

597 Государственный комитет СССР по народному образованию

Московское ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции  
и ордена Трудового Красного Знамени  
высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

---

**Т. В. БИДЕРМАН**

Утверждены редсоветом МВТУ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ  
ВСЕСОЮЗНОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО КУРСУ  
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»**

Под редакцией А. Е. Белкина

Данные методические указания издаются в соответствии с учебным планом. Рассмотрены и одобрены кафедрой сопротивления материалов 11.12.87 г., методической комиссией факультета РК 24.02.88 г. и учебно-методическим управлением 15.04.88 г.

Рецензент д. т. н. проф. ВЗПИ В. А. Светлицкий

© Московское высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Балка длиной  $l$  (рис. 1) нагружена так, что уравнение упругой линии в координатах  $y, z$  имеет вид

$$y = y_0 \left[ 1 - 3 \left( \frac{z}{l} \right)^2 + 2 \left( \frac{z}{l} \right)^3 \right].$$

Установить нагрузку, действующую на балку.

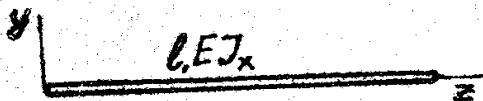


Рис. 1

Задача 2. Определить закон изменения диаметра поперечного сечения по длине балки  $d = f(z)$  равного сопротивления, показанной на рис. 2. Вычислить наибольший по абсолютному значению прогиб. Наибольший диаметр в заделке  $d_{max}$ , а также  $q, l, E$  считать известными.

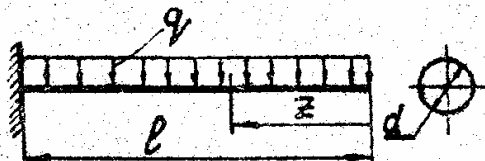


Рис. 2

Задача 3. Полоса 1 соединена с полосами 2 тремя заклепками 3 (рис. 3). Соединение нагружено растягивающей силой  $P$ . Как распределяется усилие между заклепками? Построить эпюры нормальных сил для полос 1 и 2. Деформации заклепок считать пренебрежимо малыми.

Задача 4. Балка (рис. 4), имеющая изгибную жесткость  $EI_x$ , нагружена силой  $P$ . Средняя опора смещена так, что до нагружения между балкой и опорой имеется зазор  $\Delta = \frac{1}{6} \frac{Pl^3}{EI_x}$ . Определить реакции опор и построить эпюру  $M_{изг}$ .

Задача 5. Определить внутренние силы в стержнях  $AB$  и  $CD$  и угол поворота бруса  $OBD$  (рис. 5). Деформацию изгиба брусев не учитывать.

Задача 6. Вал  $ABCD$  жестко закреплен в сечении  $D$  и нагружен моментом  $M$  (рис. 6). В точках  $B$  и  $C$  к валу прикреплены рычаги  $BF$  и  $CH$ , концы которых соединены абсолютно гиб-

