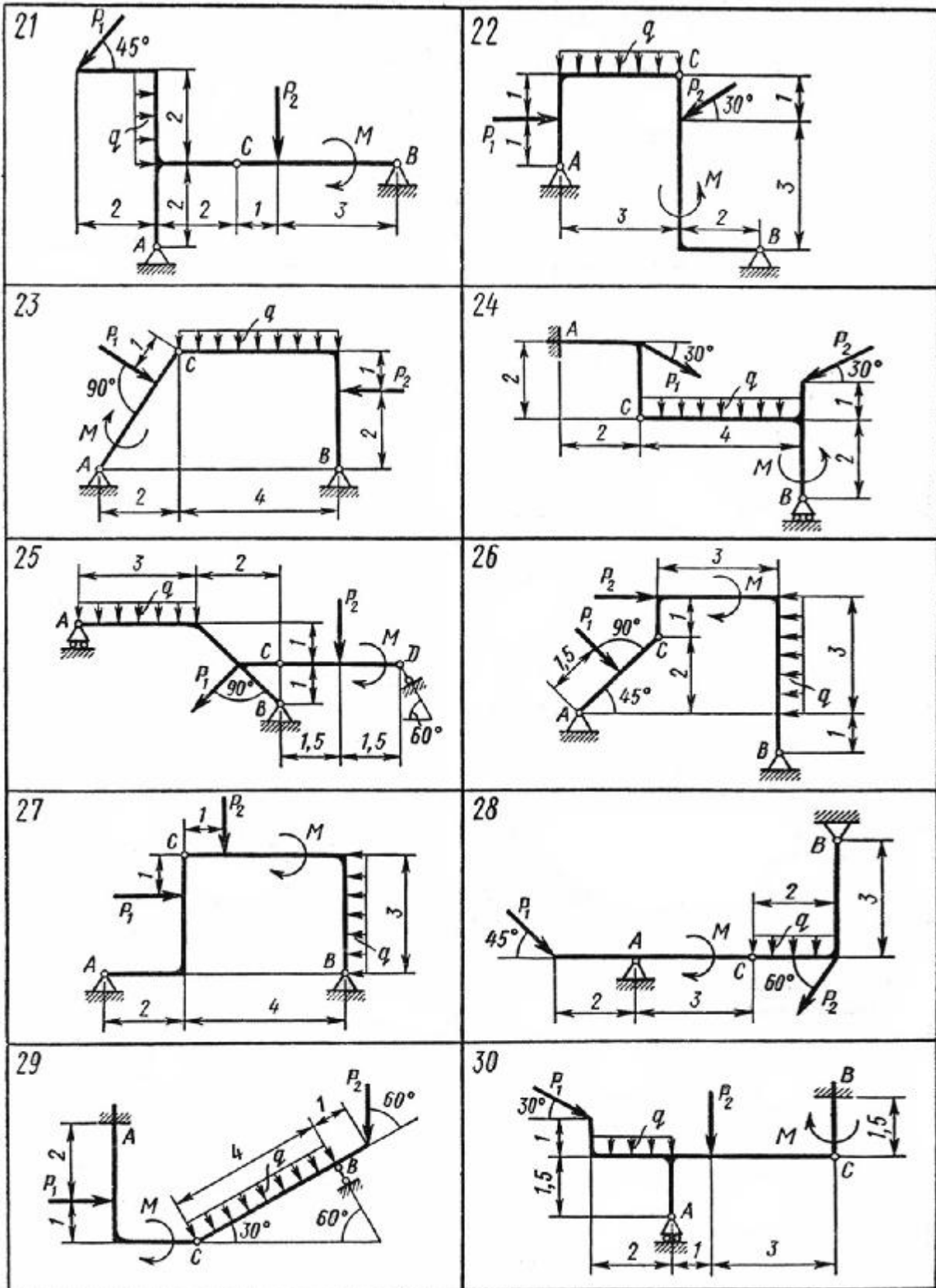
### §9. Задания домашней контрольной работы.

#### Определение реакции опор составной конструкции (система двух тел) [4].

номер варианта (рис. 1-30)	$P_1$ кН	$P_2$ кН	$M$ , кН · м	$q$ , кН/м	Искомая реакция
1	5,0		24,0	0,8	$X_A$
2	6,0	10,0	22,0	1,0	$R_A$
3	7,0	9,0	20,0	1,2	$R_B$
4	8,0	—	18,0	1,4	$M_A$
5	9,0	—	16,0	1,6	$R_A$
6	10,0	8,0	25,0	1,8	$M_A$
7	11,0	7,0	20,0	2,0	$R_B$
8	12,0	6,0	15,0	2,2	$M_A$
9	13,0	—	10,0	2,4	$X_A$
10	14,0	—	12,0	2,6	$R_A$
11	15,0	5,0	14,0	2,8	$R_D$
12	12,0	4,0	16,0	3,0	$R_B$
13	9,0	6,0	18,0	3,2	$R_A$
14	6,0	—	20,0	3,4	$M_A$
15	5,0	8,0	22,0	3,6	$M_B$
16	7,0	10,0	14,0	3,8	$R_B$
17	9,0	12,0	26,0	4,0	$R_A$
18	11,0	10,0	18,0	3,5	$M_B$
19	13,0	9,0	30,0	3,0	$M_B$
20	15,0	8,0	25,0	2,5	$R_B$
21	10,0	7,0	20,0	2,0	$R_A$
22	5,0	6,0	15,0	1,5	$R_A$
23	8,0	5,0	10,0	1,4	$R_A$
24	11,0	4,0	5,0	1,3	$M_A$
25	14,0	6,0	7,0	1,2	$R_B$
26	12,0	8,0	9,0	1,1	$R_B$
27	10,0	7,0	11,0	1,0	$X_A$
28	8,0	9,0	13,0	1,2	$R_A$
29	6,0	10,0	15,0	1,4	$M_A$
30	10,0	12,0	17,0	1,6	$M_B$







### Пример выполнения задания.

**Дано:** схема конструкции;  $P_1=5\text{кН}$ ,  $P_2=7\text{кН}$ ;  $M=22\text{кН}\cdot\text{м}$ ;  $q=2\text{кН/м}$ ;  $\alpha=60^\circ$ .

