МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ
АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Методические указания

к выполнению лабораторного практикума по дисциплине
‘‘Математические методы и модели в расчётах на ЭВМ’’
для студентов специальностей "Промышленная теплоэнергетика"
и "Теплофизика"

Днепропетровск НМетАУ 2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ
АКАДЕМИЯ УКРАИНЫ

Методические указания

к выполнению лабораторного практикума по дисциплине
‘‘Математические методы и модели в расчётах на ЭВМ’’
для студентов специальностей "Промышленная теплоэнергетика"
и "Теплофизика"

Утверждено

на заседании кафедры ТЭМП

протокол № 30 от 18.10.2000

Днепропетровск НМетАУ 2000

УДК 681:3:51.001.57

Методические указания к выполнению лабораторного практикума по дисциплине ‘‘Математические методы и модели в расчётах на ЭВМ’’ для студентов специальностей "Промышленная теплоэнергетика" и "Теплофизика"/ Сост.: В.Л. Бровкин, В.А. Вехник – Днепропетровск: НМетАУ, 2000. – 69 с.

Методические указания содержат одиннадцать лабораторных работ по дисциплине ‘‘Математические методы и модели в расчётах на ЭВМ’’. Лабораторные работы предназначены для приобретения практических навыков решения математических и инженерных задач при помощи математического пакета **MathCAD**.

Методические указания предназначены для студентов специальностей "Промышленная теплоэнергетика" и "Теплофизика".

Составители:	В.Л. Бровкин, канд. техн. наук, доц., В.А. Вехник, инж., аспирант.
Ответственный за выпуск	В.И. Губинский, д-р техн. наук, проф.
Рецензент	А.И. Михайлёв, д-р техн. наук, проф.

Лабораторная работа №1

Простейшие вычисления и операции в среде MathCAD

Цель работы:

1. Получить представление о назначении и возможностях программного средства **MathCAD**.
2. Приобрести навыки простейших алгебраических вычислений в среде **MathCAD**.

1. Общие сведения

MathCAD (Mathematical Computer Aided Design – математическая система автоматизированного проектирования) – программное средство, предназначенное для решения математических задач, построения графиков функций и оформления полученных результатов. Документы (**WorkSheets**), созданные в среде **MathCAD**, могут содержать ‘‘работающие’’ математические формулы, записанные в естественном виде, разнообразные графики функций и различные иллюстративные материалы (рисунки, фотографии, анимацию).

Пользовательский интерфейс системы создан так, что пользователь, имеющий элементарные навыки работы с **Windows**-приложениями, может сразу начать работу с **MathCAD**. Интерфейс системы внешне напоминает интерфейс широко известных текстовых процессоров **Word** под **Windows**. Окно **MathCAD** с загруженным рабочим документом показано на рисунке 1.1.

Главной отличительной чертой систем класса **MathCAD** является то, что описание математических задач и результатов их вычислений производится при помощи привычных математических формул и знаков. Это делает документ, видимый на экране дисплея (см. рис. 1.1), чрезвычайно похожим на странички текста из математических книг и научных статей.

Чрезвычайная простота интерфейса **MathCAD** сделала его одним из самых популярных и, безусловно, самым распространённым в студенческой среде математическим пакетом.

В среде **MathCAD** доступны более двухсот операторов и логических функций, предназначенных для численного и символьного решения технических проблем различной сложности. **MathCAD** содержит:

1. обширную библиотеку встроенных математических функций;
2. инструменты построения разнообразных графиков;
3. средства создания текстовых комментариев и оформления отчётов;
4. конструкции, подобные конструкциям языков программирования, позволяющие писать программы для решения задач, которые невоз-

можно или очень сложно решить стандартными инструментами пакета;

5. удобно организованную интерактивную систему получения справки и оперативной подсказки.

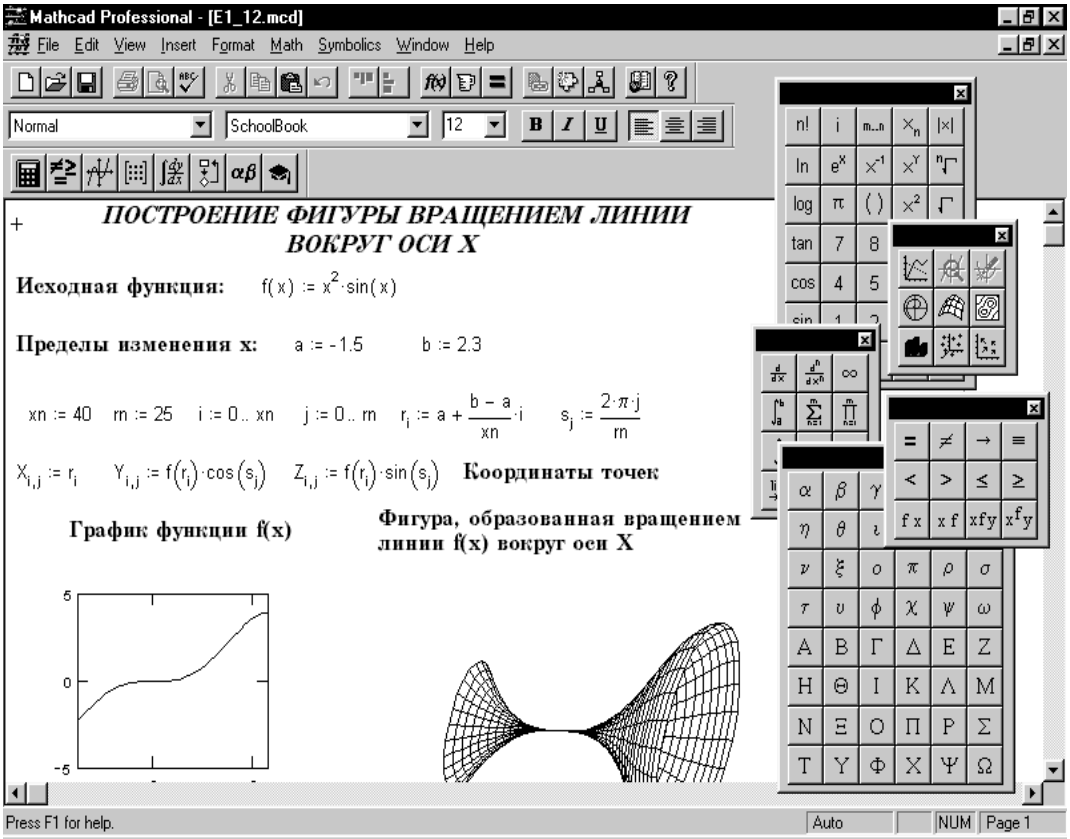


Рис 1.1. Окно **MathCAD 7 Pro** с загруженным рабочим документом

2. Графический интерфейс пользователя MathCAD

Под графическим интерфейсом пользователя подразумевается совокупность средств графической оболочки **MathCAD**, обеспечивающих легкое управление системой, как с клавиатуры, так и с помощью мыши. К элементам графического интерфейса пользователя относятся меню, кнопки инструментальных панелей, шаблоны различных математических операций, линейки прокрутки (скроллинга) и т. д.

Рассмотрим подробнее элементы графического интерфейса пользователя **MathCAD.**

Верхняя строка окна системы содержит указание на имя системы или текущего открытого окна. Следующая строка содержит позиции главного меню. Перечислим их:

File – работа с файлами, сетью Internet и электронной почтой;
Edit – редактирование документов;
View – изменение средств обзора и включения/выключения элементов интерфейса;
Insert – вставка объектов и их шаблонов (включая графику);
Format – изменение формата (параметров) объекта;
Math – управление процессом вычислений;
Graphics – работа с графическим редактором;
Symbolic – выбор операций символьного процессора;
Window – управление окнами системы;
Books – работа с электронными книгами;
Help – работа со справочной базой данных о системе.

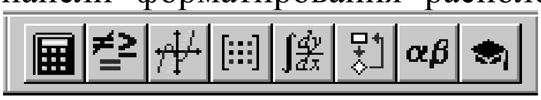
Команды главного меню описаны в **Приложении**.

Если какая-либо позиция главного меню делается активной, она выводит ниспадающее подменю со списками доступных и недоступных (но возможных в дальнейшем) операций (команд). Доступные в данный момент операции даны чётким шрифтом, а недоступные – шрифтом с характерным затемнением, но позволяющим всё же прочесть название операций.

Работа с документами **MathCAD** обычно не требует обязательного использования возможностей главного меню, так как основные из них дублируются кнопками быстрого управления. Их можно выводить на экран или убирать с него с помощью соответствующих опций меню **View**.

Чаще всего используются три панели, содержащие такие кнопки: панель инструментов (дублирующая ряд наиболее распространённых команд и операций), панель форматирования (для выбора типа и размера шрифтов и способа выравнивания текстовых комментариев) и панель математических операций (для выбора палитр математических операций). Эти панели видны на рис. 1.1 под строкой главного меню.

На рис. 1.2 указано назначение кнопок панели инструментов:

Ниже панели форматирования расположена панель математических операций: 

Математические операции в **MathCAD** разделены на группы и щелчок на каждой кнопке панели математических операций открывает другую панель – палитру, на которой собственно и расположены кнопки математических операций соответствующей группы. Более подробно палитры математических операций описаны в последующих лабораторных работах.

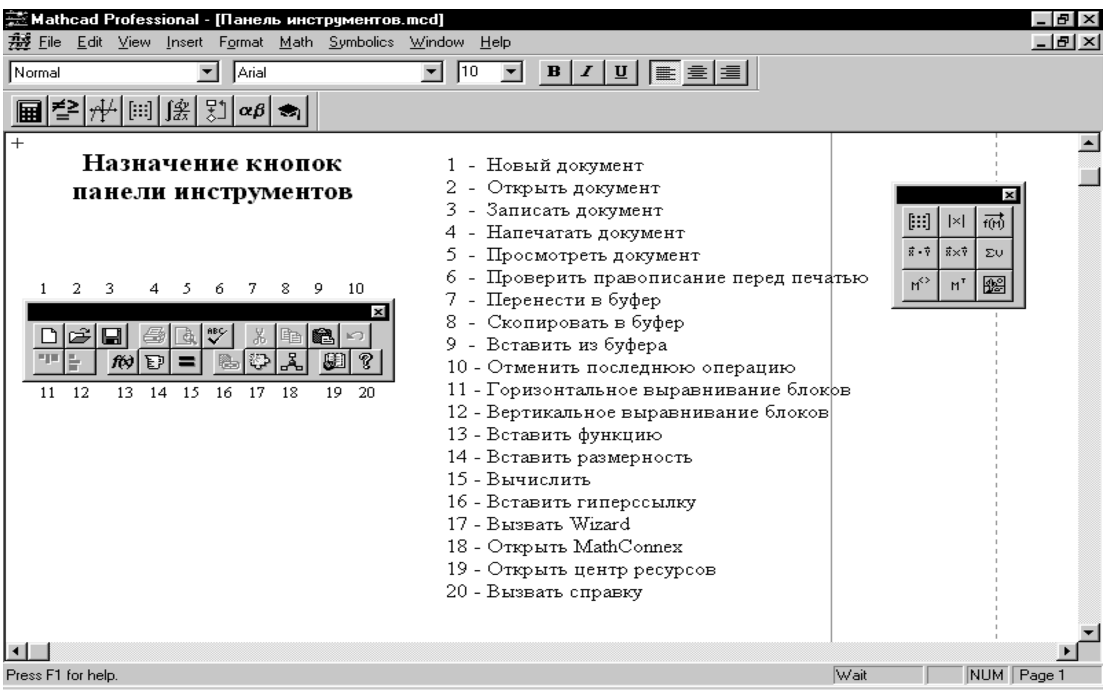


Рис. 1.2. Назначение кнопок панели инструментов

3. Понятие о входном языке системы MathCAD

Общение пользователя с системой **MathCAD** происходит на некотором промежуточном математически ориентированном языке визуального программирования - входном языке. Многие математические записи в этом языке вводятся просто через шаблоны соответствующих операторов. Этот язык настолько приближен к математическому языку описания вычислительных задач, что практически не требует их программирования. Нужно лишь точное описание алгоритма решения задачи.

Операторы – это специальные символы (+, –, /, *, = и т. д.), указывающие на выполнение тех или иных операций над данными – **операндами**. Последние могут быть представлены константами или **переменными** – объектами с именами, хранящими данные определенного типа и значения.

Функция – объект входного языка, имеющий имя и параметры, указываемые в круглых скобках. Имя функции отождествляется с соответствующей математической функций, – например **sin**(x) – это функция вычисления синуса аргумента x. Отличительной чертой функции является возврат значения (результата вычисления функции) в ответ на обращение к ней.

Операторы и функции используются для создания **математических выражений** – формул, которые могут вычисляться в численном или символьном виде.

4. Работа с формульным редактором

Фактически система **MathCAD** <u>интегрирует в себе три редактора</u>: формульный, текстовый и графический. Для запуска формульного редактора достаточно установить курсор мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой клавишей. Появится курсор в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора.

Курсор указывает место, с которого можно начинать набор формул – вычислительных блоков. В зависимости от места расположения курсор может менять свою форму. Так в области формул курсор превращается в синий уголок, указывающий направление и место ввода.

Примеры выполнения работы

I. Вычислить значения арифметических выражений $49+\frac{12}{4}$ и $49+\frac{12}{5}$**,** для чего**:**

1) Щёлкните мышью по любому месту в рабочем документе – в поле появится крестик, обозначающий позицию, с которой начинается ввод.

2) Введите с клавиатуры символы в следующей последовательности: 49 + 12 / 4 =. **MathCAD** вычислит значение выражения и выведет справа от знака равенства результат.

<u>Необходимо запомнить правило</u>: *Нажатие клавиши* = *имеет двоякое действие. Если переменная используется впервые, то знак* = *будет автоматически заменён на* := (*знак присвоения, который также вызывается нажатием клавиши* :). *Если знак = ввести после выражения, либо уже существующей переменной, то будет выведено их значение.*

3) Щёлкните мышью справа внизу возле цифры 4 и нажмите клавишу <**Backspace**>. Введите цифру 5 и щёлкните мышью вне выделяющей рамки.

II. Удаление выражения из рабочего документа.

1) Щёлкните мышью по любому месту в выражении и нажимайте клавишу <**Space**> до тех пор, пока всё выражение не будет выделено угловой синей рамкой.

2) Нажмите клавишу <**Backspace**> (поле ввода окрасится в чёрный цвет) и, нажав клавишу <**Del**>, удалите выделенное.

III. Вычислить длину вектора, если его проекции на координатные оси 0-X, 0-Y и 0-Z равны соответственно X = 0,5 м., Y = 1,3 м., Z = 1 м. Расчётная формула $d=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$.

1) Щёлкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры x : 0.5 * m и щёлкните по свободному месту вне поля ввода. Здесь m означает размерность величины в метрах.

<u>Необходимо запомнить правило</u>: *Основные размерности обозначаются в* **MathCAD** *следующим образом:* m – *метр,* kg – *килограмм,* s – *секунда,* J –*Джоуль,* W – *Ватт,* K – *Кельвин.*

2) Аналогично введите значения проекций Y и Z.

3) Установите курсор в любом свободном месте документа ниже выражений для X Y и Z и нажмите клавишу с изображением обратного слеша (\ ), либо нажмите кнопку с изображением калькулятора, которая находится на панели инструментов, и выберите в раскрывшемся меню кнопку с изображением квадратного корня.

4) Введите в шаблон (чёрный прямоугольник) под знаком корня выражение X ^ 2 <Space> +Y ^ 2 <Space> + Z ^ 2 =.

5) Теперь сохраните созданный документ на жёстком магнитном диске, для чего выберите в меню **File** команду **Save** (Сохранить), либо нажмите клавишу [F6].

<u>Совет</u>: *Удобнее всего сохранять файл в своей личной папке (предварительно создав её) под именем, соответствующим номеру лабораторной работы.*

Задание для самостоятельной работы

Вычислить выражение $\sqrt{\frac{A+B}{C^3}}$, значения A, B и C которого взять из таблицы 1.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

Таблица 1.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	X	Y	A	B	C	№ вар.	X	Y	A	B	C
1	-0.1	-3	$\frac{Y}{X}$	Y^2	$\sqrt{X\cdot Y}$	9	0.2	$\frac{1}{X}$	$\sqrt{5}$	$\frac{X}{A\cdot Y^2}$	$\sqrt{Y}$
2	1,4	X^2	-2	X^3	$\sqrt{B}$	10	5	-3	$\sqrt{X}$	A^3	$\frac{1}{X\cdot A}$
3	8	$\sqrt{X}$	X^2	$\sqrt{5}$	2,5	11	1,8	X^3	$\sqrt{Y}$	$\frac{X\cdot A}{y^2}$	87
4	4,5	X^3	$\sqrt{Y}$	$\frac{1}{X^4}$	$\sqrt{B}$	12	1	4,5	$\frac{1}{X^4}$	$\frac{1}{X\cdot Y}$	$\sqrt{B}$
5	3	0,9	$X\cdot\sqrt{Y}$	A^3	$\frac{1}{X\cdot A}$	13	4,3	3	$\sqrt{Y}$	$\frac{1}{X^4}$	$\frac{1}{X\cdot A}$
6	4	8,1	$\frac{1}{X\cdot Y}$	$\frac{X\cdot A}{Y^2}$	$\frac{X}{A\cdot B^2}$	14	7,2	$\sqrt{X}$	$X\cdot\sqrt{Y}$	$\frac{X\cdot A}{Y^2}$	$\frac{1}{X^4}$
7	3,2	X^3	$X\cdot Y$	A^3	$\frac{1}{X\cdot A}$	15	4	X^3	$X\cdot Y$	6,7	9,2
8	34	3,6	$\sqrt[3]{X}$	Y^3	$\sqrt{X\cdot Y}$	16	5,6	$\sqrt[3]{X}$	$\sqrt{Y}$	$\frac{X\cdot A}{Y^2}$	$\frac{1}{X\cdot A}$

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, кратко оформленный реферат разделов 1 – 4, описание команд меню **File** и **View** из **Приложения** и протокол действий, самостоятельно выполняемых студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче работы студент должен продемонстрировать практическое умение выполнять простейшие расчёты в среде **MathCAD** и ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Назначение программного средства **MathCAD**?
2. Что называется графическим интерфейсом пользователя **MathCAD**? Из каких элементов он состоит?
3. Для чего предназначена панель инструментов? Какие кнопки она содержит?
4. Что представляет из себя входной язык системы **MathCAD?**
5. Что называется переменной, функцией? Как присвоить значение переменной?
6. Какие редакторы интегрирует в себе система **MathCAD?**
7. Как в среде **MathCAD** возвести число в степень, и вычислить значение квадратного корня?
8. Как удалить какое-либо выражение из рабочего документа?
9. Какие бывают формы курсора в **MathCAD**? Что они обозначают?
10. Какое действие вызывает нажатие клавиши = ?
11. Как указать размерность переменной? Как обозначаются основные размерности?
12. Как сохранить документ в файле на жёстком диске? Как открыть другой документ, хранящийся на жёстком диске?