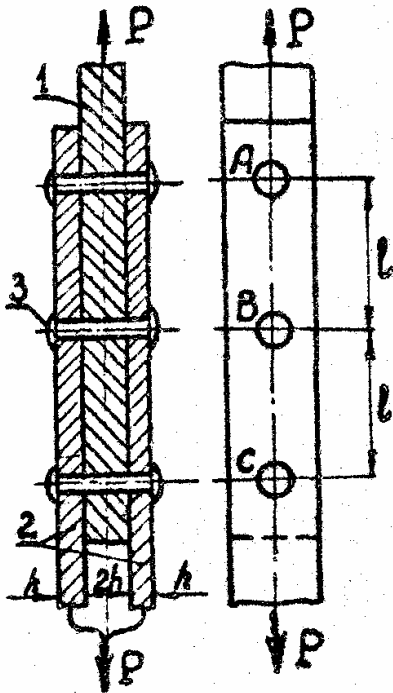


Рис. 3

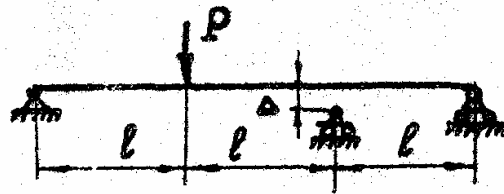


Рис. 4

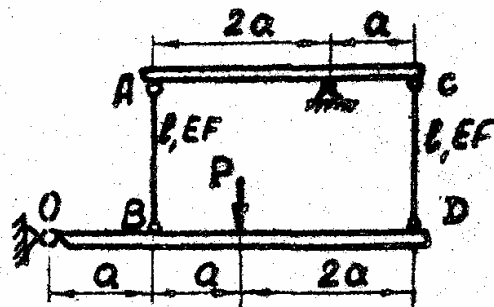


Рис. 5

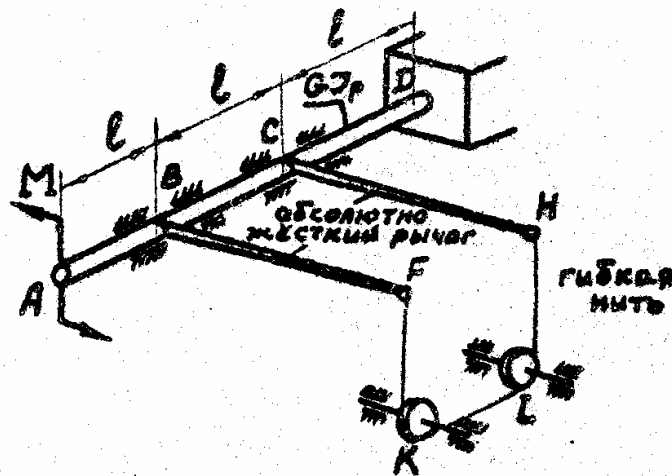


Рис. 6

кой, нерастяжимой нитью, перекинутой через блоки  $K$  и  $L$ . Построить эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$  и углов поворота  $\varphi$  для вала. Деформацией изгиба рычагов и трением в блоках пренебречь.

**Задача 7.** Обод колеса соединен со ступицей с помощью 12 спиц (рис. 7). Определить усилия в спицах при приложении к ступице силы  $P$ . При расчете обод считать абсолютно жестким. Начальное натяжение спиц принять равным нулю.

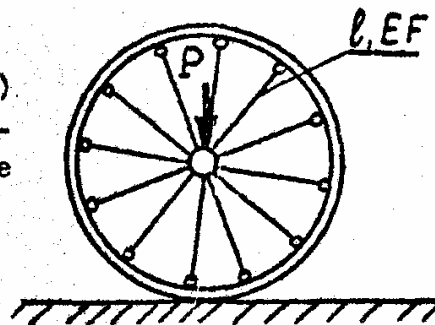


Рис. 7

**Задача 8.** Цилиндрическая витая пружина со средним диаметром  $D$ , навитая из проволоки диаметром  $d$ , надетая на цилиндрический стержень с натягом  $\delta$  (рис. 8). Определить момент  $M$ , который надо приложить к концам пружины, чтобы давление витков пружины на стержень обратилось в нуль. (Натягом называется разность между диаметром стержня и внутренним диаметром пружины.)

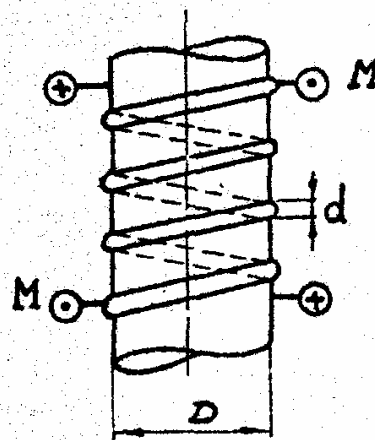


Рис. 8

**Задача 9.** Балка  $ABC$  (рис. 9) жестко заделана в сечении  $A$  и поддерживается прикрепленной в точках  $B$  и  $C$  абсолютно гибкой нерастяжимой нитью, перекинутой через блоки  $T$  и  $S$ . Определить силу натяжения нити и построить эпюру изгибающих моментов  $M_x$  для балки.