**Решение.** 1. Определение реакции опоры  $A$  при шарнирном соединении в точке  $C$ .

Рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных ко всей конструкции. Составим уравнение моментов сил относительно точки  $B$ . Для упрощения вычисления момента силы  $\dot{P}_1$ , разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$P'_1 = P_1 \cos 60^\circ = 2,5 \text{ кН}; \quad P''_1 = P_1 \sin 60^\circ = 4,33 \text{ кН},$$

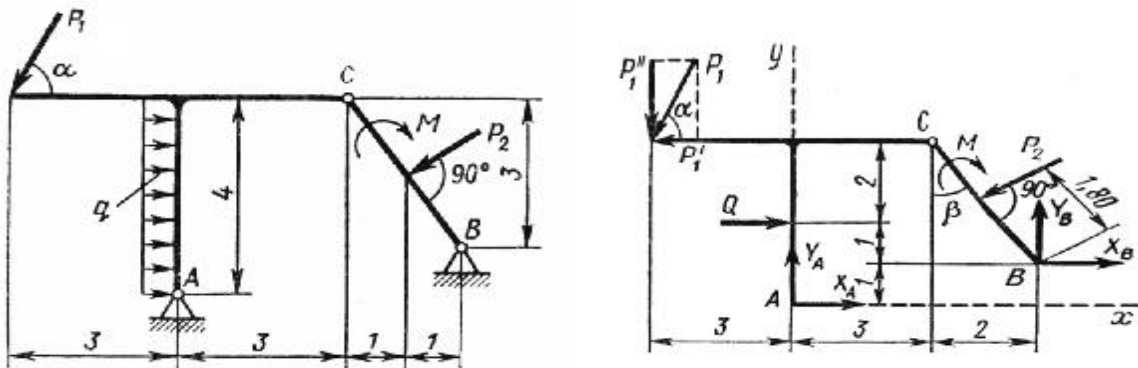
$$\sum_{i=1}^n m_B(\bar{F}_i) = 0; \quad P'_1 \cdot 3 + P''_1 \cdot 8 - Q \cdot 1 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 1 - M + P_2 \sqrt{1,0^2 + 1,5^2} = 0 \quad (1)$$

где  $Q = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН}$ .

После подстановки данных и вычислений уравнение (1) получает вид

$$X_A - 5Y_A = -24,74 \text{ кН}. \quad (1')$$

Второе уравнение с неизвестными  $X_A$  и  $Y_A$  получим, рассмотрев систему



уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира  $C$ :

$$\sum_{i=1}^n m_C(\bar{F}_i) = 0; \quad P''_1 \cdot 6 + Q \cdot 2 + X_A \cdot 4 - Y_A \cdot 3 = 0,$$

или после вычислений

$$4X_A - 3Y_A = -41,98 \text{ кН} \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1') и (2), находим:

$$X_A = -7,97 \text{ кН}, \quad Y_A = 3,36 \text{ кН}.$$

Модуль реакции опоры  $A$  при шарнирном соединении в точке  $C$  равен

$$R'_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{7,97^2 + 3,36^2} = \sqrt{74,81} = 8,65 \text{ кН}.$$



**§10. Список задач для самостоятельной работы [2].**

Номера:

1.2, 1.4, 2.1,  
2.6, 2.7, 2.17, 2.18, 2.19, 2.29, 2.30, 2.38, 2.39, 2.40,  
3.4, 3.8, 3.12, 3.14, 3.15, 3.16, 3.18, 3.19, 3.22,  
4.3, 4.7, 4.11, 4.19, 4.25, 4.26, 4.31, 4.33, 4.34,  
8.13, 8.14, 8.15, 8.16, 8.20, 8.21, 8.22, 8.23, 8.24, 8.25.

## Литература

### Основная литература

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для студ. вузов / С. М. Тарг.-12-е изд., стер.-М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.
2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина.-СПб.: Лань, 2004. – 447,с.
3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики : учеб. пособие для студ.вузов, обуч. по техн. специальностям / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова.-8-е изд., стер.-СПб.: Лань, 2001. – 763 с.

### Дополнительная литература

4. Яблонский А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для студ. вузов / А. А. Яблонский, [и др.]-М.: Интеграл-Пресс, 2004. – 382 с.
5. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие для студ. вузов : в 3 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон.- М.: Наука, 1990. - Т.1 : Статика и кинематика. – 670 с.
6. Краткий справочник для инженеров и студентов. Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / А. Д. Полянин [и др.]-М.: Междунар. прогр. образования, 1996. – 431с.
7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики : учеб. для гос. ун-тов / Н.Н. Бухгольц; в переработке и с доп. С.М. Тарга. — М.: Наука, 1972. - Ч.1: Кинематика, статика, динамика материальной точки. – 467с.

Составители: Чеботарев Андрей Сергеевич  
Щеглова Юлия Дмитриевна  
Редактор Тихомирова О.А.