Лабораторная работа №2

Графики функций, текстовые блоки и массивы в среде MathCAD

Цель работы:

1. Ознакомиться с графическим и текстовым редакторами программного средства **MathCAD**.
2. Приобрести практические навыки построения графиков, таблиц и оформления текстовых блоков в среде **MathCAD**.

1. Общие сведения

Для создания графиков в системе **MathCAD** имеется программный графический процессор, который позволяет строить самые разные графики, например графики в декартовой и полярной системах координат, трёхмерные поверхности, графики уровней и т. д.

Для построения графиков используются шаблоны, перечень которых содержится в подменю **Graph** меню **Insert,** кроме того, панель, содержащую кнопки шаблонов графиков, можно вызвать нажатием кнопки , которая находится в математической панели**.**

Большинство параметров графического процессора, необходимых для построения графиков, по умолчанию задается автоматически. Поэтому для начального построения графика того или иного вида достаточно только задать тип графика. В подменю **Graph** содержится список из семи основных типов графиков. На рис. 2.1 показана палитра графиков, название кнопок которой соответствует пунктам подменю **Graph** меню **Insert**:

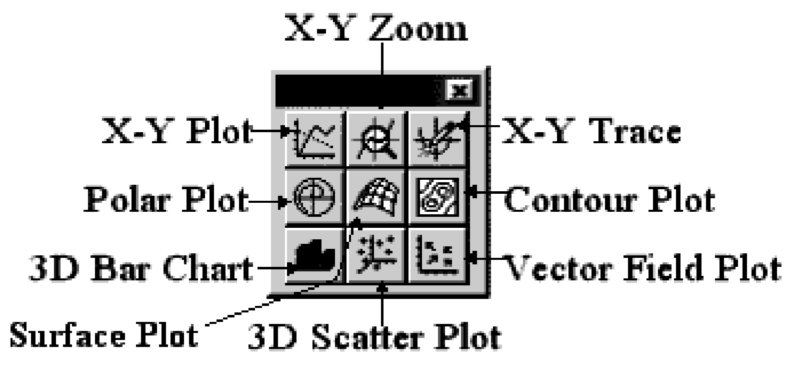


Рис. 2.1. Палитра графиков

X–Y Plot– создать шаблон двумерного графика в декартовой системе координат;

Polar Plot – создать шаблон графика в полярной системе координат;

Surface Plot– создать шаблон для построения трехмерного графика;

Contour Plot– создать шаблон для контурного графика трехмерной поверхности;

3D Scatter Plot – создать шаблон для графика в виде точек (фигур) в трехмерном пространстве;

3D Bar Chart – создать шаблон для изображения в виде совокупности столбиков в трехмерном пространстве;

Vector Field Plot – создать шаблон для графика векторного поля на плоскости.

Для изменения формата уже построенного графика необходимо выделить его, щёлкнув на нём указателем мыши. Выделенный график обводится сплошной линией с маркерами для изменения размеров. Если два раза щёлкнуть указателем мыши по полю графика, то будет вызвано диалоговое окно настройки параметров графика. Параметры графика можно изменить, также, при помощи команд, которые содержатся в подменю **Graph** меню **Format**.

Полезным инструментом при работе с двухмерными графиками является применение специального графического маркера в виде двух перекрещивающихся пунктирных линий. Они появляются при выполнении команды **X-Y Trace**, которая содержится в подменю **Graph** меню **Format**, либо нажатием соответствующей кнопки на панели графиков. При этом появляется окно этой операции, в котором отображаются координаты маркера, перемещаемого по полям графика. Поместив маркер на какую-либо интересующую вас точку графика, можно примерно определить её координаты

Еще одна особенность при работе с двухмерными графиками заключается в возможности их просмотра с увеличением отдельных частей этих графиков. Она реализуется операцией **X–Y Zoom**, которая содержится в подменю **Graph** меню **Format**, либо нажатием соответствующей кнопки на панели графиков. Перемещением мыши с нажатой левой клавишей можно выделить определенную часть графика. При этом минимальная и максимальная координаты по осям X и Y отображаются в информационном окне данной операции.

Графики любого вида, как любые объекты документа можно выделять, заносить в буфер обмена, вызывать их оттуда и переносить в любое новое место документа. Их можно и просто перетаскивать с места на место курсором мыши, а также растягивать по горизонтали, по вертикали и по диагонали, цепляясь за специальные маркеры выделенных графиков курсором мыши.

2. Построение графиков в декартовой системе координат

Есть два способа построения наиболее распространённых графиков в декартовой системе координат. Первый, наиболее простой способ, – это ввести выражение, описывающее некоторую функцию *f*(x), а затем вызвать шаблон **X–Y Plot** с помощью меню или палитры графиков. В появившемся шаблоне остаётся только ввести имя переменной x по оси 0–X и щёлкнуть мышью вне области графика – он будет построен. Так построен первый график на рис. 2.2. Следует обратить внимание на то, что на оси ординат записывается имя функции (например, sin(x), f(x) и т.п.), при этом в скобках указывается имя аргумента, стоящего на оси абсцисс (в данном случае – x).

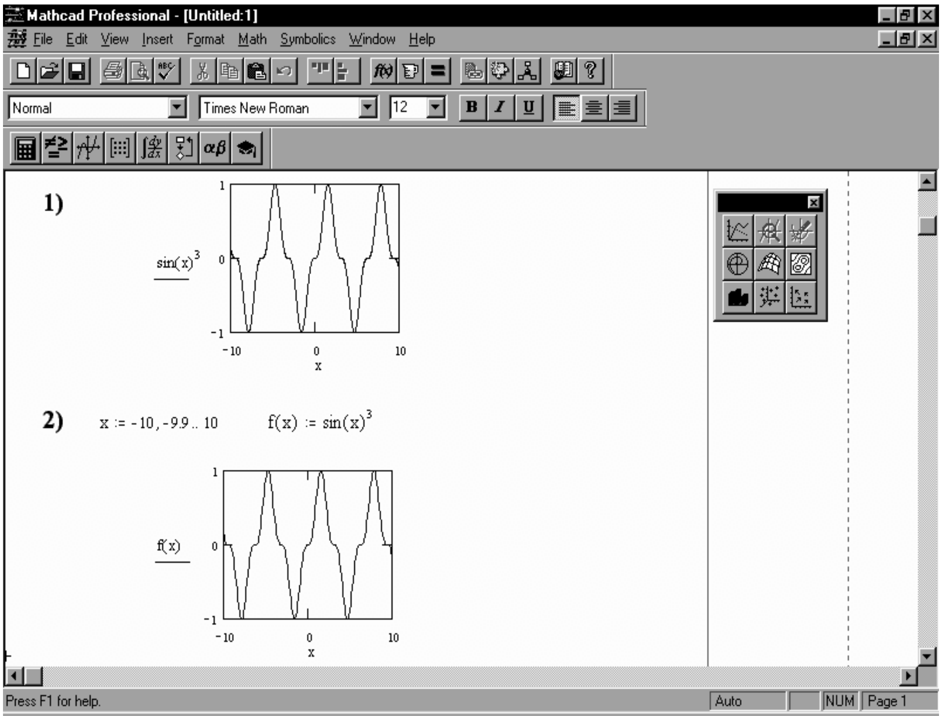


Рис. 2.2. Пример построения двумерных графиков в декартовой системе координат

Для второго способа нужно вначале задать ранжированную переменную, например x, указав диапазон её изменения и шаг. Шаг d задаётся следующим образом: указывается начальное значение переменной x_0, а затем через запятую значение $x_0 + d$. После этого через две точки указывается конечное значение x – смотрите второй график на рис. 2.2. Две точки вводятся нажатием клавиши ; – точка с запятой. Затем надо задать соответствующую функцию или функции и вызвать шаблон двумерного графика. Незаполненный шаблон представляет собой большой пустой прямоугольник с местами ввода данных в виде тёмных маленьких прямоугольников, расположенных около осей абсцисс и ординат будущего графика.

В средние шаблоны данных нужно поместить имя переменной (например, x на оси абсцисс) и имя функции (например, f(x) на оси ординат). Если строятся графики нескольких функций в одном шаблоне, то для разделения имён функций следует использовать запятые. Крайние шаблоны числовых данных служат для указания предельных значений абсцисс и ординат, т. е. они задают масштабы графика. Если оставить эти шаблоны незаполненными, то масштабы по осям графика будут устанавливаться автоматически.

3. Построение графиков поверхностей

Порядок построения графиков поверхности рассмотрим на примере построения функции $f(x,y) = -\sin(x^2 + y^2)$, где x изменяется от 2 до 3,1, а y от 1 до 2,5. Фрагмент рабочего документа с построенным графиком представлен на рис. 2.3.

Для построения графика поверхности (как, впрочем, и любого трёхмерного графика) необходимо выполнить следующую последовательность действий:

1. Задать вид функции двух переменных – f(x, y) : - sin(x^2<Space> + y^2);
2. Задать пределы изменения аргументов – хн:2<Enter> хк:3.1<Enter> ун:1<Enter> ук:2.5<Enter>;
3. Задать нумерацию узлов сетки поверхности по первому аргументу – i : 0 ; 40;

Замечание: *число узлов обычно выбирается произвольно. Если задан шаг изменения аргумента, например, Δx, то число узлов равно* $i = \dfrac{xк - xн}{\Delta x} + 1$;

4. Сформировать вектор первого аргумента – x [i : хн + (хк - хн)·i / 40;

Необходимо запомнить правило: *в* **MathCAD** *существует два вида нижних индексов: 1) декоративный – для придания наглядности выражениям. Он вызывается нажатием клавиши ‘‘.’’– точка (при латинской раскладке клавиатуры). 2) индекс массива – для нумерации элементов массива. Он вызывается нажатием клавиши ‘‘[’’ – открывающаяся квадратная скобка. При построении графиков используются индексы массива.*

5. Задать нумерацию узлов сетки поверхности по второму аргументу – k : 0 ; 20;
6. Сформировать вектор второго аргумента – y [k : ун + (ук - ун)·k / 20;
7. Заполнить матрицу **M** значениями функции $f(x,y)$ в узлах сетки – M [i, k : f (x [i <Space>, y [k <Space>);
8. Построить график поверхности, для чего нажмите кнопку **Surface Plot** на панели графики, либо выберите команду **Surface Plot** подменю **Graph** меню **Insert**;

Для изменения параметров графика необходимо щёлкнуть два раза по полю графика, либо выбрать команду **3D Plot** подменю **Graph** меню **Format**.

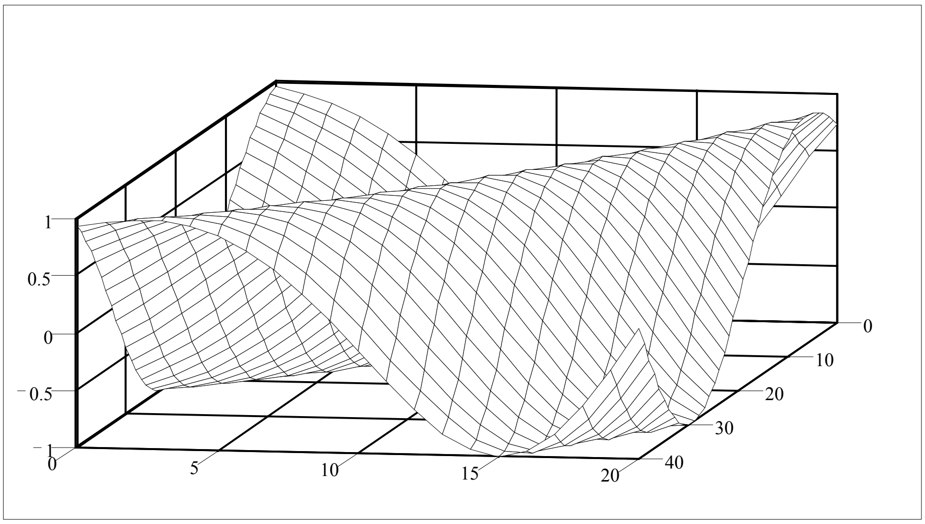
Форматирование трёхмерного графика имеет на порядок больше возможностей, чем форматирование двухмерного. К цвету, толщине и виду линий, нумерации осей, сетке и пр. добавляется вид (**View**) графика: наклон к зрителю и вращение по оси Z, а также многое другое.

$f(x,y) := -\sin(x^2 + y^2)$ $\quad$ $x_н := 2$ $\quad$ $x_к := 3.1$ $\quad$ $y_н := 1$ $\quad$ $y_к := 2.5$

$i := 0..40$ $\qquad$ $x_i := x_н + (x_к - x_н)\cdot\frac{i}{40}$

$k := 0..20$ $\qquad$ $y_k := y_н + (y_к - y_н)\cdot\frac{k}{20}$

$M_{i,k} := f(x_i, y_k)$



M

Рис. 2.3. График поверхности

4. Построение графиков в полярной системе координат

В полярной системе координат каждая точка задаётся углом W, и модулем радиус-вектора R(W). График функции обычно строится в виде линии, которая описывает конец радиус-вектора при изменении угла W в определённых пределах, чаще всего от 0 до 2π.

Перед построением таких графиков надо задать значения переменной W. После вывода шаблона следует ввести W в шаблон снизу и функцию R(W) в шаблон справа, а также указать нижний предел изменения длины радиус-вектора в шаблоне справа внизу и верхний предел в шаблоне справа сверху.

5. Построение контурных графиков поверхности

Ещё один широко распространённый тип графиков для представления поверхностей – с помощью линий уровня. Такие графики широко применяются, например, в картографии. Операция **Contour Plot** служит для вывода шаблона таких графиков. Он подобен шаблону, описанному при построении графиков поверхности (кстати, как и предшествующие выводу шаблона действия по созданию матрицы **M**).

Часто контурные графики получаются более информативными, чем просто поверхности. У последних нередко одни части поверхности закрывают другие. Например, пик на переднем плане может закрыть меньшие пики или впадины на заднем плане. У контурных графиков такого эффекта нет, и на них легко обнаруживаются все пики и впадины, правда, при достаточно большом числе линий уровня и малом расстоянии между ними.

6. Построение точечных графиков поверхности

Нередко поверхности представляют в виде находящихся в трёхмерном пространстве точек, кружочков или иных фигур. Каждая из этих фигур несёт информацию о геометрическом положении её центра в трёхмерном пространстве. Такой график создаётся операцией **3D Scatter Plot**.

Порядок построения точечных графиков поверхности такой же, как и порядок построения графика поверхности.

7. Построение графика в виде гистограммы

Весьма распространённой формой представления поверхностей является представление её рядом трёхмерных столбиков, высота которых определяется значением координаты $f(x, y)$. Для этого используется операция **3D Bar Char**. Подобные графики широко применяются при представлении сложных статистических данных, например представленными тремя независимыми переменными. Порядок построения гистограмм такой же, как и порядок построения остальных трёхмерных графиков.

8. Построение векторного графика поверхности

Ещё один вид представления поверхности – векторное представление. Оно задаётся построением коротких стрелочек – векторов. Каждая стрелка обращена остриём в сторону нарастания высоты поверхности, а плотность расположения стрелок зависит от скорости этого нарастания. Для построения такого графика используется команда **Field Plot**. Порядок построения векторных графиков такой же, как и порядок построения остальных трёхмерных графиков.

9. Работа с текстовым редактором

Текстовый редактор позволяет создавать текстовые комментарии. Они делают документ с формулами и графиками более понятными. В простейшем случае для запуска текстового редактора достаточно ввести символ " (двойная кавычка). В появившийся прямоугольник можно начать вводить текст. В текстовом блоке курсор имеет вид красной вертикальной черты и отмечает место ввода.

Текст редактируется общепринятыми средствами – перемещением места ввода клавишами управлением курсором, установкой режимов вставки и замещения символов (клавиша **Insert**), стиранием (клавиши **Del** и **BackSpace**), выделением, копированием в буфер, вставкой из буфера и т. д. Для редактирования текстовых блоков, также, предназначены следующие пункты меню **Format**:

Text…– выбор шрифта, его цвета, размера и стиля написания.

Paragraph…– изменение величины отступа первой строки и всего текста, а также центровки текста.

Style…– редактирование стилей написания текста в документе.

Стиль написания, шрифт, размер шрифта, центровку текста можно изменить, также, при помощи кнопок панели форматирования.

10. Создание массивов

Кроме способа, описанного в третьем разделе, одномерные и двухмерные массивы можно создать при помощи шаблонов. Шаблоны массивов вызываются нажатием кнопки с изображением квадратной матрицы. Эта кнопка расположена на палитре векторов и матриц, которая, в свою очередь, вызывается нажатием кнопки с изображением квадратной матрицы на панели математических операций.

Для создания массива (например, M) необходимо после знака присваивания M:= поместить шаблон массива. При вызове шаблона массива будет раскрыто диалоговое окно, в котором необходимо указать количество строк (**Rows**) и количество столбцов (**Columns**).

Задание для самостоятельной работы

Построить график одной или нескольких функций. Задание взять из табл. 2.1 согласно порядковому номеру студента по журналу группы. Все зависимости функций должны быть построены на одном графике. Рабочий лист должен содержать текстовый комментарий, указывающий номер варианта и вид графика.