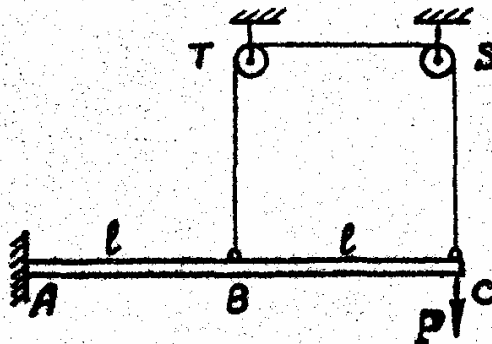


Рис. 9

**Задача 10.** Заделанные в лите  $B$  стержни диаметром  $d$  без зазора входят в отверстия абсолютно жесткой плиты  $A$ , нагруженной моментом  $M$  в ее плоскости (рис. 10). Определить угол поворота плиты  $A$  при условии:

- 1) стержни могут поворачиваться в отверстиях плиты  $A$ ;
- 2) стержни приварены к плите  $A$ .

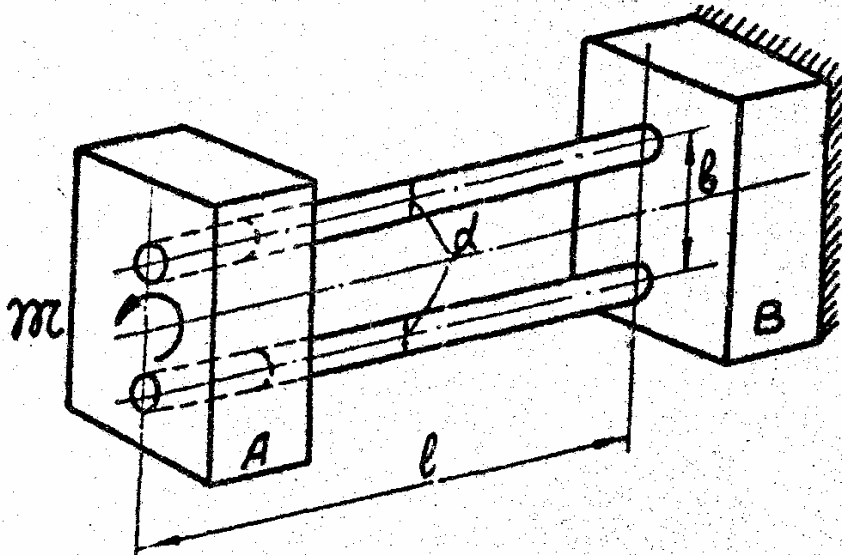


Рис. 10

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1. Из дифференциального уравнения упругой линии  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{EI_x}$  при заданном  $y$  определяем  $M_x = \frac{EI_x y_0}{l^2} (-6 + 12 \frac{x}{l})$ .  
 Поперечная сила постоянна:

$$Q_y = \frac{dM_x}{dx} = 12 \frac{EI_x y_0}{l^3}$$

Нагружение балки, соответствующее этим уравнениям, показано на рис. 11. Результат решения этой задачи можно использовать в задаче 10.

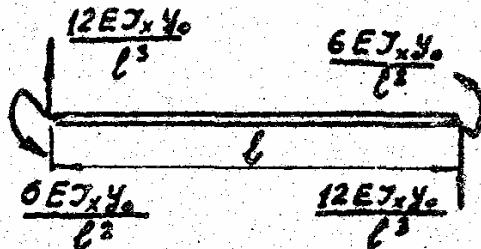


Рис. 11

Задача 2. Балкой равного сопротивления называется балка, во всех сечениях которой максимальные напряжения одинаковы.



