Классическая электродинамика

О.В. Жиров

Глава 1
Микроскопические уравнения Максвелла.

1.1 Введение .

1.1.1 Электромагнитные заряды и токи.

Дискретность заряда, заряды эллементарных частиц. Макроскопические заряженные тела и идеализация непрерывного распределения зарядов.

$$\boxed{\text{Элементарный заряд } \; e = 4.8\cdot 10^{-10}\text{CGSE} = 1.6\cdot 10^{-19}\text{кулон}}$$

Макроскопическая *плотность заряда* определяется как предел отношения заряда Δq к занимаемому им малому объему ΔV: $\rho = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$; при этом предполагается, что заряд Δq все же достаточно велик по сравнению с элементарным зарядом e. Электрический ток возникает при движении зарядов, и макроскопическая плотность тока определяется как $\vec{j} = \rho\vec{v}$. Для точечного заряда плотность заряда

$$\rho(\vec{r}\,) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0),$$

и микроскопическая плотность заряда для макроскопического тела

$$\rho(\vec{r}\,) = \sum_i e_i\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_i),$$

1.1.2 Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности) .

Полный заряд сохраняется: изменение заряда внутри некоторого объема V ограниченного замкнутой поверхностью S равно потоку заряда $\vec{j}$ через эту поверхность:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}V\rho(\vec{r}\,,t) = \int_V \mathrm{d}V\,\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}\,,t) = -\oint_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \mathrm{d}V\,\mathrm{div}\,\vec{j}\,,$$

что дает *интегральную*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q + \oint_S \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

и *дифференциальную* форму закона сохранения заряда

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}\,,t) + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0. \tag{1.1}$$

1.1.3 Взаимодействие зарядов и токов.

Взаимодействие двух точечных зарядов q_1 и q_2 расположенных на расстоянии $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ друг от друга описывается законом Кулона:

$$\vec{F}_{12} = k_1 q_1 q_2\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Магнитостатическое взаимодействие двух токов (рамок 1 и 2 с токами I_1 и I_2)

$$\vec{F}_{12} = k_2\, I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{[\mathrm{d}l_2 \times [\mathrm{d}l_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)]]}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \tag{1.2}$$

Коэффициенты пропорциональности k_1 и k_2 определяются выбором системы единиц (см. ФЛФ, т.5, стр.70).

СИ		**CGSE**	
	Основные	*единицы*	
длина	*м* (метр)	длина	*см* (сантиметр)
масса	*кг* (килограмм)	масса	*г* (грамм)
время	*сек*	время	*сек*
ток	*а* (ампер)		
	Производные	*единицы*	
сила	$н = \frac{кг \cdot м}{сек^2}$ (ньютон)	дина	$\frac{г \cdot см}{сек^2}$
заряд	$кул = а \cdot сек$ (кулон)		

Таблица 1.1. Основные и производные единицы

В системе СИ основной единицей является не единица заряда, а единица тока, что отражает прикладной характер системы СИ: точное измерение тока осуществить намного легче, чем заряда.

Определение: Два линейных параллельных проводника, по которым текут токи силой 1*а* и которые расположены на расстоянии 1*м* друг от друга, взаимодействуют с силой $2 \cdot 10^{-7}$ ньютона на каждый метр длины.

Значения коэффициентов k_1 и k_2:

в **СИ**	в **CGSE**
$k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $k_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}$ где ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума: $\varepsilon_0 = 10^7/4\pi c^2 \; \frac{а^2 \cdot сек^4}{кг \cdot м^3} = 10^7/4\pi c^2 \; \frac{ф}{м}$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \; \frac{кг\ м^2}{а^2 \cdot сек} = 4\pi \cdot 10^{-7} \; \frac{гн}{м}$ Единица индуктивности – *генри* $1гн = \frac{кг\ м^2}{а^2 \cdot сек^2}$ Единица емкости – *фарада* $1ф = \frac{а^2 \cdot сек^4}{кг \cdot м^2}$ Единица напряженности электрического поля 1 *н/кул* = 1 *в/м* Единица индукции магнитного поля 1 т (тесла) ($\approx 10^4$ *гаусс*) ***В частности***, $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \; \frac{м^2}{сек^2}$	$k_1 = 1$, или $\varepsilon_0 = 1/4\pi$ $k_2 = 1/c^2$

Задача 1.1. Оценить силу магнитного притяжения двух проводов в шнуре электроутюга, полагая ток $I \sim 3а$, расстояние между жилами $r \sim 2мм$. Ответ: $F \sim 0.45н/м$.

Задача 1.2. Оценить то же самое за счет *электростатического* взаимодействия.
Ответ: $F \sim 4 \cdot 10^{-5} н/м$.

Задача 1.3. Выразить в вольтах единицу напряжения CGSE.

1.2 Электростатика: электрическое поле.