Таблица 2.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	Функции	Диапазон изменения аргументов	Шаг изменения аргументов	Вид графика
1	$f(x) = \sin(x)^3$ $\varphi(x) = \cos(x)^3$	x∈[-10; 10]	Δx = 0.1	В декартовой системе координат
2	$f(x) = \sin(3 \cdot x)$ $\varphi(x) = \cos(x)$	x∈[0; 2π]	Δx = 0,01π	В полярной системе координат

№ вар.	Функции	Диапазон изменения аргументов	Шаг изменения аргументов	Вид графика
3	$f(x,y) = -\sin(x^2 \cdot y)$	x∈[-2; 2] y∈[-2; 2]	Δx = 0,2 Δy = 0,2	График поверхности
4	$f(x,y) = -\sin(x^2 \cdot y^3)$	x∈[0; 3] y∈[-4; 1]	Δx = 0,1 Δy = 0,2	Контурный график поверхности
5	$f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2)}{\cos(y^3 \cdot x)}$	x∈[0; 10] y∈[-1; 1]	Δx = 1 Δy = 0,3	Точечный график поверхности
6	$f(x,y) = tg(x \cdot y)$	x∈[-1; 1] y∈[-2; 2]	Δx = 0,1 Δy = 0,2	Трёхмерная гистограмма
7	$f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\cdot\cos(y)}{-\sin(x^2 \cdot y)}$	x∈[-3; 21] y∈[-4; 0,5]	Δx = 1 Δy = 0,01	Векторный график поверхности
8	$f(x) = x^3 / 1000$ $f(x) = 5800 \cdot \sqrt{x}$	x∈[-10; 10]	Δx = 0,1	В декартовой системе координат
9	$f(x) = 1{,}2 \cdot \sin(5 \cdot x)$ $\varphi(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$	x∈[0; 2π]	Δx = 0,01π	В полярной системе координат
10	$f(x,y) = \dfrac{2\pi \cdot (x^2 + y^2)}{x \cdot y}$	x∈[0,01; 1] y∈[0,1; 10]	Δx = 0,01 Δy = 0,01	Контурный график поверхности
11	$f(x,y) = \dfrac{x^3 \cdot \cos(y)}{\sqrt{x \cdot y}}$	x∈[3; 8] y∈[-4; -1]	Δx = 0,5 Δy = 0,1	Трёхмерная гистограмма
12	$f(x) = tg(x)$ $\varphi(x) = \sin(x)$	x∈[0; 3]	Δx = 0,01	В декартовой системе координат
13	$f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y} \cdot x^3}{\cos(x^2)}$	x∈[-10; 10] y∈[-3; 3]	Δx = 0,1 Δy = 0,03	Точечный график поверхности
14	$f(x,y) = \dfrac{x^4 \cdot \cos(y)}{tg(x \cdot y)}$	x∈[0; 100] y∈[-80; 20]	Δx = 1 Δy = 1	Векторный график поверхности
15	$f(x,y) = \dfrac{\sin(x \cdot y)}{\cos(x)\cdot tg(y)}$	x∈[0; 2π] y∈[-π; π]	Δx = 0,01π Δy = 0,03π	Точечный график поверхности

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, кратко оформленный реферат первого раздела, описание команд меню **Edit** и **Insert** из **Приложения**,а также протокол действий, самостоятельно выполняемых студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче работы студент должен продемонстрировать практическое умение строить различные графики в среде **MathCAD** и ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Какие основные типы графиков можно построить в среде **MathCAD**? Как вызвать шаблоны этих графиков?
2. Как можно изменить параметры уже построенного графика?
3. Какие функции выполняет команда **X-Y Zoom**?
4. Какие функции выполняет команда **X-Y Trace**?
5. Расскажите порядок построения графика функции одной переменной в декартовых координатах.
6. Расскажите порядок построения графика функции одной переменной в полярной системе координат.
7. Расскажите порядок построения графика поверхности. Как задаётся число узлов сетки поверхности?
8. Как построить одновременно несколько графиков разных функций на одном координатном поле в декартовой системе координат?
9. Как вставить текстовый блок в рабочий лист **MathCAD**?
10. Какие средства есть в **MathCAD** для редактирования текстовых блоков?
11. Как указать ряд значений переменной, изменяющейся с определённым шагом в каком-либо числовом диапазоне?
12. Как отменить последнюю операцию редактирования?
13. Как скопировать выделенный объект в буфер обмена? Как вставить содержимое буфера обмена в определённое место документа?
14. Как вставить в текстовую область шаблон математической области?
15. Как добавить на график в декартовых координатах линии сетки и как их убрать?

Лабораторная работа № 3

Программирование в среде MathCAD

Цель работы

1. Изучить программные операторы.
2. Приобрести практические навыки составления простейших алгоритмов в среде MathCAD.

1. Общие сведения

<u>Программный модуль</u> в системе MathCAD представляет собой самостоятельный модуль, выделяемый в тексте документа жирной вертикальной чертой. Программный модуль может исполнять роль либо функции пользователя с именем и параметрами, либо функции без имени и параметров, но в любом случае, <u>возвращающей результат вычислений, определяемый последним оператором модуля</u>.

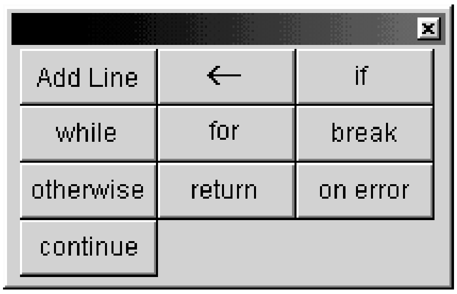


Рис. 3.1. Панель программных элементов

Шаблоны программных элементов можно вызвать при помощи кнопок панели программных элементов, показанной на рисунке 3.1.

Нетрудно заметить, что набор программных элементов для создания программных модулей весьма ограничен и содержит следующие элементы (в скобках указан перевод с английского языка названия программного элемента):

Add Line	(добавить линию) – создаёт и при необходимости расширяет жирную вертикальную линию, справа от которой в шаблонах задаётся запись программного блока;
←	– символ локального присваивания (в теле модуля);
if	(если) – оператор условного выражения;
for	(для) – оператор задания цикла с фиксированным числом повторений;
while	(пока) – оператор задания цикла, типа «пока» (цикл выполняется, пока выполняется некоторое условие);
otherwise	(иначе) – оператор иного выбора (обычно применяется с **if**);
break	(прервать) – оператор прерывания;
continue	(продолжить) – оператор продолжения;
return	(возвратить) – оператор возврата;
on error	(ошибка) – оператор обработки ошибок.

2. Оператор Add Line

Оператор **Add Line** выполняет функции расширения программного блока. Расширение фиксируется удлинённой вертикальной чертой программных блоков или их древовидным расширением. Благодаря этому, в принципе, можно создавать сколь угодно большие программы.

3. Оператор внутреннего присваивания ←

Оператор ← выполняет функции внутреннего локального присваивания. Например, выражение $x \leftarrow 123$ присваивает локальной переменной x значение 123. Локальный характер присваивания означает, что такое значение x сохраняет только в теле программного модуля. За пределами модуля значение переменной x может быть не определённым, либо равно значению, которое задаётся операторами присваивания := и ≡. В последнем случае x будет считаться глобальной переменной.

4. Оператор создания условных выражений if

Оператор **if** является оператором для создания условных выражений. Он задаётся в виде:

Выражение **if** *Условие*

Если *Условие* выполняется, то возвращается значение *Выражения*. Совместно с этим оператором часто используются операторы прерывания **break** или иного выбора **otherwise**. Например:

$$\left|\begin{array}{l} x \leftarrow 123 \\ x \leftarrow 18 \ \textbf{if}\ x > 0 \end{array}\right.$$

Здесь первоначально $x = 123$. Далее, согласно условию ($x > 0$), переменной x будет присвоено значение 18.

5. Оператор цикла for

Оператор **for** служит для организации циклов с заданным числом повторений. Он записывается в виде:

$$\textbf{for}\ Var \in Nmin, Nmin + Step\ ..\ Nmax$$

Эта запись означает, что если выражение, помещённое в шаблон, будет выполняться столько раз, сколько переменная *Var* изменяет своё значение от *Nmin* до *Nmax* с шагом *Step*. Если значение *Nmin* + *Step* не задано, то шаг изменения переменной, по умолчанию, принимается равным + 1. Переменную счётчика *Var* можно использовать в выражениях программы. Например:

$\left| \begin{array}{l} \mathbf{for}\ i \in 1, 3 .. 5 \\ \ \mathbf{xi \leftarrow 0} \end{array} \right.$

Здесь переменная i изменяется от 1 до 5 с шагом 2, т.е. принимает значения 1, 3, 5. Соответственно, в внутри оператора for $x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_5 = 0$.

6. Оператор цикла while

Оператор **while** служит для организации циклов, действующих до тех пор, пока выполняется некоторое условие. Этот оператор записывается в виде:

while *Условие*

В шаблоне под оператором записывается выполняемое выражение. Например:

$\left| \begin{array}{l} x \leftarrow 1 \\ \mathbf{while}\ x<5 \\ \ \mathbf{x \leftarrow x + 1} \end{array} \right.$

Здесь в цикле будет выполняться присвоение переменной x значений 1, 2, 3, 4. Когда x = 5, то условие не выполняется и, соответственно, не выполняются операторы, следующие за **while**.

7. Оператор иного выбора otherwise

Оператор **otherwise** обычно используют совместно с оператором if. Его использование поясняет следующая программная конструкция:

$f(x) := \left| \begin{array}{ll} 1 & \mathbf{if}\ x > 0 \\ -1 & \mathbf{otherwise} \end{array} \right.$ возвращает 1, если x > 0; возвращает –1 во всех иных случаях

8. Оператор прерывания break

Оператор **break** вызывает прерывание работы программы. Чаще всего он используется совместно с оператором условного выражения **if** и операторами циклов **while** и **for**, обеспечивая переход в конец тела цикла. Например:

$\left| \begin{array}{l} x \leftarrow 0 \\ \mathbf{while}\ 1 \\ \qquad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow x + 1 \\ \mathbf{break}\ \ \mathbf{if}\ x > 9 \end{array} \right. \end{array} \right.$

Здесь выполнение цикла **while** прервется, когда x примет значение 10. (Конструкция **while** 1 обозначает бесконечный цикл).

9. Оператор продолжения continue

Оператор продолжения используется для продолжения работы программы после прерывания. Он также используется обычно совместно с операторами задания циклов **while** и **for**, обеспечивая после прерывания возврат в начало цикла. Например:

```
i←0
while i <5
    i←i + 1
    continue  if i = 2
    x← i
```

Здесь переменная x принимает в цикле **while** следующие значения: 1, 3, 4, 5. Когда i = 2 выполнение цикла будет прервано и произойдёт возврат в начало цикла.

10. Оператор возврата return

Оператор возврата **return** прерывает выполнение программы и возвращает значение, стоящее следом за ним. Например, в приведённом ниже случае:

return 0 **if** x < 0

будет возвращаться значение 0 при любом x < 0.

11. Оператор обработки ошибок on error и функция error

Оператор обработки ошибок позволяет создавать конструкции обработчиков ошибок. Этот оператор задаётся в виде:

Выражение № 1 **on error** *Выражение № 2*

Если при выполнении *Выражения № 2* возникает ошибка, то выполняется *Выражение № 1*. Для обработки ошибок полезна также функция **error(S)**, которая, будучи в программном модуле возвращает окошко с надписью, хранящейся в символьной переменной **S** или в символьной константе (любой фразе в кавычках). Например:

y(x):= 1 **on error** $\frac{1}{x}$

Здесь функция y(x) возвратит значение 1 при x = 0.

12. Практические примеры программирования

Программный модуль, в сущности, является функцией, но созданной с применением упомянутых сугубо программных средств. Она может возвращать значение, определённое последним оператором. Это значит, что после такого модуля, выделенного как целый блок, можно поставить знак равенства для вывода значения функции. В блоке могут содержаться любые операторы и функции входного языка системы. Для передачи в блок значений переменных можно использовать переменные документа, которые ведут себя в блоке как глобальные переменные.

Обычно модулю присваивается имя со списком переменных, после которого идёт знак присваивания :=. Переменные в списке являются локальными и им можно присваивать значения при вызове функции, заданной модулем. Локальный характер таких переменных позволяет использовать для их имён (идентификаторов) те же имена, что и у глобальных переменных документа.

На рисунке 3.2. показаны примеры программирования в среде **MathCAD**. Обратите внимание на последний пример, в котором определяется количество элементов одномерного массива, которые больше 5. Здесь буква “T” справа вверху от массива обозначает транспонирование. **MathCAD** корректно производит операции только с теми одномерными массивами, которые представлены в виде вектора-столбца. Для транспонирования массива необходимо выделить его правую часть (после знака присваивания) и нажать комбинацию клавиш <**Ctrl + 1**>. В случае, если массив не содержит элементов, больших 5, то будет выведено сообщение “No”. В программных блоках переменным можно присваивать текстовые значения, написанные только латинским шрифтом. Результат работы программного блока выведен справа от него (в данном случае в одномерном массиве содержится три элемента, которые больше 5).

Задание программных модулей позволяет реализовать любые специальные приёмы программирования. Оно может служить мощным средством расширения системы путём задания новых функций.

Задание для самостоятельной работы

Создать программный модуль. Задание взять из табл. 3.1. согласно порядковому номеру студента по журналу группы.

Таблица 3.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	Задание	№ вар.	Задание
1.	Создать функцию, позволяющую суммировать положительные элементы одномерного массива.	2.	Написать функцию нахождения минимального элемента массива.

№ вар.	Задание	№ вар.	Задание
3.	Создать функцию, позволяющую суммировать элементы одномерного массива, которые больше заданного числа.	4.	Написать функцию, которая находит количество отрицательных элементов одномерного массива.
5.	Создать функцию, проверяющую все ли элементы одномерного массива > 0. Функция должна выводить соответствующее сообщение.	6.	Написать функцию, которая создавала бы одномерный массив, элементами которого являлись бы положительные элементы исходного массива.
7.	Написать функцию нахождения минимального элемента массива.	8.	Создать функцию, позволяющую находить произведение элементов одномерного массива, которые меньше заданного числа.
9.	Создать функцию, позволяющую суммировать положительные элементы одномерного массива.	10.	Создать функцию, проверяющую все ли элементы одномерного массива > 0. Функция должна выводить соответствующее сообщение.
11.	Создать функцию, проверяющую все ли элементы одномерного массива < 0. Функция должна выводить соответствующее сообщение.	12.	Написать функцию, которая находит количество положительных элементов одномерного массива.
13.	Написать функцию, которая находит количество отрицательных элементов одномерного массива.	14.	Создать функцию, проверяющую все ли элементы одномерного массива > 0. Функция должна выводить соответствующее сообщение.
15.	Написать функцию нахождения максимального элемента массива.	16.	Создать функцию, позволяющую суммировать отрицательные элементы одномерного массива.

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, кратко оформленный реферат первого раздела, описание команд меню **Format** из **Приложения** и протокол действий, самостоятельно выполняемых студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

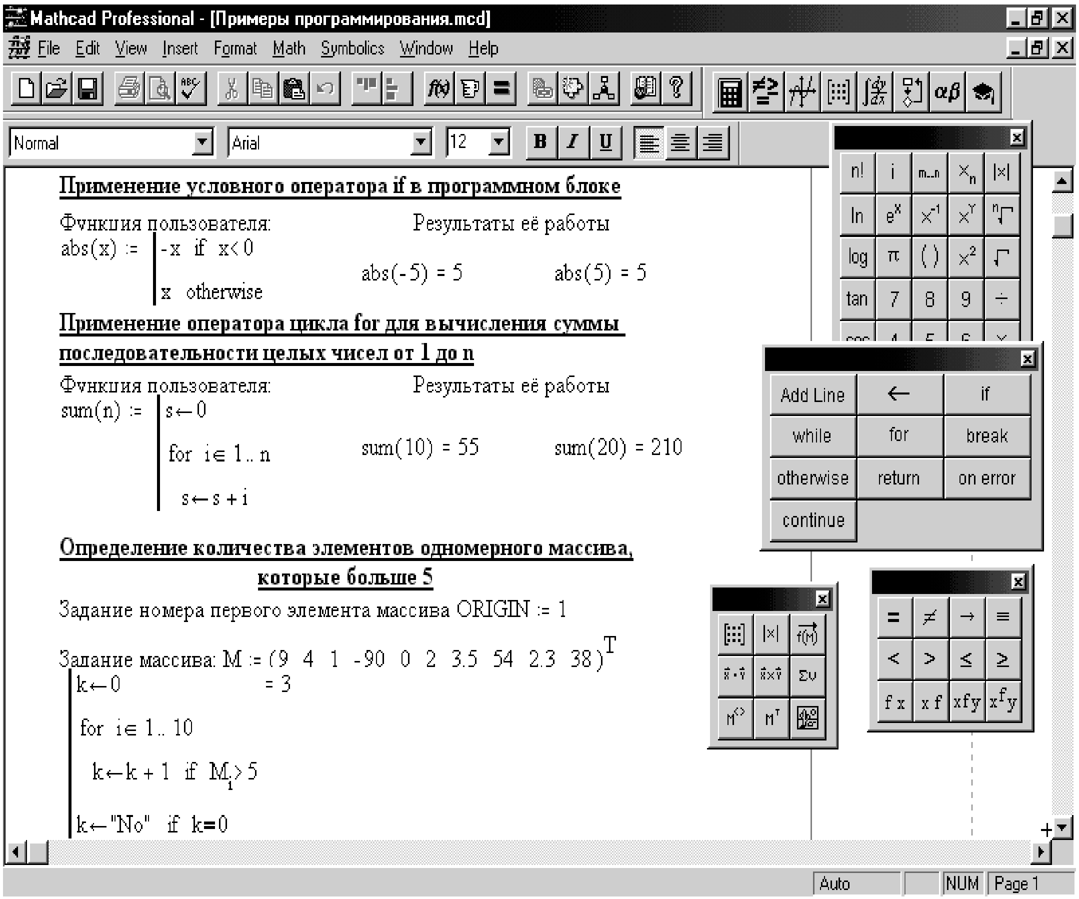


Рис. 3.2. Примеры программирования в среде **MathCAD**

При сдаче работы студент должен продемонстрировать практическое умение программировать в среде **MathCAD** и ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Что представляет собой программный модуль в системе **MathCAD**?
2. Какие функции выполняет программный модуль?
3. Какие кнопки находятся на панели программных элементов?
4. Какие операторы цикла реализованы в **MathCAD**?
5. Что такое локальные и глобальные переменные?
6. Для чего необходим оператор **for**? Дать пример использования.
7. Какую функцию выполняет оператор **otherwise**? Дать пример использования.
8. Какую функцию выполняет оператор **if**? Дать пример использования.
9. Для чего необходим оператор **while**? Дать пример использования.
10. Как расширить программный блок?
11. Как установить формат чисел, например, вместо трёх чисел после запятой выводить пять?