Каноническое уравнение метода сил имеет вид

где  $\delta_{11} x_1 + \delta_{1P} = -\Delta$ ,

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ell \cdot 2\ell \right) \frac{4}{9} \ell + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ell \cdot \ell \right) \frac{4}{9} \ell \right] = \frac{4}{9} \frac{\ell^3}{EI_x};$$

$$\delta_{1P} = -\frac{1}{EI_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} P \ell \cdot \ell \right) \frac{2}{9} \ell + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} P \ell \cdot \ell \right) \frac{4}{9} \ell + \left( \frac{1}{3} P \ell \cdot \ell \right) \frac{1}{2} \ell + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} P \ell \cdot \ell \right) \frac{4}{9} \ell \right] = -\frac{7}{18} \frac{P \ell^3}{EI_x}.$$

После подстановки получаем значение  $x_1 = \frac{P}{2}$ , с учетом которого эпюра изгибающих моментов  $M_x$  для заданной балки получает вид, показанный на рис. 13.

Задача 5. Данная задача - статически определимая. Из уравнений равновесия (рис. 14) верхнего бруса

$$N_1 2\alpha - N_2 \alpha = 0; \quad 2N_1 = N_2$$

и нижнего бруса

$$N_1 \alpha + N_2 4\alpha - P \cdot 2\alpha = 0$$

следует, что

$$N_1 = \frac{2}{9} P; \quad N_2 = \frac{4}{9} P.$$

Для нахождения угла поворота бруса  $OBD$  применим метод Мора. Приложим к бруску  $OBD$  единичный момент (рис. 15). Поскольку нагрузка приложена к абсолютно жесткому телу, то способ ее реализации значения не имеет, поэтому для определения сил можно воспользоваться известным решением от заданной нагрузки

$$P: \frac{N_1^1}{N_1^P} = \frac{1}{P \cdot 2\alpha}.$$

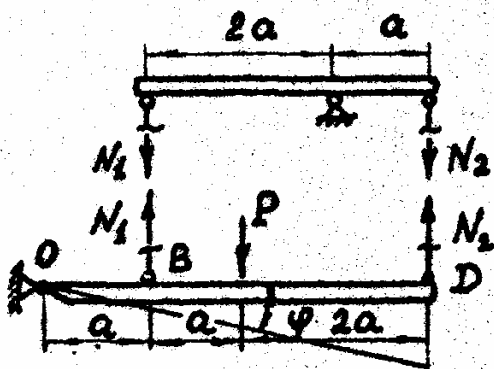


Рис. 14

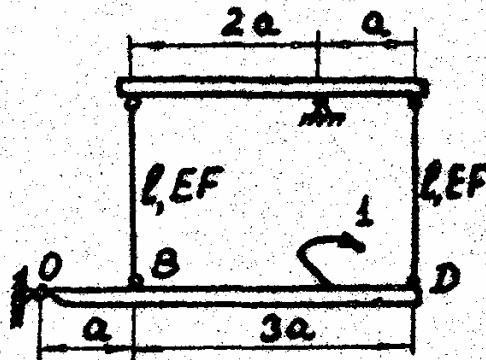


Рис. 15

Усилия в стержнях при действии единичного момента  $N_1^1 = \frac{1}{9a}$ ;  
 $N_2^1 = \frac{2}{9} a$ . Искомый угол поворота



$$\varphi = \frac{N_1 N_1^* l}{EF} + \frac{N_2 N_2^* l}{EF} = \frac{l}{EF} \left( \frac{2P}{9} \cdot \frac{1}{9a} + \frac{4P}{9} \cdot \frac{2}{9a} \right) = \frac{10 Pl}{81 EF}$$

Примечание. Можно найти угол поворота из условия равенства работы внешней силы и потенциальной энергии деформации системы:

$$A = U, \quad \frac{1}{2} P \cdot 2a \cdot \varphi = U.$$

Задача 6. В точках В и С на вал передаются одинаковые моменты  $X$ . Следовательно,  $M_{кр\,BC} = M - X$ ;  $M_{кр\,CD} = M - 2X$ .