Понятие электрического поля. Рассмотрим пробный заряд $e \to 0$ (настолько малый, что не влияет на движение других частиц) и, измеряя в каждой точке пространства действующую на него со стороны электрического поля силу $\vec{F}(\vec{r})$, определим векторную функцию

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \lim_{e\to 0} \frac{1}{e}\vec{F}(\vec{r}\,),$$

называемою *напряженностью* электрического поля.

Пример: для точечного заряда q исходя из закона Кулона имеем

$$\begin{aligned} \vec{F} \quad &= \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eq\vec{R}}{R^3} \\ &\Longrightarrow \ \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{R}}{R^3} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Принцип суперпозиции. Электрическое поле для системы зарядов равно *векторной* сумме полей от каждого заряда:

$$\vec{E}_{(\sum q_i)}(\vec{r}\,) = \sum_i E_{q_i}(\vec{r}\,). \tag{1.4}$$

Это очень нетривиальное свойство называется принципом суперпозиции. Фактически оно означает, что любое электростатическое поле может быть "набрано" как сумма полей точечных зарядов; причем вклад в поле от каждого точечного заряда не зависит от наличия других зарядов и дается выражением (1.3).

Силовые линии. Для описания векторного электрического поля удобно ввести т.н. *силовые линии*, чтобы их плотность $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}S}$ в любой точке равнялась нормальной к площадке $\mathrm{d}s$ компоненте напряженности электрического поля:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}S} = E_n, \qquad \text{или} \qquad \mathrm{d}w = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

Потоком $\mathrm{d}w$ электрического поля называется количество силовых линий, пересекающих элемент поверхности $\mathrm{d}S$. Для точечного заряда поток

$$\mathrm{d}w = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{R}\,\mathrm{d}\vec{S}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\,\mathrm{d}S_R}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{d}\Omega \tag{1.5}$$

как и полный поток w ($w = q/\varepsilon_0$ в системе СИ или $w = 4\pi q$ в системе CGSE) не зависит от R. Это обстоятельство дает для системы зарядов *теорему Гаусса*, связывающую поток электрического поля через замкнутую поверхность S с полным зарядом внутри объема V, ограниченного поверхностью S:

$$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{1.6}$$

(интегральная форма). В дифференциальной форме это уравнение имеет вид

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Свойства силовых линий:

1. Начинаются и кончаются только на зарядах.
2. Не пересекаются.
3. Не замкнуты в случае *статических* полей (см. ниже).

Задача 1.4. Используя принцип суперпозиции и результат (1.5), доказать теорему Гаусса (1.6).

Задача 1.5. Найти поле над бесконечной однородно заряженной плоскостью, σ – плотность заряда на единицу поверхности. Ответ: $\vec{E} = \sigma/8\pi\varepsilon_0$.

Задача 1.6. Найти поле однородно заряженной нити с линейной плотностью заряда σ.

Ответ: $\vec{E}=\sigma\vec{R}/2\varepsilon_0 R^2$.

Задача 1.7. Вычислить $\mathrm{div}\,(\vec{R}/R^3)$.

Работа в электростатическом поле. Работа, совершаемая электрическим полем над зарядом e вдоль пути l равна

$$\mathcal{A}=e\int_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

Поле называется *потенциальным*, если работа $\mathcal{A}$ не зависит от пути l и определяется лишь начальным и конечным положением заряда e. Это эквивалентно утверждению, что работа в потенциальном поле по *любому замкнутому* пути равна нулю:

$$\mathcal{A}=\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}=0.$$

Теорема Стокса позволяет получить дифференциальную форму этого уравнения:

$$\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}=\int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}=0 \implies \mathrm{rot}\,\vec{E}=0.$$

Потенциальность эктрического поля точечного заряда легко проверить прямым вычислением:

Задача 1.8. Доказать, что электрическое поле точечного заряда (1.3) потенциально: $\mathrm{rot}\,(\vec{R}/R^3)=0$.

Используя принцип суперпозиции, легко показать, что электростатическое поле потенциально *всегда*.

Итак, уравнения электростатики в дифференциальной и интегральной форме принимают вид:

$\mathrm{div}\,\vec{E}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho$	$\oint_S \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\,\mathrm{d}V$
$\mathrm{rot}\,\vec{E}=0$	$\oint_l \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}=0$

1.3 Электростатика: скалярный потенциал.

В случае потенциального электрического поля можно ввести скалярную функцию – *скалярный потенциал* φ таким образом, что

$$\vec{E}\equiv-\nabla\varphi\equiv-\mathrm{grad}\,\varphi.$$

В механике аналогичным образом вводится потенциальная энергия $U(\vec{r}\,)$ — скалярная функция координат, градиент которой описывает силовое потенциальное поле $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$.

Основные свойства электростатического потенциала φ:

1. Принцип суперпозиции:

$$\varphi_{\sum q}(\vec{r}\,)=\sum_q \varphi_q(\vec{r}\,)$$

потенциал системы зарядов равен сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов.

2. Условие потенциальности электрического поля выполняется автоматически: $\mathrm{rot}\,\vec{E}=\nabla\times(-\nabla\varphi)\equiv0$.