Л а б о р а т о р н а я р а б о т а № 4

Метод простых итераций решения трансцендентного уравнения f(x)=0

Цель работы:

1. Освоить метод простых итераций решения трансцендентных уравнений.

1. Общие сведения

Суть метода простых итераций заключается в последовательном приближении к решению путём многократного применения рекуррентных процедур, то есть исходными данными для каждой последующей процедуры являются результаты применения предыдущих процедур.

Для решения уравнения $f(x)=0$ методом простых итераций его приводят к виду $x=\varphi(x)$. Например, уравнение $x^5-3\cdot x^2+1=0$ можно привести к виду $x=\sqrt{\dfrac{x^5+1}{3}}$. Затем выбирают некоторое начальное приближение $x^{[0]}$ и вычисляют последовательные приближения:

$$x^{[j+1]}=\varphi\left(x^{[j]}\right),\ \text{где}\ j=0,\ 1,\ 2,\ldots\text{– номер итерации.} \tag{1}$$

Итерации заканчиваются тогда, когда отношение $\dfrac{\left|x^{[j]}-x^{[j-1]}\right|}{x^{[j]}}$ становится достаточно малым, меньшим заранее заданного значения, называемого относительной погрешностью.

Строго говоря, начальное приближение и вид $x=\varphi(x)$ должны выбираться из условия сходимости. На практике часто проще и быстрее перебрать несколько вариантов выражения $x=\varphi(x)$ и начального приближения с выбором наилучшего, чем добиваться выполнения условия сходимости. Часто хорошо сходятся уравнения, не удовлетворяющие условию сходимости.

2. Пример применения метода простых итераций

Решить задачу:

<u>Дано</u>: плотность стационарного теплового потока через однослойную стенку q = 40000 Вт/м^2; температура внутренней поверхности стенки t_1 = 300 К; толщина стенки r = 0,1 м. Коэффициент теплопроводности стенки имеет следующую зависимость от температуры:

$$\lambda(t_s)=\lambda_0\cdot\left(1+a_1\cdot t_1+a_2\cdot t_2^2\right) \tag{2}$$

где λ_0= 40 Вт/(м·К); a_1= 0,012 К$^{-1}$, a_2 = – 0,000052 К$^{-2}$.

<u>Найти</u>: температуру внутренней поверхности стенки t_2 с погрешностью 0.001%.

Замечания по постановке задачи:

Тепловой поток связан с температурами стенки t_1 и t_2 следующей формулой: $q = \dfrac{t_1 - t_2}{\dfrac{r}{\lambda(t_S)}}$ (3), где $t_S = \dfrac{t_1 + t_2}{2}$ (4) – средняя температура по сечению стенки.

Если подставить в выражение (3) зависимость для $\lambda(t_S)$, то получится неудобное для решения относительно t_2 уравнение:

$$q = \lambda_0 \cdot \left[1 + a_1 \cdot \frac{t_1 + t_2}{2} + a_2 \cdot \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{t_1 - t_2}{r} \qquad (5)$$

Поэтому используем для решения метод простых итераций.

Алгоритм решения задачи:

1. Примем в начальном приближении, что $t_S^{[0]} = t_1$. Тогда из уравнения (3) можно легко выразить t_2 в виде: $t_2^{[0]} = t_1 - \dfrac{q \cdot r}{\lambda\left(t_S^{[0]}\right)}$ (6).
2. Теперь можно уточнить среднюю температуру стенки по формуле (4) $t_S^{[1]} = \dfrac{t_1 + t_2^{[0]}}{2}$, а, следовательно, и t_2: $t_2^{[1]} = t_1 - \dfrac{q \cdot r}{\lambda\left(t_S^{[1]}\right)}$. Таким образом, мы получим итерационный механизм последовательного уточнения t_2.
3. Признаком окончания расчёта будет выполнение условия $\left| \dfrac{t_2^{[j]} - t_2^{[j-1]}}{t_2^{[j]}} \right| \cdot 100 \le \varepsilon_{\max}$.

Фрагмент рабочего документа с решением задачи показан на рис. 4.1.

Указания к выполнению задачи:

1. Введите исходные данные как показано на рис. 4.1. Нижние индексы возле переменных t_1, t_2, t_{20} λ_0, a_1 и a_2 – это не ‘‘рабочие’’ индексы, а ‘‘декоративные’’, т.е. эти переменные являются не элементами массивов, а обычными переменными. Такие нижние индексы можно ввести, нажав на клавишу с изображением буквы ‘‘*Ю*’’ или ‘‘**.**’’ – точки.
2. Введите функцию для определения теплопроводности λ*(t)*.
3. Начальное значение температуры внутренней поверхности стенки t_0 принимается равным:

$$t_{20} := t_1 - \frac{q \cdot r}{\lambda\left(t_1\right)}$$

4. Для создания программного модуля нажмите на панели программных элементов кнопку < Add Line > – появится вертикальная черта с двумя пустыми позициями; курсор будет установлен в нижней позиции. Нажмите кнопку < Add Line > ещё два раза, чтобы число пустых позиций стало равным четырём.

5. Заполните пустые позиции (шаблоны) программного модуля как показано на рис. 4.1.

Необходимо запомнить правило: *в теле программного модуля нельзя изменять значения глобальных переменных.*

6. Выведите результат расчёта.

Исходные данные :

$q := 40000 \cdot \frac{W}{m^2}$ $\quad t_1 := 300 \cdot K$ $\quad \lambda_0 := 40 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$ $\quad \varepsilon_{max} := 0.001$

$a_1 := 0.012 \cdot \frac{1}{K}$ $\quad a_2 := -0.0000052 \cdot \frac{1}{K^2}$ $\quad r := 0.1 \cdot m$

Функция для расчёта λ: $\lambda(t) := \lambda_0 \cdot \left(1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2\right)$

Принимаем в первом приближении $\quad t_{20} := t_1 - \frac{q \cdot r}{\lambda(t_1)}$ $\quad t_{20} = 275.799 \cdot K$

Программный модуль для расчёта t_2 **методом простой итерации:**

$$
t_2 := \left|
\begin{array}{l}
pog \leftarrow 100 \\
t_{20} \leftarrow t_{20} \\
\text{while } pog \ge \varepsilon_{max} \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
t_s \leftarrow \frac{t_{20} + t_1}{2} \\
t_{2k} \leftarrow t_1 - \frac{q \cdot r}{\lambda(t_s)} \\
pog \leftarrow 100 \cdot \left| \frac{t_{2k} - t_{20}}{t_{2k}} \right| \\
t_{20} \leftarrow t_{2k}
\end{array}
\right. \\
t_{2k}
\end{array}
\right.
$$

Результат: $t_2 = 275.129 \cdot K$

Рис. 4.1. Решение задачи методом простых итераций

Задание для самостоятельной работы

Решить уравнение методом простой итерации при максимальной относительной погрешности $\varepsilon_{max} = 0.01\%$. Вариант задания взять из таблицы 4.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

Указание к выполнению: перед вводом расчётной части в ЭВМ необходимо первые два итерационные шага сделать вручную с обязательным отражением их в отчёте по лабораторной работе.

Таблица 4.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар	Уравнение	№ вар	Уравнение
1	$3 \cdot x^5 + 2 \cdot x^2 - 3 = 0$	9	$0{,}2 \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + 1 = 0$
2	$2 \cdot x + 0{,}5 \cdot e^x = 0$	10	$2 \cdot x^2 - 3 \cdot x^3 + 10 = 0$
3	$e^X - 2 \cdot x^2 = 0$	11	$2 \cdot \cos(x) - 3 \cdot x + 10 = 0$
4	$x + x^3 = 4$	12	$x - 5 \cdot x^3 = 24$
5	$0{,}5 \cdot x + x^4 = 7$	13	$0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 1 = 0$
6	$0{,}1 \cdot e^x - 2 \cdot x^2 = 0$	14	$3 \cdot \ln(x) - 0{,}5 \cdot x + 3 = 0$
7	$x - x^3 = 4$	15	$2 \cdot x + x^2 = 0{,}2$
8	$0{,}2 \cdot e^x - 2 \cdot x^2 + 1 = 0$	16	$2 \cdot x + 82 \cdot x^2 = 39$

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, кратко оформленный реферат первого раздела и протокол действий, выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче лабораторной работы студент должен продемонстрировать умение составлять простейшие программные конструкции в среде **MathCAD** 7 **Pro**, а также ответить на следующие контрольные вопросы:

1. В чём суть метода простых итераций?
2. Какова последовательность решения уравнения вида $f(x)=0$ методом простых итераций?
3. Объясните назначение кнопки ‘‘**Add Line**’’ панели программирования.
4. Объясните назначение кнопки ‘‘**while**’’ панели программирования.
5. Что является условием окончания расчёта при использовании метода простых итераций?
6. Как ввести простой и ‘‘декоративный’’ индексы?
7. Объясните назначение кнопки ‘‘**←**’’ панели программирования.
8. Что называется трансцендентным уравнением?
9. Приведите примеры присвоения функции и присвоения переменной.
10. Можно ли изменять значение глобальной переменной в программном блоке?

Л а б о р а т о р н а я   р а б о т а   № 5

Символьная математика в среде MathCAD

Цель работы:

1. Ознакомиться с возможностями символьной математики программного продукта **MathCAD**.
2. Приобрести практические навыки аналитических вычислений в среде **MathCAD**.

1. Общие сведения

Система символьной математики снабжена <u>специальным процессором</u> для выполнения аналитических (символьных) вычислений. Его основой является ядро, хранящее всю совокупность формул и формульных преобразований, с помощью которых производятся аналитические вычисления. Операции, относящиеся к работе символьного процессора, <u>содержатся в меню **Symbolic**</u>.

Чтобы символьные операции выполнялись, процессору необходимо указать, над каким выражением эти операции должны производиться, т.е. надо выделить выражение. Для ряда операций следует не только указать выражение, к которому они относятся, но и выделить переменную, относительно которой выполняется та или иная символьная операция. Само выражение в таком случае не выделяется.

Символьные операции разбиты на <u>пять характерных разделов</u>: операции с выделенными выражениями, операции с выделенными переменными, операции с выделенными матрицами, операции преобразования и стиль эволюции. Операции, входящие в каждый из указанных разделов, представлены в **Приложении**.

Символьные операции можно выполнять двумя способами:

1. Непосредственно в командном режиме (используя операции из меню **Symbolic**);
2. С помощью оператора символьных операций $\rightarrow$ и операций, представленных в палитре символьных вычислений.

2. Примеры символьных операций в командном режиме

Выполнение операций в командном режиме почти не требует каких-либо подготовительных действий. В то же время в таком режиме символьные операции нельзя выполнить над выражениями, содержащими функции пользователя.

Большинство символьных операций довольно легко выполняются в командном режиме, так что ниже мы остановимся лишь на некоторых примерах.

I. Вычислить тройной интеграл $\iiint \ln(x)dxdxdx$.

1. Установите курсор в свободном месте рабочего документа и три раза нажмите комбинацию клавиш [**Ctrl + I**], либо нажатием кнопки откройте панель математического анализа и три раза нажмите на кнопку с изображением неопределённого интеграла.
2. Заполните созданный шаблон, как показано на рисунке 5.1.

Вычисление тройного интеграла:

$$\int\int\int \ln(x)\,dx\,dx\,dx$$

$$\frac{1}{6}\cdot x^3\cdot\ln(x) - \frac{11}{36}\cdot x^3$$

Проверка полученного результата:

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{1}{6}\cdot x^3\cdot\ln(x) - \frac{11}{36}\cdot x^3\right)$$

$$\ln(x)$$

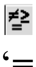
Рис. 5.1. Вычисление тройного интеграла

3. Выделите выражение любым способом (мышью или при помощи клавиатуры).
4. В меню **Symbolic** выберите пункт **Evaluate** и в открывшемся подменю выберите команду **Symbolically**, либо нажмите комбинацию [**Shift + F9**]. Ниже тройного интеграла появится результат.

Проверим полученный результат, для чего три раза продифференцируем полученное выражение:

5. Установите курсор в свободном месте рабочего документа и нажмите комбинацию клавиш [**Ctrl + Shift + ?**], либо в панель математического анализа выберите кнопку шаблона n-ой производной.
6. Выделите результат предыдущего задания и скопируйте его в буфер.
7. Вставьте содержимое буфера в соответствующую позицию шаблона. Заполните остальные свободные позиции шаблона (смотрите рис. 5.1).
8. Выделите выражение любым способом (мышью или при помощи клавиатуры).
9. В меню **Symbolic** выберите пункт **Evaluate** и в открывшемся подменю выберите команду **Symbolically**, либо нажмите комбинацию [**Shift + F9**]. Ниже выделенного выражения появится результат дифференцирования.

II. Решить уравнение $x^3 - 2\cdot x + 1 = 0$

1. Установите курсор в свободном месте рабочего документа и запишите выражение $x^3 - 2\cdot x + 1$.
2. Вызовите нажатием кнопки  панель математических символов и нажмите кнопку ‘‘=’’. Это знак логического равенства. Его можно также вызвать комбинацией ‘‘**Ctrl + =**’’. Введите 0.
3. Выделите в уравнении x.

4. В меню **Symbolic** выберите подменю **Variable** и пункт **Solve**. Ниже уравнения появится результат, в данном случае в виде одномерного массива – столбца из трёх элементов.

3. Примеры символьных операций с применением оператора →

Выполнение символьных операций с применением оператора → предпочтительней в силу следующих свойств:

1. Можно задавать операции с рядом разных опций и организовывать древовидную структуру символьных операций;
2. Можно использовать операции над выражениями с функциями пользователя;
3. При изменении тех или иных выражений по цепочке вычислений изменятся и полученные результаты;
4. Возможно применение некоторых функций (например, вычисление пределов), которых нет в командном режиме.

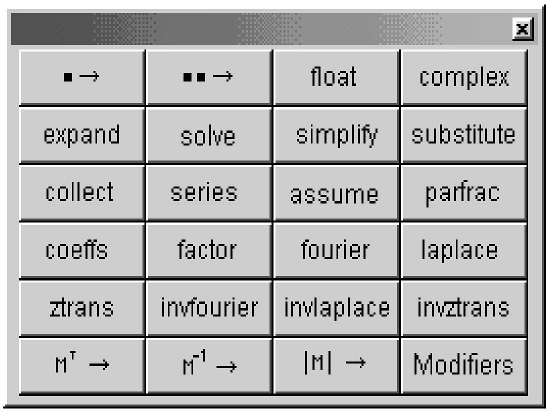


Рис. 5.2. Панель символьной математики

Шаблоны для символьных операций с применением оператора → расположены на панели символьной математики, которая показана на рисунке 5.2.