Так как нить нерастяжимая, то точки Н и F перемещаются во взаимно противоположных направлениях на одинаковую величину (рис. 16), откуда  $\varphi_c = -\varphi_b$ . Подставляя в это уравнение значения углов поворота

$$\varphi_c = \frac{(M - 2X)l}{GI_p}; \quad \varphi_b = \frac{(M - 2X)l}{GI_p} + \frac{(M - X)l}{GI_p},$$

получаем

$$X = \frac{3}{5} M.$$

Эпюры крутящих моментов и углов поворота показаны на рис. 17.



Рис. 16

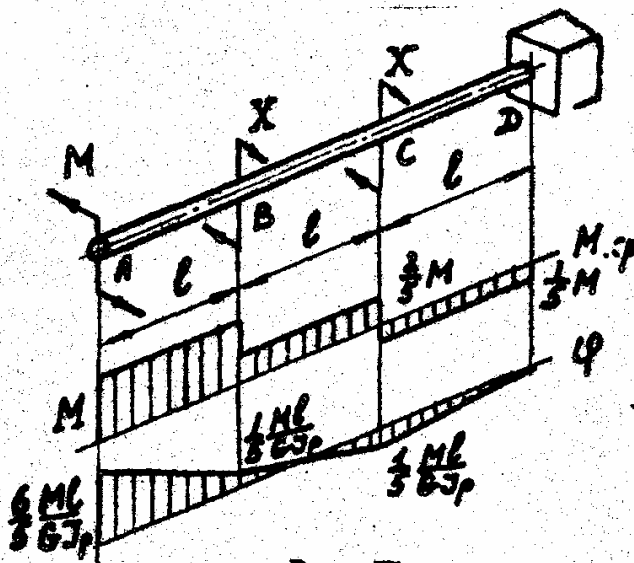


Рис. 17

Задача 7. Как известно<sup>2</sup>, вследствие симметрии системы перемещение центра колеса всегда направлено по силе  $P$ .

<sup>2</sup> См. задачу 2 в кн.: Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. - М.: 1973. - С. 75-76.

Это перемещение  $u$  не зависит от угла, составляемого силой с каждой из спиц (рис. 18). Поэтому примем углы равными  $\alpha_i = \frac{\pi}{6} i$ ,

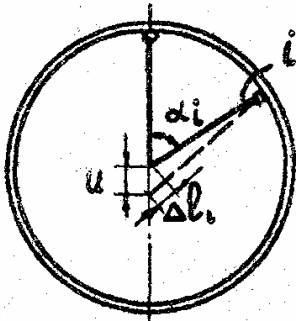


Рис. 18

где  $i = 1, 2, \dots, 12$ . Удлинение  $\Delta l_i = \frac{N_i l}{EF}$ . Уравнение равновесия ступицы:  $-P + \sum_{i=1}^{12} N_i \cos \alpha_i = 0$ .

Подставим в это уравнение усилие в  $i$ -й спице:

$$N_i = \frac{\Delta l_i EF}{l} = u \cos \alpha_i \frac{EF}{l},$$

откуда

$$u = \frac{Pl}{EF \sum_{i=1}^{12} \cos^2 \alpha_i},$$

$$\sum_{i=1}^{12} \cos^2 \alpha_i = \sum_{i=1}^{12} \frac{1 + \cos 2\alpha_i}{2} = 6,$$

где  $\sum_{i=1}^{12} \cos \frac{\pi}{3} i = 0$ .

Следовательно,

$$u = \frac{Pl}{6EF}.$$

Таким образом, усилие в  $i$ -й спице

$$N_i = \frac{Pl}{6EF} \cos \alpha_i \frac{EF}{l} = \frac{P}{6} \cos \alpha_i.$$

Максимальное усилие возникает в спице, когда ее направление совпадает с направлением силы ( $\cos \alpha_i = 1$ )  $N_{max} = \frac{P}{6}$ .