С применением оператора → можно выполнять как все операции для командного режима символьных вычислений, так и ряд других операций и опций, например:

complex – преобразование в комплексной форме;
assume – присваивание переменным неопределённого значения, даже если до этого им были присвоены значения и заданы ограничения на значения переменных;
float – преобразование в формат числа с плавающей точкой;
laplace – преобразование Лапласа;
parfac – разложение на элементарные дроби;
coeffs – возврат коэффициентов полинома;
$\mathbf{M}^{\mathbf{T}}$ – транспонирование матрицы;
$\mathbf{M}^{-1}$ – инвертирование матрицы;
$|\mathbf{M}|$ – вычисление детерминанта матрицы;

Примеры символьных операций с применением оператора → показаны на рисунке 5.3.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить символьные операции любым, удобным Вам, способом. Вариант задания взять из таблицы 5.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

Таблица 5.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	Упростить выражение	Раскрыть выражение	Дифференцировать по переменной x	Решить уравнение относительно x	Выполнить преобразование Лапласа
1	$\tan(x)^3$	$\sin(6\cdot x)$	$\sin(x)\cdot\cos(x)$	$\sin(x)-\cos(x)=0$	$\cos(x)^2$
2	$\sqrt{x}+x^5$	$(x^2+y)\cdot y^2$	$\sin(65\cdot x^2)$	$x^2+2x=7$	$\tan(x)^2$
3	$\sin(x)\cos(x)$	$x^4\cdot(x+a)$	$\exp(\cos(\mathrm{x}))$	$\sin(x)-3=\cos(x)$	$\sin(2\cdot x)$
4	$\tan(3x)^2$	$(x^2+y)\cdot x\cdot y^2$	$x^5\cdot\cos(x)$	$\cos(x^2)=79$	$e^x\cdot\cos(x)$
5	$a^2+a\cdot b+b^2$	$\cos(5\cdot x)$	$x^5\cdot\sin(x^2)$	$\sin(x)+\cos(x)=52$	$\sin(6\cdot x)$
6	$(x^2-y^2)/x$	$(x^3+y)\cdot y^3$	$\tan(x)^3$	$2x^2-2=7x$	$x^5\cdot\cos(x)$
7	$\sqrt{x^{-3}}+x^2$	$2\cdot\sin(2\cdot x)$	$\sin(x)+\cos(x)$	$\exp(x)\cdot\sin(x)=0$	$\sin(x)\cdot\cos(x)$
9	$(x^2+x)+x\cdot x^2$	$\sin(x)\cdot\cos(x)$	$(x^2+y)+x\cdot y^2$	$\sin(x)=\cos(x)$	$\cos(x)^2$
10	$2x+x+x^3$	$x^4\cdot(x^2-a)$	$\cos(x)^2$	$x\cdot\sin(8\cdot x)=34$	$2\cdot\sqrt{x}-x^3$
11	$(x^2-y^2)/y^3$	$2\cdot(\sqrt{x}-x^3)$	$\sin(6\cdot x)^7$	$\cos(5\cdot x)=x$	$\tan(x)^2$
12	$x^2+2x-7x^5$	$\cos(5\cdot x)+x$	$3\cdot(x^2+y)+y^2$	$x^4\cdot(x+a)=3\cdot a$	$2x^2-x^3$
13	$a^3-a\cdot b-b^3$	$x\cdot\sin(3\cdot x)$	$\sin(x)\cdot\cos(x)$	$2\cdot\sqrt{x}-x^3$	$x\cdot\sin(3\cdot x)$
14	$x\cdot\sin(3\cdot x)$	$\cos(2\cdot x)$	$x^4\cdot\sin(y)$	$x^4\cdot\sin(x)=23$	$x^5\cdot\sin(x^2)$
15	$\sqrt{x}-x^3$	$\sin(2\cdot x)-\cos(x)$	$x\cdot y^2+3\cdot\sqrt{x}$	$\cos(5\cdot x)=8$	$\sqrt{x^{-3}}+x^2$
16	x^2-7x^5	$3\cdot(x^2+y)+y^2$	$\tan(3x)^2$	$x^2+2\cdot x=7$	$\cos(x)^8$

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, кратко оформленный реферат или ксерокопию разделов 1, 2 и 3, описание команд меню **Symbolic** из **Приложения** и протокол действий, самостоятельно выполняемых студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

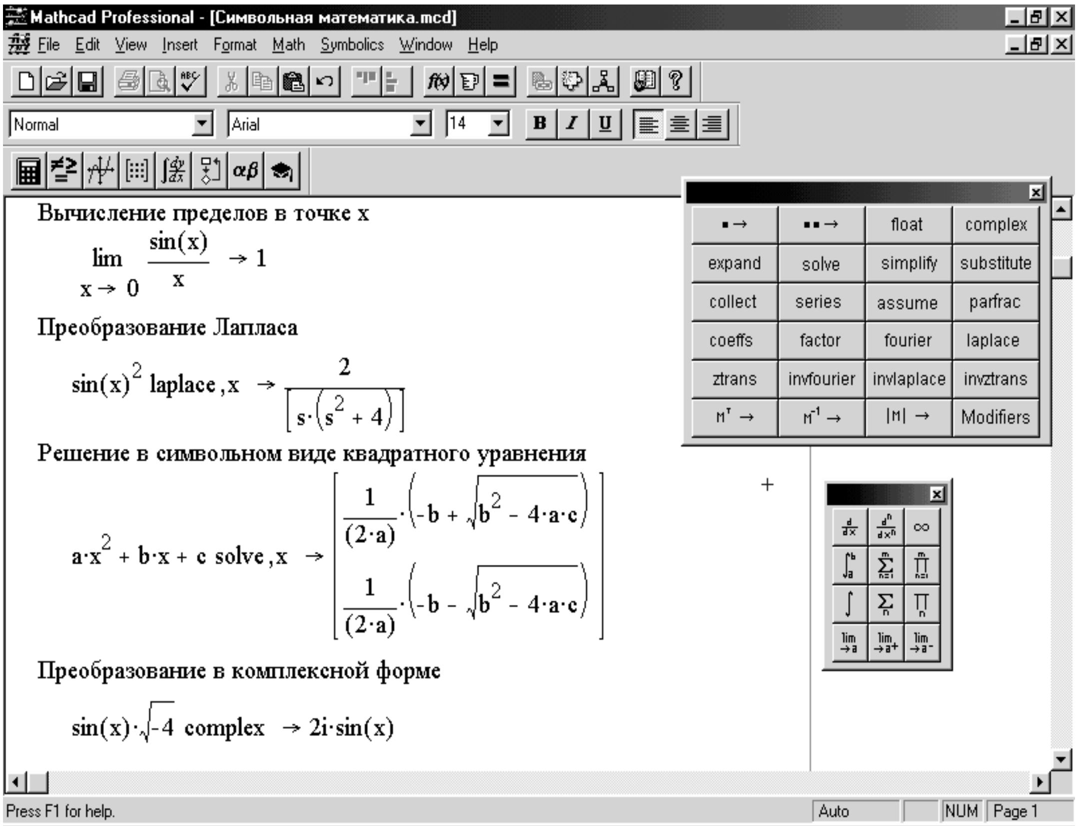


Рис. 5.3. Примеры символьных операций с применением оператора $\rightarrow$

При сдаче лабораторной работы студент должен продемонстрировать умение выполнять аналитические вычисления, а также ответить на следующие контрольные вопросы:

1. На какие характерные разделы можно разбить все символьные операции, реализованные в меню **Symbolic**?
2. Как можно дифференцировать функцию одной переменной? Приведите пример.
3. Как можно интегрировать функцию одной переменной? Приведите пример.
4. Какие преобразования можно произвести с выделенным выражением?
5. Почему выполнение символьных операций с применением оператора $\rightarrow$ является предпочтительней?
6. Как вызвать знак логического равенства? Приведите пример его использования.
7. Чем принципиально отличаются команды, объединённые в подменю **Variable** (Solve, Substitute, Differentiate …) и **Evaluate** (Symbolically, Floating Point Evaluation …)?
8. Для чего используется команда **Expand**? Дать пример.
9. Для чего используется команда **Factor**? Дать пример.
10. Как вычислить тройной интеграл от ln(x) с использованием команды **Integrate** подменю **Variable**?

Лабораторная работа № 6

Решение нелинейных уравнений методом Ньютона

Цель работы

1. Освоить метод Ньютона решения нелинейных уравнений.
2. Получить практические навыки решения методом Ньютона нелинейных уравнений, получающихся при рассмотрении задач теплопроводности.

1. Общие сведения

В основе метода Ньютона лежит линеаризация нелинейного уравнения, т.е. приближённая замена исходного нелинейного уравнения на линейное. Итерационная формула метода Ньютона приближённого определения корня уравнения *f(x)* = 0 имеет следующий вид:

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{f\left(x^{[k]}\right)}{f'\left(x^{k}\right)} \ , \tag{1}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ – номер итерации.

Например, есть уравнение $5 \cdot x^3 - x + 5 = 0$. Производная этого уравнения: $15 \cdot x^2 - 1$. Тогда итерационная формула имеет вид:

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{5 \cdot \left(x^{[k]}\right)^3 - x^{[k]} + 5}{15 \cdot \left(x^{[k]}\right)^2 - 1} . \tag{2}$$

Ньютоновские итерации сходятся, если начальное приближение $x^{[0]}$ выбрано достаточно близко к точному значению корня $\bar{x}$. При этом важно определить расположение $x^{[0]}$ слева или справа от корня. Итерации сходятся к $\bar{x}$ с той стороны, с которой $f(x) \cdot f''(x) \geq 0$. Иначе сходимость не гарантируется. Для нахождения $x^{[0]}$ целесообразно составить таблицу значений $f(x)$ и затем построить её график. Так как нелинейное уравнение может иметь несколько действительных корней, то график позволяет также оценить их общее число и расположение и выбрать нужный корень.

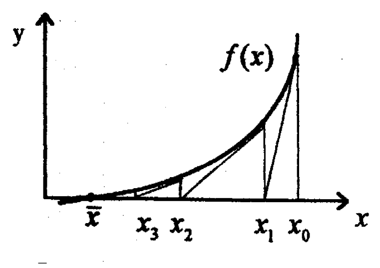


Рис. 6.1 Геометрическое представление метода

Метод Ньютона называют ещё методом касательных, что вполне соответствует геометрическому смыслу линеаризации на одном шаге.

Геометрически метод Ньютона решения нелинейных уравнений означает перемещение по касательной к кривой $y = f(x)$ к новому приближению $x^{[k+1]}$ начиная с $x^{[0]}$, как показано на рисунке 6.1.

Условием окончания расчётов корня уравнения по итерационной формуле является соблюдения условия: $\left|\frac{x^{[k+1]} - x^{[k]}}{x^{[k+1]}}\right| \le \varepsilon_{\max}$. Здесь $\varepsilon_{\max}$ – малая, наперёд заданная величина, имеющая смысл относительной погрешности. Фактически это условие означает приближённое равенство $x^{[k+1]} \approx x^{[k]}$.

По сравнению с другими численными методами решения нелинейных уравнений (метод простой итерации, метод половинного деления и др.) метод Ньютона позволяет находить решение за наименьшее число расчётных шагов.

2. Пример применения метода Ньютона

Решить задачу:

Дано: плотность теплового потока на поверхности металла q = 60000 Вт/м^2; температура поверхности металла T_p = 1300 К; коэффициент излучения системы "газ-кладка-металл" σ_{gkm}= 3.5·10^{-8} Вт/(м^2·К^4); коэффициент теплоотдачи конвекцией α = 35 Вт/(м^2·К).

Найти: температуру дыма в печи T_g с погрешностью $\varepsilon_{\max}$ = 0.1%.

Расчётная формула: $$q = \sigma_{gkm} \cdot \left(T_g^4 - T_p^4\right) + \alpha \cdot \left(T_g - T_p\right) \qquad (2)$$

Фрагмент рабочего документа с решением задачи показан на рис. 6.2.

Указания к решению задачи:

1) Введите значения исходных данных.
2) Запишите расчётную формулу в виде функции f(T_g).
3) Постройте график функции f(T_g) при $T_g \in$[0 K, 2000 K] с шагом 100 К.
4) Выберите в качестве начального приближения такое значение Tg, при котором значение функции f(Tg) наиболее близко к нулю. В нашем случае было принято Tg = 1490К.
5) Запишите отдельно правую часть функции f(Tg) и найдите её производную по Tg.
6) Составьте итерационную схему, реализующую формулу (1) и найдите температуру дыма в печи.

Задание для самостоятельной работы

Решить уравнение методом Ньютона. Вариант задания взять из таблицы 6.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

Таблица 6.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	Уравнение	№ вар.	Уравнение
1	$x^3 - 2 \cdot x^2 = x - 56$	9	$37 \cdot x - x^3 = 100$
2	$2 \cdot x^2 + x = 69$	10	$x^3 + 73 \cdot x^4 = x - 63$
3	$2 \cdot x^4 - x^3 = 0$	11	$x^3 + 2 \cdot x = x^4$
4	$5 \cdot x^2 + 26 \cdot x = 6$	12	$27 \cdot x^2 + 132 \cdot x = -10$

5	$x^3 - 2 \cdot x = 4$	13	$7 \cdot x^2 - x = 6$
6	$2 \cdot x^5 + x^3 = 9 \cdot x^2$	14	$x^2 + 2 \cdot x = -35$
7	$24 \cdot x^2 + x = 6{,}5$	15	$2 \cdot x^4 - 37 \cdot x^3 = 140$
8	$x^2 + 26 \cdot x = 138$	16	$x^2 - 26 \cdot x = 378$

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, реферат первого раздела и протокол действий, самостоятельно выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

Исходные данные:

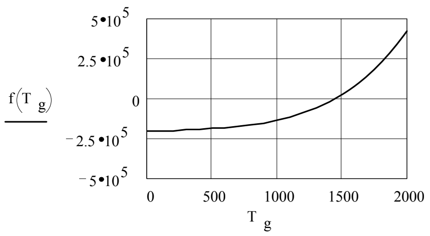
$q := 60000 \cdot \frac{W}{m^2}$ $\quad T_p := 1300 \cdot K$ $\quad \varepsilon_{max} := 0.1$

$\sigma_{gkm} := 3.5 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ $\quad \alpha := 35 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$

Функция: $f(T_g) := \sigma_{gkm} \cdot \left(T_g^4 - T_p^4\right) + \alpha \cdot \left(T_g - T_p\right) - q$

Построение графика для приближённого определения корня уравнения $f(T_g)$

$T_g := 0 \cdot K, 100 \cdot K .. 2000 \cdot K$



Принимаем в нулевом приближении $T_{g0} := 1490 \cdot K$

Вычисление производной от $f(T_g)$

$\sigma_{gkm} \cdot \left(T_g^4 - T_p^4\right) + \alpha \cdot \left(T_g - T_p\right) - q$

$4 \cdot \sigma_{gkm} \cdot T_g^3 + \alpha$

Программный модуль для расчёта T_g **методом Ньютона:**

$$
T_g := \left|
\begin{array}{l}
pog \leftarrow 100 \\
T_{g0} \leftarrow T_{g0} \\
\text{while } pog \ge \varepsilon_{max} \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
T_{gk} \leftarrow T_{g0} - \dfrac{\sigma_{gkm} \cdot \left(T_{g0}^4 - T_p^4\right) + \alpha \cdot \left(T_{g0} - T_p\right) - q}{4 \cdot \sigma_{gkm} \cdot T_{g0}^3 + \alpha} \\
pog \leftarrow 100 \cdot \left| \dfrac{T_{gk} - T_{g0}}{T_{gk}} \right| \\
T_{g0} \leftarrow T_{gk}
\end{array}
\right. \\
T_{gk}
\end{array}
\right.
$$

Результат: $T_g = 1.45 \cdot 10^3 \cdot K$

Рис. 6.2. Решение задачи методом Ньютона

При сдаче лабораторной работы студент должен ответить на следующие контрольные вопросы:

1. На чём основывается метод Ньютона?
2. Напишите итерационную формулу метода Ньютона.
3. Каков геометрический смысл метода Ньютона?
4. Какое условие сходимости ньютоновских итераций?
5. Каковы преимущества метода Ньютона по сравнению с другими численными методами решения нелинейных уравнений?
6. Зачем при нахождении решения нелинейного уравнения методом Ньютона строят график этого уравнения?
7. Расскажите последовательность действий при решении нелинейного уравнения методом Ньютона.
8. Как найти производную функции в **MathCAD**?
9. Как построить декартов график в **MathCAD**?
10. Как приближённо найти корень функции на графике с использованием окна **Trace**?
11. Объясните назначение кнопок ‘‘**Add Line**’’, ‘‘**←**’’ и ‘‘**while**’’ панели программирования.
12. Что является условием окончания расчётов при использовании метода Ньютона?
13. Какой тип индексов используется в примере (раздел 2): обычный или декоративный? Чем они отличаются?

Лабораторная работа № 7

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Цель работы

1. Освоить метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Получить практические навыки решения методом Гаусса систем линейных уравнений, получающихся при рассмотрении задач радиационного теплообмена.

1. Общие сведения

Система линейных уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{array}{l} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{2,n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} \cdot x_1 + a_{n,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{n,n} \cdot x_n = b_n \end{array}, \qquad (1)$$

или в матричной форме:

$$A \cdot x = B, \qquad (2)$$

где $A = (a_{i,j})$ $i, j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ – матрица коэффициентов при неизвестных, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – вектор свободных членов, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор неизвестных.

Широко применяемый в вычислительной практике метод исключения Гаусса, относится к числу точных методов решения систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений (1). Алгоритм исключения состоит из последовательных шагов.

<u>Первый шаг</u>. Исключение неизвестной x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть $a_{1,1} \neq 0$. Тогда из первого уравнения выражаем x_1

$$x_1 = \frac{1}{a_{1,1}} \cdot \left(- a_{1,2} \cdot x_2 - \ldots - a_{1,n} \cdot x_n + b_1\right) \qquad (3)$$

через остальные неизвестные и подставляем (3) во 2-е, 3-е, …, n-е уравнение системы (1). После подстановки получаем преобразованную исходную систему вида

$$\begin{array}{l} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + a_{1,3} \cdot x_3 + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,2}^{[1]} \cdot x_2 + a_{2,3}^{[1]} \cdot x_3 + \ldots + a_{2,n}^{[1]} \cdot x_n = b_2^{[1]} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n,2}^{[1]} \cdot x_2 + a_{n,3}^{[1]} \cdot x_2 + \ldots + a_{n,n}^{[1]} \cdot x_n = b_n^{[1]} \end{array}, \qquad (4)$$

где элементы матрицы $a_{i,j}^{[1]}$, $2 \le i, j \le n$, и вектора $b_i^{[1]}$, $2 \le i \le n$, после первого шага получены по формулам

$$a_{i,j}^{[k+1]} = a_{i,j}^{[k]} - \frac{1}{a_{k,k}^{[k]}} \cdot a_{i,k}^{[k]} \cdot a_{k,j}^{[k]}, \quad b_i^{[k+1]} = b_i^{[k]} - \frac{1}{a_{k,k}^{[k]}} \cdot a_{i,k}^{[k]} \cdot b_k^{[k]}. \tag{5}$$

где $[k + 1]$ – номер шага исключения переменной, $k = 0 \div (n - 1)$. Номер шага k = 0 отвечает записи системы (1).

Продолжая этот процесс исключения при условии, что

$$a_{2,2}^{[1]} \ne 0, \dots, a_{n-1,n-1}^{[n-2]} \ne 0,$$

после $(n - 1)$-го шага исключения получим преобразованную исходную систему в виде

$$\begin{array}{r} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + a_{1,3} \cdot x_3 + \dots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{2,2}^{[1]} \cdot x_2 + a_{2,3}^{[1]} \cdot x_3 + \dots + a_{2,n}^{[1]} \cdot x_n = b_2^{[1]} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,n-1}^{[n-2]} \cdot x_{n-1} + a_{n-1,n}^{[n-2]} \cdot x_n = b_{n-1}^{[n-2]} \\ a_{n,n}^{[n-1]} \cdot x_n = b_n^{[n-1]} \end{array} \tag{6}$$

Преобразование исходной системы линейных уравнений к системе (6) – прямой ход исключения. На этом этапе мы ещё не вычислили ни одной компоненты вектора решения x, но эквивалентными преобразованиями привели систему к такой форме, для которой легко вычислить все компоненты решения x.

Пусть $a_{n,n}^{[n-1]} \ne 0$. Тогда осуществляем обратный ход: вычисляем компоненты вектора решения в обратном порядке.

Из (6) находим

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{[n-1]}}{a_{n,n}^{[n-1]}}, \\ x_{n-1} &= \frac{1}{a_{n-1,n-1}^{[n-2]}} \cdot \left(b_{n-1}^{[n-2]} - a_{n-1,n}^{[n-2]} \cdot x_n\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 &= \frac{1}{a_{1,1}} \cdot \left(b_1 - a_{1,n} \cdot x_n - \dots - a_{1,2} \cdot x_2\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Число арифметических действий, выполняемых при решении системы из ‘‘n’’ линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, в общем случае, равно $\frac{2}{3}$ n^3.

2. Пример применения метода Гаусса

Решить задачу:

Дано: куб (n = 6 см. рис. 7.1), внутренние поверхности которого имеют следующие температуры: T_1 = 800 К, T_2 = 900 К, T_3 = 1000 К, T_4 = 1100 К, T_5 = 1200 К, T_6 = 1300 К. Степень черноты всех поверхностей ε = 0.8;

коэффициент излучения абсолютно чёрного тела $\sigma_0 = 5.6687 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4); угловой коэффициент излучения между всеми поверхностями равен $\varphi = 0.2$. Угловой коэффициент ‘‘сам на себя’’ равен нулю: $\varphi_{ii} = 0$.

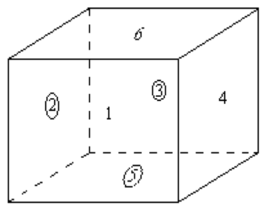


Рис. 7.1. Схема рассчитываемой системы

Найти: плотность эффективного излучения каждой поверхности.

Расчётные выражения:

Плотность потока эффективного излучения для i – й поверхности определяется по формуле:

$$q_i^{эф} = (1-\varepsilon) \cdot \sum_{j=1}^{6} q_j^{эф} \cdot \varphi_{ji} + \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_i^4 \qquad (8)$$

Всего в кубе 6 поверхностей. Значит, имеем 6 уравнений. Их можно преобразовать к следующему виду (индекс ‘‘эф’’ для упрощения записи опущен):

$$\begin{aligned}
1/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi]\cdot q_1 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 - q_6 &= \varepsilon\cdot\sigma_0\cdot T_1^4/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi] \\
-q_1 + 1/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi]\cdot q_2 - q_3 - q_4 - q_5 - q_6 &= \varepsilon\cdot\sigma_0\cdot T_2^4/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi] \\
-q_1 - q_2 + 1/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi]\cdot q_3 - q_4 - q_5 - q_6 &= \varepsilon\cdot\sigma_0\cdot T_3^4/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi] \\
-q_1 - q_2 - q_3 + 1/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi]\cdot q_4 - q_5 - q_6 &= \varepsilon\cdot\sigma_0\cdot T_4^4/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi] \\
-q_1 - q_2 - q_3 - q_4 + 1/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi]\cdot q_5 - q_6 &= \varepsilon\cdot\sigma_0\cdot T_5^4/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi] \\
-q_1 - q_2 - q_3 - q_4 - q_5 + 1/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi]\cdot q_6 &= \varepsilon\cdot\sigma_0\cdot T_6^4/[(1-\varepsilon)\cdot\varphi]
\end{aligned}$$

Фрагмент рабочего документа с решением этой системы относительно q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 и q_6 методом Гаусса представлен на рис. 7.2.

Указания к решению задачи:

1) Системная переменная **ORIGIN** определяет номер первого элемента массива (по умолчанию **ORIGIN** = 0). В нашем случае удобнее, чтобы все массивы начинались с элемента № 1;

2) Для облегчения решения задачи размерности лучше опустить;

3) Температуры поверхностей заданы в виде матрицы – строки. Это удобно сделать для придания записи компактного вида. Шаблон матрицы можно вызвать нажатием кнопки с изображением квадратной матрицы на панели векторов и матриц

4) Надо иметь в виду, в расчётах **MathCAD** оперирует с одномерными массивами – столбцами. Поэтому выполняем транспонирование матрицы. Знак транспонирования матрицы **T** можно вызвать нажатием комбинации клавиш **[Ctrl + 1]** или нажав кнопку ‘‘M^T’’ на панели векторов и матриц;

5) Проверку правильности решения можно произвести при помощи одной из встроенных функций решения систем линейных уравнений, например, **lsolve**, либо при помощи обратной матрицы. Стандартная

функция **lsolve** имеет вид: **lsolve(A, B)**, где **A** – матрица коэффициентов при неизвестных; **B** – матрица–столбец свободных членов.

Номера первых элементов массивов : ORIGIN := 1

Исходные данные: $\varepsilon := 0.8$ $\sigma_0 := 5.6687 \cdot 10^{-8}$ $\phi := 0.2$ $n := 6$

Транспонирование матрицы-строки в матрицу-столбец для удобства ввода массива T_i:

$$T := (800\ \ 900\ \ 1000\ \ 1100\ \ 1200\ \ 1300)^T$$

Формирование матрицы коэффициентов при неизвестных и вектора свободных членов:

$i := 1 .. n$ $j := 1 .. n$ $A_{i,j} := -1$

$$A_{i,i} := \frac{1}{(1-\varepsilon)\cdot\phi} \qquad B_i := \frac{(T_i)^4 \cdot \sigma_0 \cdot \varepsilon}{(1-\varepsilon)\cdot\phi}$$

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 25 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 25 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 25 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 25 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 25 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4.644\cdot10^5 \\ 7.438\cdot10^5 \\ 1.134\cdot10^6 \\ 1.66\cdot10^6 \\ 2.351\cdot10^6 \\ 3.238\cdot10^6 \end{bmatrix}$$

Программный модуль для решения системы уравнений методом Гаусса:

```
q :=  a ← A
      b ← B
      for  k ∈ 1 .. n − 1
        for  i ∈ k + 1 .. n
            for  j ∈ k + 1 .. n
              a[i,j] ← a[i,j] − (1 / a[k,k]) · a[i,k] · a[k,j]
            b[i] ← b[i] − (1 / a[k,k]) · a[i,k] · b[k]
      x[n] ← b[n] / a[n,n]
      for  k ∈ n − 1 .. 1
          s ← 0
          for  i ∈ n .. k + 1
            s ← s + a[k,i] · x[i]
          x[k] ← (1 / a[k,k]) · (b[k] − s)
      x
```

Результат:

$$q = \begin{bmatrix} 3.63\cdot10^4 \\ 4.705\cdot10^4 \\ 6.205\cdot10^4 \\ 8.229\cdot10^4 \\ 1.089\cdot10^5 \\ 1.43\cdot10^5 \end{bmatrix}$$

Проверка 1 (с использованием стандартной функции lsolve):

$$\mathrm{lsolve}(A, B) = \begin{bmatrix} 3.63\cdot10^4 \\ 4.705\cdot10^4 \\ 6.205\cdot10^4 \\ 8.229\cdot10^4 \\ 1.089\cdot10^5 \\ 1.43\cdot10^5 \end{bmatrix}$$

Проверка 2 (с использованием обратной матрицы):

$$A^{-1}\cdot B = \begin{bmatrix} 3.63\cdot10^4 \\ 4.705\cdot10^4 \\ 6.205\cdot10^4 \\ 8.229\cdot10^4 \\ 1.089\cdot10^5 \\ 1.43\cdot10^5 \end{bmatrix}$$

Рис. 7.2 Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Задание для самостоятельной работы

Решить систему линейных уравнений вида $A \cdot x = B$ методом Гаусса. Вариант задания взять из таблицы 7.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

Таблица 7.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	A	B	№ вар.	A	B
1	$\begin{pmatrix} 100 & -14 & 13 \\ 0,5 & 200 & 9,5 \\ -9 & 9 & 300 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1232 \\ 326 \\ 4335 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 264 & -58 & 43 \\ 0,5 & 560 & 3,5 \\ -6 & 9 & 532 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2587 \\ 159 \\ 4236 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 200 & -13 & 12 \\ 1 & 400 & 9 \\ -8 & 8 & 600 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2470 \\ 946 \\ 7920 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 235 & -23 & 12 \\ 3 & 526 & 6 \\ -1 & 8 & 400 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2861 \\ 913 \\ 7410 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 300 & -12 & 11 \\ 1,5 & 600 & 8,5 \\ -7 & 7 & 900 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4350 \\ 5456 \\ 5681 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 312 & -19 & 1,1 \\ 1,3 & 126 & 3,5 \\ -2 & 7 & 960 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2210 \\ 2490 \\ 1251 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 400 & -11 & 10 \\ 2 & 800 & 7 \\ -9 & 9 & 354 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4960 \\ 5050 \\ 9520 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 230 & -1,1 & 15 \\ 2,8 & 125 & 4.1 \\ -23 & 1,7 & 381 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2529 \\ 3035 \\ 2580 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 275 & -22 & 11 \\ 4,5 & 670 & 7.3 \\ -5 & 9,7 & 300 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5430 \\ 9126 \\ 1923 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 545 & -2,2 & 1,1 \\ 25 & 45 & 7.3 \\ -42 & 4,7 & 211 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1125 \\ 2556 \\ 1266 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 238 & -15 & 65 \\ 8 & 865 & 1 \\ -5 & 21 & 35,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1587 \\ 3541 \\ 9842 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 200 & -0,3 & 41 \\ 8,3 & 821 & 1,2 \\ -3 & 81 & 15,4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7751 \\ 3251 \\ 3368 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 384 & -18 & 53 \\ 6 & 630 & 9 \\ -5 & 62 & 454 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6548 \\ 3281 \\ 1562 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 312 & -1,8 & 23 \\ 6,6 & 621 & 1 \\ -3,6 & 92 & 274 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2557 \\ 2371 \\ 3591 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 295 & -2 & 38 \\ 3.5 & 370 & 4.3 \\ -9 & 9,7 & 321 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1289 \\ 2846 \\ 1973 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 420 & -18 & 32 \\ 3 & 340 & 1 \\ -5 & 5 & 154 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9511 \\ 2396 \\ 3359 \end{pmatrix}$

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, реферат первого раздела и протокол действий, самостоятельно выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче лабораторной работы студент должен ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Как записывается система линейных уравнений в матричной форме?
2. В чём суть метода Гаусса?
3. Какой вычислительный процесс называется прямым ходом исключения в методе Гаусса?
4. Какой вычислительный процесс называется обратным ходом в методе Гаусса?
5. Прокомментируйте формулу преобразования матрицы коэффициентов при неизвестных во время прямого хода исключения. Что в неё входит и как получена?
6. Прокомментируйте формулу преобразования вектора свободных членов во время прямого хода исключения. Что в неё входит и как получена?
7. Прокомментируйте формулу нахождения неизвестных во время обратного хода. Что в неё входит и как получена?
8. Какую информацию содержит системная переменная **ORIGIN**?
9. Что происходит при транспонировании матрицы? Как осуществить транспонирование матрицы в **MathCAD**?
10. Как можно проверить правильность решения системы линейных уравнений методом Гаусса?
11. Объясните назначение кнопок ‘‘**Add Line**’’, ‘‘**←**’’ и ‘‘**while**’’ панели программирования.
12. Как транспонировать матрицу–столбец в матрицу–строку?

Лабораторная работа № 8

Применение метода наименьших квадратов для аппроксимации табличных данных

Цель работы

1. Освоить метод наименьших квадратов.
2. Получить практические навыки аппроксимации табличных данных методом наименьших квадратов.

1. Общие сведения

Метод наименьших квадратов – основной метод статистической обработки результатов исследования, позволяющий решить, какое из произвольных уравнений даёт наилучшее приближение к фактической зависимости.

Пусть для описания исследуемой зависимости выбрано уравнение $y = f(x)$. Например, $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots$. Согласно выбранному уравнению $y = f(x)$, значению аргумента x_i должно соответствовать значение функции y_i. Как правило, получается отклонение фактических значений от расчётных. Сущность метода наименьших квадратов заключается в том, что наилучшее приближение к истинной зависимости даёт такое уравнение, для которого сумма квадратов отклонений экспериментальных и расчётных данных имеет минимальное значение, т.е.

$$S = \sum_{1}^{n} \left[y_i - f(x_i)\right]^2 \to \min. \qquad (1)$$

Для сравнения обычно выбирают уравнения определённого типа, но с неизвестными коэффициентами. Величину S можно рассматривать как функцию коэффициентов a_1, a_2, …, a_n искомого уравнения. Задача состоит в том, чтобы найти значения коэффициентов уравнения, соответствующие минимуму S.

Известно, что необходимым условием минимума дифференцируемой функции является равенство нулю первых производных. В данном случае

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \ldots, \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \qquad (2)$$

Эти равенства можно рассматривать как систему нормальных уравнений относительно коэффициентов a_1, a_2, …, a_n, которая имеет единственное решение, минимизирующее величину S.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов на примере линейной зависимости типа $y = a_0 + a_1 \cdot x$. Отклонение линейного уравнения от искомой прямой в отдельных точках может быть записано в виде системы уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\Delta y_1 = y - y_1 = a_0 + a_1 \cdot x_1 - y_1;\\
&\Delta y_2 = y - y_2 = a_0 + a_1 \cdot x_2 - y_2;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta y_n = y - y_n = a_0 + a_1 \cdot x_n - y_n.
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Если в каждом частном уравнении системы (3) левую и правую части возвести в квадрат и сложить все уравнения, получим сумму квадратов отклонений

$$\sum_{i=1}^{n}(y - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i)^2. \qquad (4)$$

Приравняем к нулю частные производные:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta y_i^2\right)}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) = 0;\\
\dfrac{\partial\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta y_i^2\right)}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left[(a_0 + a_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i\right] = 0.
\end{cases} \qquad (5)
$$

После ряда простейших преобразований получим систему линейных уравнений:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i;\\
\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2.
\end{cases} \qquad (6)
$$

Решая (6) любым подходящим методом (методом Гаусса, методом простых итераций и т.д.), находим значения коэффициентов a_0 и a_1.

2. Пример применения метода наименьших квадратов

Решить задачу:

Дано: экспериментально полученная зависимость содержания CO_2 в продуктах полного горения топлива от содержания O_2 в дутье (дутьё – окислитель топлива на основе воздуха).

Содержание O_2 в дутье, %	21	24	27	36	30	42	70	48	100
CO_2, %	11,8	13,6	15,6	22	17,7	26,6	54	31,6	100

Найти: линейное уравнение вида $y = a_0 + a_1 \cdot x$, описывающее эту зависимость.

Фрагмент рабочего документа с решением данной задачи представлен на рис. 8.1.

Номера первых элементов массивов : $ORIGIN := 1$

Исходные данные:

$$M := \begin{bmatrix} 21 & 24 & 27 & 36 & 30 & 42 & 70 & 48 & 100 \\ 11.8 & 13.6 & 15.6 & 22 & 17.7 & 26.6 & 54 & 31.6 & 100 \end{bmatrix}^T$$

Разделение исходного двухмерного массива на два одномерных массива-столбца:

$O_2 := M^{\langle 1 \rangle}, \; CO_2 := M^{\langle 2 \rangle}$

$$O_2^T = \begin{bmatrix} 21 & 24 & 27 & 36 & 30 & 42 & 70 & 48 & 100 \end{bmatrix}$$

$$CO_2^T = \begin{bmatrix} 11.8 & 13.6 & 15.6 & 22 & 17.7 & 26.6 & 54 & 31.6 & 100 \end{bmatrix}$$

Аппроксимация экспериментальных данных методом наименьших квадратов:

$n := 9$ **Начальное приближение:** $a_0 := 0$ $a_1 := 0$

given

$$\sum_{i=1}^{n} CO_{2_i} = a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} O_{2_i}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \left(O_{2_i} \cdot CO_{2_i}\right)\right] = a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} O_{2_i} + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(O_{2_i}\right)^2$$

$$\mathrm{find}(a_0, a_1) = \begin{bmatrix} -15.594 \\ 1.089 \end{bmatrix}$$

Проверка полученного решения:

$a_{0p} := \mathrm{intercept}(O_2, CO_2), \; a_{1p} := \mathrm{slope}(O_2, CO_2)$

$a_{0p} = -15.594$ $a_{1p} = 1.089$

Графическое отображение решения:

$y(x) := a_{0p} + a_{1p} \cdot x$

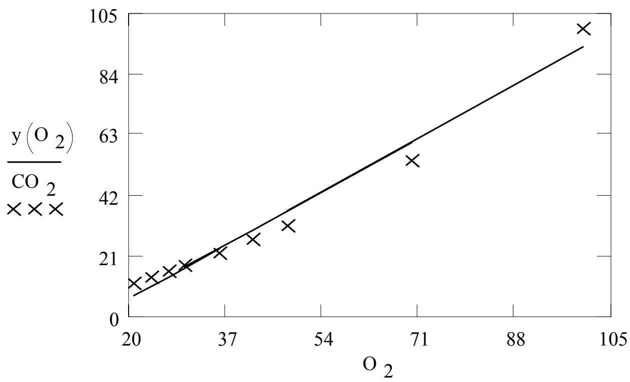


Рис. 8.1. Аппроксимация экспериментальных данных методом наименьших квадратов

<u>Указания к выполнению задания:</u>

1) Введите номера первых элементов массивов, которые задаются системной переменной **ORIGIN,** и значения экспериментальных данных.

2) Для дальнейшей обработки двухмерный массив исходных данных необходимо разделить на два одномерных массива–столбца. Шаблон

верхнего индекса, определяющего номер колонки массива можно вызвать нажатием комбинации клавиш **[Ctrl] + [6]** или нажав кнопку ‘‘$\mathbf{M}^{<>}$’’ на панели векторов и матриц**.**

3) Для нахождения коэффициентов a_0 и a_1 необходимо решить систему уравнений (5). Это можно сделать при помощи встроенных функций **given** (дано) и **find** (найти). Перед встроенной функцией **given** необходимо задать начальные приближения для искомых переменных. В данном случае для a_0 и a_1. Обычно в качестве начальных приближений берут простые числа, типа 0, 1, -1, 2 и т.п. После функции **given** необходимо записать анализируемую систему, связывая левые и правые части уравнений знаком ‘‘логическое равенство’’ – жирным знаком ‘‘равно’’, который можно вызвать нажатием комбинации клавиш **[Ctrl] + [=]**. Функция **find** возвращает значения искомых переменных. Если система функций **given** и **find** выдаёт сообщение об ошибке, то можно попробовать изменить начальные приближения.