**Задача 8.** Кривизна витков пружины в свободном состоянии

$$\frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{D/2} = \frac{2}{D}.$$

Кривизна витков после надевания пружины на стержень

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\frac{D+\delta}{2}} = \frac{2}{D+\delta}.$$

Изменение кривизны

$$\Delta \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{D} - \frac{2}{D+\delta} = \frac{2\delta}{D(D+\delta)}.$$

Так как  $\delta \ll D$ , то  $\Delta \frac{1}{\rho} \approx \frac{2\delta}{D^2}$ .

Это изменение кривизны должно быть компенсировано изгибающим моментом. Из теории изгиба  $\Delta \frac{1}{\rho} = \frac{M_{изг}}{EI_x}$ .

Отсюда момент

$$M_{изг} = \Delta \frac{1}{\rho} EI_x = \frac{2\delta EI_x}{D^2},$$

где  $I_x = \frac{\pi d^4}{64}.$

**Задача 9.** В точках  $B$  и  $C$  на балку передаются силы  $X$  натяжения нити (рис. 19).

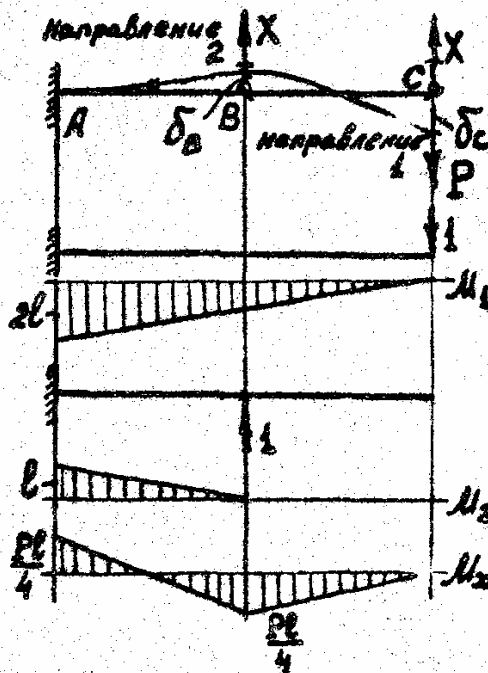


Рис. 19

Так как нить нерастяжимая, то перемещение  $\delta_c$  точки  $C$  вниз (направление 1) равно перемещению  $\delta_b$  точки  $B$  вверх (направление 2), т.е.  $\delta_c = \delta_b$ .

где  $\delta_{11}(P-X) + \delta_{12}X = \delta_{21}(P-X) + \delta_{22}X,$  (ж)

$$\delta_{11} = \frac{8l^3}{3EI_x};$$

$$\delta_{22} = \frac{l^3}{3EI_x};$$

$$\delta_{12} = -\frac{\frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{5}{3}l}{EI_x} = -\frac{5}{6} \frac{l^3}{EI_x}.$$

Уравнение (ж) после сокращения на  $l^3/EI_x$  примет вид

$$\frac{8}{3}(P-X) - \frac{5}{6}X = -\frac{5}{6}(P-X) + \frac{1}{3}X$$

или  $\frac{2l}{6} p = \frac{14}{3} X.$

Откуда  $X = \frac{3}{4} p.$

Эпюра изгибающих моментов  $M_x$  для заданной балки показана на рис. 19.

**Задача 10.** 1) При повороте плиты А (см. рис. 10) на угол  $\varphi$  торцы стержней, нагруженные, как показано на рис. 20, получают смещение  $y_0 = \varphi \frac{l}{2}$ , причем концы стержней остаются параллельными. Каждый стержень деформируется в соответствии со схемой, показанной на рис. 21. Прогиб, определенный по правилу Верещагина, составляет  $y_0 = \frac{Ql^3}{12EI}$ . (Можно воспользоваться решением задачи 1.)