4) Проверку правильности решения можно произвести при помощи встроенных функций **intercept** и **slope**, которые возвращают, соответственно, коэффициенты a_0 и a_1 линейной регрессии $y = a_0 + a_1 \cdot x$.

5) Соответствие полученного уравнения экспериментальным данным можно оценить при помощи графика.

Задание для самостоятельной работы

Найти методом наименьших квадратов линейную зависимость $y = a_0 + a_1 \cdot x$ по заданным эмпирическим данным. Используя найденную линейную зависимость, найти значение y в точке $x = N + 0{,}55$, где N – номер варианта. Вариант задания взять из таблицы 8.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

Таблица 8.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	Эмпирические данные											
1	x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
	y	0,686	0,742	0,767	0,646	0,807	0,774	0,97	0,932	0,936	0,978	1,048
2	x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
	y	2,312	2,251	2,418	2,752	2,459	2,7	3,022	3,079	2,42	2,669	3,241
3	x	3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
	y	4,615	4,591	5,13	5,481	5,492	5,553	5,471	5,727	5,798	6,11	6,605
4	x	4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5
	y	8,472	8,805	9,096	8,993	9,312	9,465	9,771	9,61	9,722	11,42	10,28
5	x	5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6
	y	12,36	13,63	13,3	13,15	13,48	14,24	14,51	14,88	15,25	15,37	15,16
6	x	6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7
	y	17,63	19,75	19,78	18,81	19,88	21,12	20,21	19,48	20,15	20,5	21,29

№ вар.	Эмпирические данные											
7	x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8
	y	25,24	25,13	25,67	26,63	26,75	27,23	26,49	26,88	27,23	28,06	27,78
8	x	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9
	y	30,53	34,22	34,23	34,11	33,59	34,06	34,5	35,82	35,68	37,44	35,7
9	x	9	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
	y	41,74	42,24	43,88	42,16	43,7	45,04	42,46	45,73	44,06	45,86	44,95
10	x	10	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6	10,7	10,8	10,9	11
	y	49,76	51,92	50,08	52,38	53,41	54,97	52,78	54,11	55,48	55,68	56,2
11	x	11	11,1	11,2	11,3	11,4	11,5	11,6	11,7	11,8	11,9	12
	y	62,17	63,05	63,72	64,24	64,09	63,59	65,41	65,28	65,05	68,87	65,74
12	x	12	12,1	12,2	12,3	12,4	12,5	12,6	12,7	12,8	12,9	13
	y	71,17	74,26	72,66	74,51	76,65	75,52	75,71	76,36	79,32	77,37	77,61
13	x	13	13,1	13,2	13,3	13,4	13,5	13,6	13,7	13,8	13,9	14
	y	86,61	85,49	87,8	88,61	89,07	89,24	89,63	90,76	91,32	91,43	91,71
14	x	14	14,1	14,2	14,3	14,4	14,5	14,6	14,7	14,8	14,9	15
	y	99,81	100,3	99,49	102,6	103,2	104,4	104,7	105,1	104,7	105,5	107,2
15	x	15	15,1	15,2	15,3	15,4	15,5	15,6	15,7	15,8	15,9	16
	y	115,2	115,3	115,1	116	117,2	119,3	121,4	119,8	120,8	121,6	124,3
16	x	16	16,1	16,2	16,3	16,4	16,5	16,6	16,7	16,8	16,9	17
	y	121,3	121,5	120,9	121,7	124,1	124,3	123,9	124	125,5	125,9	126,8

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, реферат первого раздела и протокол действий, самостоятельно выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче лабораторной работы студент должен ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Назначение метода наименьших квадратов?
2. Сущность метода наименьших квадратов?
3. Повторите вывод уравнений (3 – 6) для случая $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$.
4. Назначение встроенных функций **given** и **find**?
5. Назначение встроенных функций **intercept** и **slope**?
6. Как разделить один двухмерный массив на два одномерных?
7. Что означают следующие знаки: ":=", "=", "=", "←", "→"?
8. Как задать на графике значения переменных в виде отдельных точек (кружков, крестиков и т.д.)?
9. Для чего производится операция транспонирования матрицы?

Лабораторная работа № 9

Приближённое вычисление интегралов методом Симпсона

Цель работы
1. Освоить метод численного интегрирования Симпсона.
2. Получить практические навыки вычисления интегралов методом Симпсона.

1. Общие сведения

Во многих научных и технических задачах интегрирование функций является составной частью решения полной проблемы. Вычисление площадей и объёмов, определение центра и моментов инерции тел, вычисление значения работы, произведённой некоторыми силами, и многие другие задачи приводят к интегрированию функций. Геометрический смысл простейшего определённого интеграла

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

от неотрицательной функции $f(x) \geq 0$, как известно, состоит в том, что значение I – это площадь, ограниченная кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$.

Разделим отрезок $[a, b]$ точками $x_0=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$ на чётное число частей $n = 2m$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$. Площадь криволинейной трапеции, соответствующей первым двум отрезкам $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$ и ограниченной заданной кривой $y=f(x)$, которая ограничена параболой второй степени, проходящей через эти три точки и имеющую ось, параллельную оси 0Y. Такую криволинейную трапецию будем называть параболической трапецией.

Уравнение параболы с осью, параллельной оси 0Y, имеет вид:

$$y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C\,. \tag{2}$$

Лемма. *Если криволинейная трапеция ограничена параболой* (2)*, осью* 0X *и двумя ординатами, расстояние между которыми равно* 2h, *то её площадь равна:*

$$S = \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2\right), \tag{3}$$

где y_0 и y_2 – крайние ординаты, а y_1 – ордината кривой в середине отрезка.

Пользуясь формулой (3), можем написать следующие приближённые равенства (h=Δx):

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot(y_0+4\cdot y_1+y_2),$$
$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot(y_2+4\cdot y_3+y_4), \qquad (4)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m=b}} f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot(y_{2m-2}+4\cdot y_{2m-1}+y_{2m}).$$

Складывая левые и правые части, получим слева искомый интеграл, справа его приближённое значение:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot(y_0+4\cdot y_1+2\cdot y_2+4\cdot y_3+\dots+2\cdot y_{2m-1}+4\cdot y_{2m-1}+y_{2m}). \qquad (5)$$

Сокращая, получим формулу Симпсона в общем виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot\left(y_0+4\cdot\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1}+2\cdot\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}+y_{2m}\right). \qquad (6)$$

Формулу Симпсона также называют формулой парабол.

2. Пример применения метода Симпсона

Решить задачу:

Существует некоторое предельное значение параметра вдува (характерного параметра интенсивности процесса массообмена), при котором коэффициенты трения, теплообмена и массообмена становятся равными нулю. При этом критический параметр вдува определяется формулой:

$$b_{кр}=\left[\sqrt{\frac{\rho}{\rho_{ст}}}\cdot\int_0^1\sqrt{\omega}\,d\omega\right]^2,$$

где ρ, $\rho_{ст}$ – плотность среды в потоке и на стенке; ω – относительная скорость.

Найти: значение критического параметра при ρ = 600 кг/м^3, $\rho_{ст}$ = 800 кг/м^3.

Фрагмент рабочего документа с решением задачи представлен на рисунке 9.1.

Задание для самостоятельной работы

Вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методом Симпсона. Вариант задания взять из таблицы 9.1 согласно порядковому номеру студента по журналу.

Таблица 9.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	$f(x)$	$[a, b]$	№ вар.	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sqrt{256 - x^2}$	$[0, 16]$	9	$x^3 \cdot \sqrt{16 - x^2}$	$[0, 4]$
2	$x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}$	$[0, 1]$	10	$x \cdot \sqrt{25 - x^2}$	$[0, 5]$
3	$\frac{1}{(25 + x^2) \cdot \sqrt{25 + x^2}}$	$[0, 5]$	11	$\frac{\exp\left(\sqrt{3 - x}\right)}{(3 + x) \cdot \sqrt{9 - x^2}}$	$[0, 3]$
4	$\sqrt{\frac{2 - x}{x - 6}}$	$[3, 5]$	12	$\frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2 \cdot \sqrt[3]{x}}{x + 2 \cdot \sqrt{x^3} + 8}$	$[1, 64]$
5	$\frac{1}{\left(5 - x^2\right)^{3/2}}$	$\left[0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$	13	$\frac{x^4}{\left(2 - x^2\right)^3}$	$[0, 1]$
6	$\frac{x^4}{\left(1 - x^2\right)^3}$	$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	14	$\sqrt{\frac{9 - 2 \cdot x}{2 \cdot x - 21}}$	$[6, 9]$
7	$\sqrt{4 - x^2}$	$[0, 2]$	15	$\sqrt{x + 12}$	$[6, 10]$
8	$\frac{4 - x^2}{(4 + x) \cdot \sqrt{\left(16 - x^2\right)}}$	$[0, 4]$	16	$\frac{1}{\left(9 + x^2\right)^{1/3}}$	$[0,13]$

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, реферат первого раздела и протокол действий, самостоятельно выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче лабораторной работы студент должен ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Назовите примеры задач, при решении которых возникает необходимость в вычислении определённых интегралов.
2. Геометрический смысл определённого интеграла?
3. Что называют параболической трапецией?
4. Какой вид имеет уравнение параболы с осью, параллельной оси 0Y?
5. Чему равна площадь криволинейной трапеция, ограниченной параболой (2), осью 0X и двумя ординатами, расстояние между которыми равно $2h$?
6. Напишите формулу Симпсона.
7. Почему формулу Симпсона называют формулой парабол?
8. Объясните алгоритм вычисления определённого интеграла методом Симпсона.
9. Какие стандартные средства **MathCAD** предназначены для вычисления определённых интегралов?

10. Как влияет количество интервалов на точность вычисления определённого интеграла?

Исходные данные:

$$\rho := 600 \cdot \frac{kg}{m^3} \qquad \rho_s := 800 \cdot \frac{kg}{m^3} \qquad \omega_n := 0 \qquad \omega_k := 1$$

Подинтегральная функция: $f(\omega) := \sqrt{\omega}$

Принимаем количество интервалов (чётное) $n := 30$

Программный модуль для расчёта определённого интеграла по формуле Симпсона:

$$\text{Integral} := \left| \begin{array}{l} \Delta\omega \leftarrow \dfrac{\omega_k - \omega_n}{n} \\ \text{nechet} \leftarrow 0 \\ \text{chet} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1, 3 .. (n-1) \\ \quad \text{nechet} \leftarrow \text{nechet} + f(\Delta\omega \cdot i) \\ \text{for } i \in 2, 4 .. (n-2) \\ \quad \text{chet} \leftarrow \text{chet} + f(\Delta\omega \cdot i) \\ \dfrac{\Delta\omega}{3} \cdot \left(f(\omega_n) + 4 \cdot \text{nechet} + 2 \cdot \text{chet} + f(\omega_k)\right) \end{array} \right.$$

$$b_{kr} := \left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}} \cdot \text{Integral}\right)^2 \qquad b_{kr} = 0.333$$

Проверка с использованием символьной функции:

$$\left(\sqrt{\frac{\rho}{\rho_s}} \cdot \int_{\omega_n}^{\omega_k} f(\omega)\, d\omega\right)^2 = 0.333$$

Рис. 9.1. Вычисление определённого интеграла методом Симпсона

Лабораторная работа № 10

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутта

Цель работы
1. Освоить методы Эйлера и Рунге-Кутта.
2. Получить практические навыки решения обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся при рассмотрении задач нагрева термически тонких тел.

1. Общие сведения

Большое количество задач с обыкновенными дифференциальными уравнениями (О.Д.У.) вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

может быть решено только численно. Простейшим методом решения подобных уравнений является метод Эйлера. Этот метод состоит в пошаговом применении простой формулы:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i), \tag{2}$$

где i – номер узла, на которые разбит интервал по переменной x, Δx – расстояние между узлами i и $i + 1$. Понятно, что чем меньше величина Δx, тем точнее будет расчёт, но одновременно, увеличится время вычислений на ЭВМ за счёт увеличения количества узлов.

Этот метод даёт хорошее приближение решения только при достаточно малом Δx и только для нескольких первых узлов (точек). Метод Эйлера даёт относительно большую погрешность, так как имеет первый порядок точности. Первый порядок – самый низкий. Достоинство этого метода в наглядности и простоте реализации.

Более совершенным, по сравнению с методом Эйлера, при решениии О.Д.У. является метод Рунге-Кутта. Идея метода Рунге-Кутта состоит в том, чтобы представить дискретную задачу, соответствующую (1), в виде:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot \varphi(x_i, y_i, \Delta x), \tag{3}$$

где функция $\varphi(x_i, y_i, \Delta x)$ приближала бы отрезок ряда Тейлора:

$$y_{i+1} = y_i + y_i' \cdot \Delta x + \frac{y_i''}{2!} \cdot \Delta x^2 + \ldots + \frac{y_i^{(p)}}{p!} \cdot \Delta x^p \tag{4}$$

и в то же время не содержала бы производных от функции $f(x, y)$. Таким образом, в основе методов Рунге-Кутта лежит подгонка рядов Тейлора.

Заметим, что метод Рунге-Кутта первого порядка ($p = 1$) – это метод Эйлера, так как здесь в вычислениях используются только значения $f(x, y)$.

Наиболее популярным среди методов Рунге-Кутта является метод Рунге-Кутта четвёртого порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right), \tag{5}$$

где

$$k_1 = f\left(x_i, y_i\right) \cdot \Delta x;$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right) \cdot \Delta x;$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \cdot \Delta x;$$

$$k_4 = f\left(x_i + \Delta x, y_i + k_3\right) \cdot \Delta x.$$

2. Пример применения метода Рунге-Кутта

Решить задачу:

Процесс нагрева конвекцией термически тонкого тела описывается следующим уравнением:

$$C \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT}{d\tau} = \alpha \cdot \left(T_g - T\right) \cdot S\,, \tag{6}$$

где V и S – объём и площадь поверхности нагреваемого тела, T – температура тела.

Исходные данные: D = 2·R = 0.025 м; плотность металла ρ = 8000 кг/м^3; удельная теплоёмкость металла C = 600 Дж/(кг·К); коэффициент теплоотдачи конвекцией α = 30 Вт/(м^2·К); коэффициент теплопроводности λ = 30 Вт/(м·К); начальная температура T_0 = 300 К.

Найти: изменение температуры термически тонкой цилиндрической стальной заготовки диаметром D, нагреваемой конвекцией в печи, если температура печных газов изменяется по закону $T_g = 1000 + b \cdot \tau$, где τ = = 0 ÷ 300 – время нагрева, с; b = 1 К/с.

Указания к выполнению задания:

При решении задачи уравнение (6) преобразуется к следующему виду, максимально приближённому к виду О.Д.У. (1):

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{\alpha \cdot S}{C \cdot \rho \cdot V} \cdot \left(T_g - T\right) = \frac{2 \cdot \alpha}{C \cdot \rho \cdot R} \cdot \left(T_g - T\right) \tag{7}$$

Фрагмент рабочего документа с решением задачи представлен на рис. 10.1.

Задание для самостоятельной работы

Решить обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{\alpha \cdot k_1}{S \cdot \rho \cdot C} \cdot \left(T_{окр} - T\right)$$

методом Рунге-Кутта. Данные, общие для всех вариантов: $T_{окр}$ = 1000 *К*, C = 600 *Дж/(кг·К)*, ρ = 8000 *кг/м*^{3}, начальное значение T_0 = 273 *К*, τ=

$= 0 \div 1200$ с. Остальные данные взять из таблицы 10.1. согласно порядковому номеру студента по журналу.

Исходные данные:

$D := 0.025 \cdot m \qquad \rho := 8000 \cdot \frac{kg}{m^3} \qquad C := 600 \cdot \frac{J}{kg \cdot K} \qquad b := 1 \cdot \frac{K}{s}$

$\alpha := 30 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K} \qquad \lambda := 30 \cdot \frac{W}{m \cdot K} \qquad T_0 := 300 \cdot K \qquad k_1 := 2$

$\tau_n := 0 \cdot s \qquad \tau_k := 300 \cdot s$

Радиус заготовки: $R := \frac{D}{2}$

1) Закон изменения температуры в печи: $T_g(\tau) := 1000 \cdot K + b \cdot \tau$

2) Правая часть О.Д.У.: $f(\tau, T) := \frac{\alpha \cdot 2}{C \cdot \rho \cdot R} \cdot \left(T_g(\tau) - T\right)$

3) Расчёт одного шага методом Рунге-Кутта 4-го порядка:

$$y_{i1}\left(x_i, y_i, \Delta x\right) := \left| \begin{array}{l} k_1 \leftarrow f\left(x_i, y_i\right) \cdot \Delta x \\ k_2 \leftarrow \left(f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)\right) \cdot \Delta x \\ k_3 \leftarrow \left(f\left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)\right) \cdot \Delta x \\ k_4 \leftarrow \left(f\left(x_i + \Delta x, y_i + k_3\right)\right) \cdot \Delta x \\ y_i + \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right) \end{array} \right.$$

Принимаем количество шагов по времени $N := 5$

Величина шага по времени $\Delta\tau := \frac{\tau_k - \tau_n}{N}$

$i := 1 .. N$

Температура, рассчитанная методом Рунге-Кутта 4-го порядка:

$T_i := y_{i1}\left(\Delta\tau \cdot i, T_{i-1}, \Delta\tau\right)$

$T^T = [\,300 \quad 346.023 \quad 392.861 \quad 440.465 \quad 488.791 \quad 537.796\,] \cdot K$

Графическое представление полученных результатов:

$i := 0 .. N$

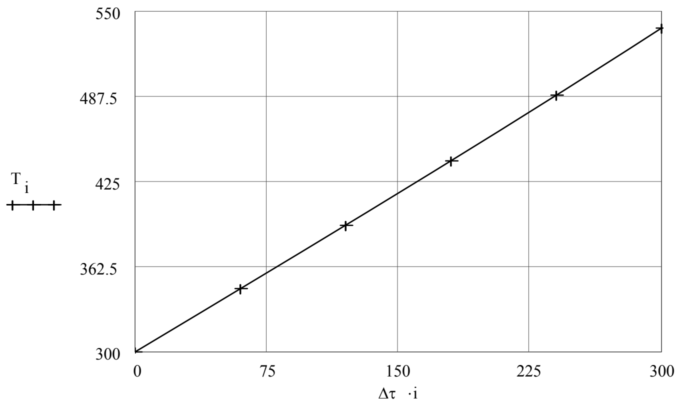


Рис. 10.1. Решение задачи нагрева заготовки методом Рунге-Кутта

Таблица 10.1

Варианты заданий для самостоятельной работы

№ вар.	S	k_1	α	№ вар.	S	k_1	α
1	0,010	2	30	9	0,026	1	65
2	0,012	2	40	10	0,028	1	75
3	0,014	2	50	11	0,011	1	33
4	0,016	2	60	12	0,013	1	43
5	0,018	2	70	13	0,015	1	53
6	0,020	1	35	14	0,017	3	63
7	0,024	1	45	15	0,019	3	73
8	0,026	1	55	16	0,021	3	77

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, реферат первого раздела и протокол действий, самостоятельно выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче лабораторной работы студент должен ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Сущность метода Эйлера?
2. Напишите формулу метода Эйлера.
3. Достоинства и недостатки метода Эйлера?
4. В чём заключается идея метода Рунге-Кутта?
5. Прокомментируйте формулу метода Рунге-Кутта.
6. Что лежит в основе метода Рунге-Кутта?
7. В каком случае метод Рунге-Кутта становится методом Эйлера?
8. Какой из методов Рунге-Кутта является наиболее популярным?
9. Почему результаты расчёта температур лучше выводить в виде транспонированного массива?
10. Как можно повысить точность решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера или Рунге-Кутта?
11. Из каких соображений выбирается величина шага и число шагов, на которые разбивается весь интервал изменения аргумента при численном решении О.Д.У.?