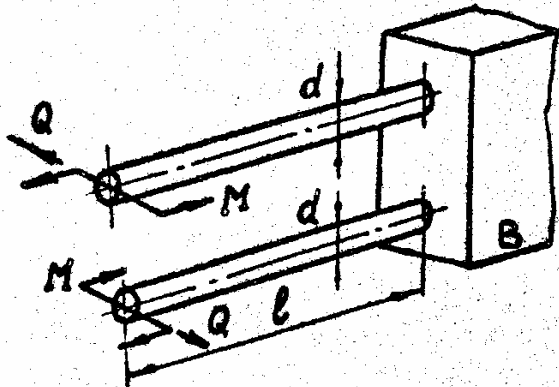


Рис. 20

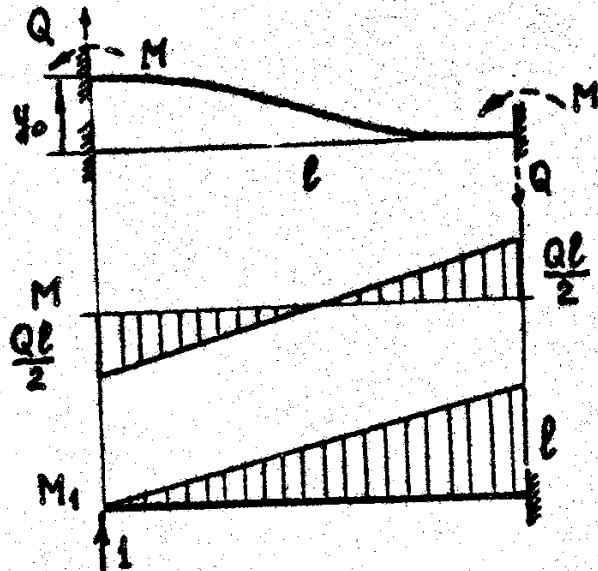


Рис. 21

Из условия равновесия плиты А (рис. 22а)

$$\delta M = Qb = 12 \frac{EI}{l^3} \cdot \varphi \cdot \frac{b^2}{2}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{\delta M l^3}{6EI b^2},$$

где

$$I = \frac{\pi d^4}{64}.$$

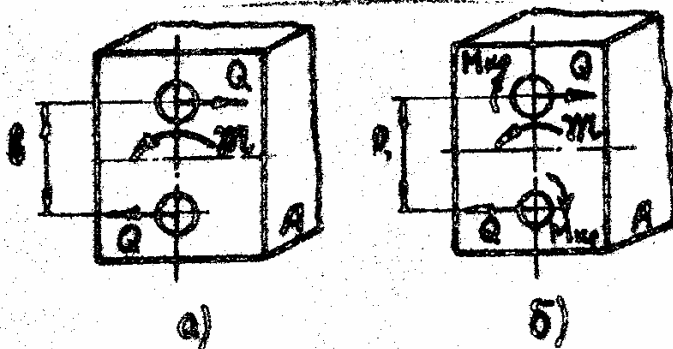


Рис. 22

2) В данном случае, кроме изгиба, стержни закручиваются на угол  $\varphi$ , причем в них возникают крутящие моменты

$$M_{кр} = \varphi \frac{GI_p}{l},$$

где  $I_p = \frac{\pi d^4}{32}.$

Из условия равновесия плиты А (рис. 22б) следует, что

$$\delta M = Qb + 2M_{кр} = 12 \frac{EI}{l^3} \varphi \cdot \frac{b^2}{2} + 2 \frac{GI_p}{l} \varphi,$$

откуда

$$\varphi = \frac{\delta M}{\frac{6EI b^2}{l^3} + \frac{2GI_p}{l}}.$$

М В Т У  
им. Н. Э. Баумана  
БИБЛИОТЕКА

Татьяна Вадимовна Бидерман

Редактор О.М. Королева

Корректор Л.И. Малютина

Заказ **В04** Объем 0,75 п.л. (0,7уч.-изд.л.) Тираж 400 экз.  
Бесплатно. Подписано в печать 20.05.88 г. План 1988г., ж 88.

Типография МВТУ. 107005, Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.