Лабораторная работа № 11

Метод прогонки

Цель работы

1. Освоить метод прогонки решения систем линейных уравнений, получающихся при аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности методом конечных разностей.
2. Получить практические навыки решения систем линейных уравнений трёхдиагонального вида методом прогонки.

1. Общие сведения

Метод прогонки является частным случаем метода Гаусса и предназначен для решения систем линейных уравнений, у которых коэффициенты при неизвестных образуют трёхдиагональную матрицу.

Примером уравнений, из которых может состоять система, является следующее i-е уравнение:

$$A_i \cdot t_{i-1} + B_i \cdot t_i + C_i \cdot t_{i+1} = D_i; \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{1}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i – константы; t_{i-1}, t_i, t_{i+1} – неизвестные.

Вид уравнений, подобных (1), возникает, в частности, при аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности методом конечных разностей.

Если представить систему уравнений (1) в матричном виде, то можно увидеть, что матрица коэффициентов при неизвестных заполнена нулями, кроме трёх главных диагоналей:

$$\begin{bmatrix} B_1 \;\; C_1 \;\; 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ A_2 \;\; B_2 \;\; C_2 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots A_i \;\; B_i \;\; C_i \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots A_N \;\; B_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \ldots \\ t_i \\ \ldots \\ t_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \ldots \\ D_i \\ \ldots \\ D_N \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Метод прогонки включает прямой ход и обратный ход. При прямом ходе находятся прогоночные коэффициенты, рассчитываемые по формулам:

$$\alpha_1 = \frac{-C_1}{B_1}; \; \beta_1 = \frac{D_1}{B_1}; \tag{3}$$

$$\alpha_i = \frac{-C_i}{B_i + A_i \cdot \alpha_{i-1}}; \; \beta_i = \frac{-A_i \cdot \beta_{i-1} + D_i}{B_i + A_i \cdot \alpha_{i-1}}; \quad i = 2, 3, \ldots, N. \tag{4}$$

При обратном ходе рассчитываются искомые величины t:

$$t_N = \beta_N \tag{5}$$

$$t_i = \alpha_i \cdot t_{i+1} + \beta_i; \quad i = N-1, N-2, \ldots, 1. \tag{6}$$

Расчёт методом прогонки устойчив, если выполняется условие преобладания диагональных элементов

$$|B_i| \ge |A_i + C_i|; \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{7}$$

Это условие является достаточным, но не строго необходимым. Поэтому для большинства практических расчётов прогонка оказывается устойчивой даже при его нарушении.

Для решения системы линейных уравнений методом прогонки требуется порядка $9N$ арифметических действий, то есть гораздо меньше, чем методами Гаусса или Крамера. Это связано с тем, что в процессе расчёта заранее исключаются операции над коэффициентами равными нулю.

2. Пример применения метода прогонки

Необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &2 \cdot t_1 + 3 \cdot t_2 = 8; \\ &2 \cdot t_1 + t_2 + t_3 = 3; \\ &5 \cdot t_2 - t_3 + 2 \cdot t_4 = -2; \\ &3 \cdot t_3 + 2 \cdot t_4 = -7. \end{aligned} \tag{8}$$

Если проанализировать вид системы, то можно обнаружить, что в каждом уравнении не более трёх неизвестных и коэффициенты перед неизвестными образуют матрицу, в которой заполнены только три главные диагонали, а остальные коэффициенты равны нулю.

Так как система является трёхдиагональной, то используем метод прогонки. Для удобства расчётов запишем коэффициенты этой системы в таблицу 11.1.

Таблица 11.1

Коэффициенты системы уравнений

i	A_i	B_i	C_i	D_i
1	0	2	3	8
2	2	1	1	3
3	5	-1	2	-2
4	3	2	0	-7

Фрагмент рабочего документа с решением задачи представлен на рис. 11.1.

Задание для самостоятельной работы

Решить методом прогонки систему

$$\begin{aligned} &4 \cdot x_1 + x_2 = D_1; \\ &x_1 + 4 \cdot x_2 + x_3 = D_2; \\ &x_2 + 4 \cdot x_3 + x_4 = D_3; \\ &x_3 + 4 \cdot x_4 = D_4 \end{aligned}$$

относительно x_1, x_2, x_3, x_4.

Для каждого варианта расчёта коэффициенты D принимают значения, приведённые в таблице 11.2.

Таблица 11.2

Значения коэффициентов D

№ вар.	D_1	D_2	D_3	D_4	№ вар.	D_1	D_2	D_3	D_4
1	26	2	-12	25	11	-8	4	-15	30
2	-12	12	15	14	12	0	-6	26	-14
3	-2	-1	28	15	13	21	-7	-5	-6
4	33	0	3	21	14	-5	26	23	7
5	19	14	-9	16	15	9	-1	1	0
6	-9	2	15	-4	16	7	1	-2	1
7	14	18	-8	23	17	6	-2	6	-2
8	-9	15	18	-2	18	7	0	5	-1
9	-5	-4	36	-13	19	0	-2	0	0
10	36	-12	4	29	20	7	1	4	7

После нахождения t_1, t_2, t_3, t_4 необходимо проверить правильность решения, рассчитав невязки для каждого уравнения.

Требования к отчёту

Отчет о лабораторной работе должен включать цель работы, реферат первого раздела и протокол действий, самостоятельно выполненных студентом на компьютере. Рабочий документ выполнения лабораторной работы должен быть сохранён на ПЭВМ в личной папке студента.

При сдаче лабораторной работы студент должен ответить на следующие контрольные вопросы:

1. Для чего предназначен метод прогонки?
2. Что представляет собой трёхдиагональная матрица?
3. Что такое прямой и обратный хода прогонки?
4. Напишите формулу расчёта прогоночных коэффициентов.
5. Напишите формулу нахождения неизвестных.
6. Напишите условие устойчивости метода прогонки.
7. Что означает термин ‘‘экономичность расчёта’’?
8. Почему метод прогонки экономичнее других методов решения систем линейных уравнений?

$ORIGIN := 1$

Исходные данные:

$$M := \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad N := 4$$

$A := M^{\langle 1 \rangle} \quad B := M^{\langle 2 \rangle} \quad C := M^{\langle 3 \rangle} \quad D := M^{\langle 4 \rangle}$

Прямой ход прогонки:

$$\alpha_1 := \frac{-C_1}{B_1} \qquad \beta_1 := \frac{D_1}{B_1}$$

$$i := 2..N \qquad \alpha_i := \frac{-C_i}{B_i + A_i \cdot \alpha_{i-1}} \qquad \beta_i := \frac{-A_i \cdot \beta_{i-1} + D_i}{B_i + A_i \cdot \alpha_{i-1}}$$

Обратный ход прогонки:

$$t_N := \beta_N \qquad i := N-1..1 \qquad t_i := \alpha_i \cdot t_{i+1} + \beta_i$$

Результат:

$$t^T = \begin{bmatrix} -3.5 & 5 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

Для проверки правильности решения рассчитываем невязку для каждого уравнения системы (8), подставляя в них найденные значения t

$$\varepsilon_1 := B_1 \cdot t_1 + C_1 \cdot t_2 - D_1 \qquad \varepsilon_1 = 0$$
$$\varepsilon_2 := A_2 \cdot t_1 + B_2 \cdot t_2 + C_2 \cdot t_3 - D_2 \qquad \varepsilon_2 = 0$$
$$\varepsilon_3 := A_3 \cdot t_2 + B_3 \cdot t_3 + C_3 \cdot t_4 - D_3 \qquad \varepsilon_3 = 0$$
$$\varepsilon_4 := A_4 \cdot t_3 + B_4 \cdot t_4 - D_4 \qquad \varepsilon_4 = 0$$

Рис. 11.1. Решение системы уравнений методом прогонки

П р и л о ж е н и е

Команды меню MathCAD 7 Pro

(В квадратных скобках указаны комбинации клавиш, которые соответствуют рассматриваемым командам).

Меню File

Меню содержит ряд операций, разбитых на группы.

В первую группу входят следующие операции работы с документами:

New [Ctrl + N] – открыть окно для нового документа;

Open... [Ctrl + 0] – открыть существующий документ;

Close [Ctrl + F4] – закрыть документ.

Вторая группа команд служит для сохранения документов:

Save [F6] – сохранить на диске текущий документ;

Save as... [Ctrl + S] – сохранить на диске текущий документ под (Сохранить как) новым именем.

Третья группа команд предназначена для работы с телекоммуникационными средствами:

Collaboratory... – установить связь с фирмой – разработчиком системы для обеспечения совместной работы над документами;

Internet Setup... – установить модемную связь с Internet;

Send...– отправить документ по электронной почте или по Internet.

Четвертая группа команд служит для подготовки к печати и самой печати документов:

Page Setup... – установить левое и правое поля на странице, установить размер страницы;

Print Preview...– предварительно просмотреть документ перед печатью;

Print... [Ctrl + 0] – распечатать документ.

Последняя из этих операций позволяет распечатать весь текст документа с комментариями, математическими формулами, таблицами и графиками.

Пятая группа представлена командой **Exit [Alt + F4]** – выйти из среды MathCAD.

Перед этой командой имеется перечень последних файлов, с которыми работала система, что позволяет загрузить любой из них без предварительного поиска.

Меню Edit

Undo [Alt + BkSp] – отменить последнюю операцию редактирования;

Redo – повторить последнюю операцию редактирования;

Cut [Ctrl + X] – переместить выделенный объект в буфер обмена;

Copy [Ctrl + C] – скопировать выделенный объект в буфер обмена;

Paste [Ctrl + V] – вставить содержимое из буфера обмена в документ;

Paste Special... – вставить содержимое из буфера обмена в различном формате (в формате **MathCAD** или **BITMAP**, например);

Delete [Ctrl + D] – стирание выделенных объектов;

Select All – выделение всех объектов документа;

Find... [Ctrl + F5] – найти заданную текстовую или математическую строку;

Replace... [Shift + F5] – найти и заменить математическую или текстовую строку;

Go to Page... – расположить начало указанной страницы в начале рабочего документа **MathCAD**;

Check Speling... проверка орфографии (для англоязычных документов);

Links... – задание связи с документом;

Object – редактирование вставленного в документ объекта.

<u>Меню View</u>

Math Pallete – убирает или восстанавливает панель вывода математических символов.

Tool Bar – убирает или восстанавливает панель инструментов;

Format Bar – убирает или восстанавливает панель форматирования;

Regions – выделяет все рабочие области и обеспечивает закраску промежутков между ними серым цветом. Сами блоки при этом выделены белым фоном;

Zoom – изменяет масштаб изображения документа;

Refresh – уничтожает следы от объектов документа, если они возникают при работе;

Animation – анимация (или оживление) графиков;

Playback – просмотр любого видеофайла с расширением **avi**.

<u>Меню Insert</u>

Graph – вставка шаблонов графики;

Matrix... [Ctrl + M] – вставка шаблонов матриц и векторов;

Function... [Ctrl + F] – вставка шаблонов встроенных функций;

Unit... [Ctrl + U] – вставка единиц измерений размерных величин;

Picture [Ctrl + T] – вставка шаблона импортируемого рисунка;

Math Region – вставка в текстовую область шаблона математической области;

Text Region – вставка текстовой области;

Page Break – вставка линии разрыва страницы;

Hyperlink – вставка гиперссылки;

Reference... – вставка обращения к заданному файлу активизацией кнопки;

Component... – вставка других компонентов системы;

Object... – вставка объекта с установлением динамической связи с порождающим его приложением.

<u>Меню Format</u>

Number... – установка формата чисел;

Equation... – установка формата выражений;

Text... – установка формата текста;

Paragraph... – установка формата параграфа;

Style... – установка формата стиля;

Properties... – установка свойств;

Graph – установка формата графиков;

Color – установка цвета;

Separate Region – разделение областей (блоков);

Align Region – задание расположения областей вывода символьных вычислений;

Lock Region – создание закрытых (недоступных для редактирования) областей;

Header/Footer... – создание колонтитулов

<u>Меню Math</u>

Calculate [F9] – провести расчёты по формулам, расположенным ниже/правее курсора;

Calculate worksheet – провести расчёт по всем формулам документа;

Automatic calculation – включение/выключение автоматического режима вычислений;

Optimization – переключение режима оптимизации численных расчётов;

Options – меню опций.

<u>Меню Symbolic</u>

Символьные операции разбиты на <u>пять характерных разделов.</u>

Операции с выделенными выражениями

Evaluate – преобразовать выражение с выбором вида преобразований из подменю:

> **Symbolically [Shift + F9]** – выполнить символьное вычисление выражения
>
> **Floating Point Evaluation…** – выполнить арифметические операции в выражении с результатом в форме числа с плавающей точкой
>
> **Complex** – выполнить преобразование с представлением результата в комплексном виде

Simplify – упростить выделенное выражение с выполнением таких операций, как сокращение подобных слагаемых, приведение к общему знаменателю, использование основных тригонометрических тождеств и т. д.;

Expand – раскрыть выражение, например, было (X+Y) (X–Y) получаем $X^2 – Y^2$;

Factor – разложить число или выражение на множители, например $X^2 – Y^2$ даст (X+Y) (X–Y);

Collect – собрать слагаемые, подобные выделенному выражению, которое может быть отдельной переменной или функцией со своим аргументом (результатом будет выражение, полиномиальное относительно выбранного выражения);

Polynomial Coefficients – найти коэффициенты полинома по заданной переменной, приближающего выражение, в котором эта переменная использована.

I. Операции с выделенными переменными

Операции с выделенными переменными объединены в подменю **Variable…**:

Solve – найти значения выделенной переменной, при которых содержащее её выражение становится равным нулю (решить уравнение или неравенство относительно выделенной переменной);

Substitute – заменить указанную переменную содержимым буфера обмена;

Differentiate – дифференцировать все выражение, содержащее выделенную переменную, по отношению к этой переменной (остальные переменные рассматриваются как константы);

Integrate – интегрировать выражение, содержащее выделенную переменную, по этой переменной;

Expand to Series... – найти несколько членов разложения выражения в ряд Тейлора относительно выделенной переменной;

Convert to Partial Fraction – разложить на элементарные дроби выражение, которое рассматривается как рациональная дробь относительно выделенной переменной.

II. Операции с выделенными матрицами

Операции с выделенными матрицами представлены в подменю **Matrix**:

Transpose – получить транспонированную матрицу;

Invert – создать обратную матрицу;

Determinant – вычислить детерминант (определитель) матрицы.

III. Операции преобразования

Раздел операций преобразования, представлен в подменю **Transform**:

Fourier Transform – выполнить прямое преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

Inverse Fourier Transform – выполнить обратное преобразование Фурье относительно выделенной переменной;

Laplace Transform – выполнить прямое преобразование Лапласа относительно выделенной переменной;

Inverse Laplace Transform – выполнить обратное преобразование Лапласа относительно выделенной переменной;

Z Transform – выполнить прямое Z-преобразование выражения относительно выделенной переменной;

Inverse Z Transform – выполнить обратное Z-преобразование относительно выделенной переменной;

Стиль эволюции

К стилю эволюции относится одна операция:

Evaluation Style... – задать вывод результата символьной операции под основным выражением, рядом с ним или вместо него.

<u>Меню Window</u>

Cascade – расположить окна документов друг под другом так, чтобы были видны заголовки;

Tile Horizontal – расположить окна документов горизонтально;

Tile Vertical – расположить окна документов вертикально;

Arrange Icons – упорядочить размещение пиктограмм рабочих документов вдоль нижней границы окна приложения.

Кроме этих операций в подменю позиции **Window** имеется список окон, которые в данный момент открыты.

<u>Меню Help</u>

Mathcad Help [Fl] – вызов справочной системы **MathCAD**;

Resource Center – вызов центра информационных ресурсов;

Tip of the Day – вызов оперативной подсказки;

Open Book... – вызов окна оперативной справки;

Using Help – вызов информации о справочной системе;

About Matchcad... – краткая информация о системе **MathCAD**.

Литература

1. В.Ф. Очков **MatCAD 7.0 PRO** для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1998.
2. А.И. Плис, Н.А. Сливина. **MathCAD**. Математический практикум для экономистов и инженеров. – М.: Финансы и статистика, 1999.
3. А.А. Самарский Введение в численные методы. – М.: Высшая школа, 1987.
4. Ю.П. Боглаев Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1990.

Содержание