3. Теорема Гаусса приводит к уравнению Пуассона:

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\nabla(-\nabla\varphi)\equiv-\Delta\varphi=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \implies \boxed{\Delta\varphi=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho} \tag{1.7}$$

Таким образом, вместо двух уравнений Максвелла (одного скалярного и одного векторного) мы получаем одно скалярное уравнение (1.7).

Используя принцип суперпозиции и граничное условие на бесконечности: $\vec{E}(\infty) = 0$, легко получить общее решение

$$\varphi(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}V' \tag{1.8}$$

Откуда для электрического поля имеем аналогично

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(r')(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}V' \tag{1.9}$$

Вводя функцию Грина

$$G(r,r') \equiv \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{1.10}$$

можно выразить потенциал через распределение плотности заряда как

$$\varphi(\vec{r}\,) = \int G(r,r')\rho(r')\mathrm{d}V'$$

Пример 1.1. Для точечного заряда $\rho(r) = e\delta(r)$, а потенциал $\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$, откуда следует полезное математическое тождество: $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r)$.

Задача 1.9. Найти поле равномерно заряженного шара.

Задача 1.10. Найти поле равномерно заряженного толстого слоя толщиной d.

1.4 Магнитостатика: магнитное поле.

Изучая взаимодействие двух токов (1.2), один из которых – *пробный контур с током*[1.1], можно ввести понятие силового магнитного поля – ***магнитной индукции*** $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \frac{\left[\mathrm{d}\vec{l}\,' \times \vec{R}\right]}{R^3}, \qquad \vec{R} \equiv |\vec{r} - \vec{r}\,'| \quad \text{(в системе СИ)} \tag{1.11}$$

Тогда сила, действующая на элемент пробного тока $I_\text{п}\,\mathrm{d}\vec{l}$ равна

$$\mathrm{d}\vec{F}_\text{п} = I_\text{п}\left[\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right]$$

В системе CGSE

$$\vec{B} = \frac{1}{c} I \int_l \frac{\left[\mathrm{d}\vec{l}\,' \times \vec{R}\right]}{R^3}, \quad \text{причем} \quad \mathrm{d}\vec{F}_\text{п} = \frac{1}{c} I_\text{п}\left[\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}\right]$$

Обратим внимание на то, что определение $\vec{B}$ в CGSE отличается от определения в СИ: в частности, в CGSE поля $\vec{B}$ и $\vec{E}$ имеют *одинаковую* размерность.

Принцип суперпозиции справедлив и для магнитных полей: результирующее поле $\vec{B}$, создаваемое контуром l, равно векторной сумме полей от различных элементов $I_\text{п}\,\mathrm{d}\vec{l}$. В свою очередь, рассматривая объемный ток как сумму линейных токов, можно (1.11) обобщить и на случай объемных токов:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{\left[\vec{j}\,(r') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')\right]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}V'. \tag{1.12}$$

Здесь $\vec{j}\,(r)$ – плотность объемного тока.

1.1. Некоторое усложнение связано с отсутствием магнитных зарядов – их отсутствие не позволяет повторить *в точности* аналогичные рассуждения для электростатики.

Аналогично тому, как это было сделано для электрического поля, для магнитного поля можно ввести понятие магнитных силовых линий, направленных в каждой точке вдоль вектора $\vec{B}$, с плотностью равной $\left|\vec{B}\right|$. Так же, как и в случае электрического поля, они *непрерывны*; однако ***отсутствие в природе магнитных зарядов*** приводит к тому, что они еще и *замкнуты*:

$$\oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

или, в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Циркуляция статитеского магнитного поля, в отличии от случая статического электрического поля, при наличии тока отлична от нуля:

$$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} \equiv \int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \int_S \vec{j}\;\mathrm{d}\vec{S}$$

(в системе СИ). В дифференциальной форме это уравнение приобретает вид:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

В системе CGSE имеем, соответственно

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

Для описания магнитного поля $\vec{B}$ можно ввести т.н. *векторный* потенциал:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}\,,$$

который, хотя и является (в отличии от электростатического потенциала!) векторной функцией, с плотностью тока связан значительно более простым образом, чем магнитное поле $\vec{B}$:

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\,(r')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}V' \tag{1.13}$$

(ср. с (1.8)). Непосредственное вычисление $\operatorname{rot}\vec{A}$ дает (1.12). Так же легко убедиться, что $\vec{A}$ удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\;\vec{j}\,(r')\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\;\vec{j}\,(r')(-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')) = -\mu_0\vec{j}$$

или

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Задача 1.11. Найти вектор-потенциал $\vec{A}$ для прямолинейного проводника током I.

Задача 1.12. Найти вектор-потенциал $\vec{A}$ для кольцевого контура с током I.

Итак, в случае магнитного *статического* поля мы имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{B} &= 0\\ \operatorname{rot}\vec{B} &= \mu_0\,\vec{j}\end{aligned}$$

или, в интегральной форме

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} &= 0\\ \oint_l \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} &= \mu_0\int \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{j}\end{aligned}$$

Для перехода в этих уравнениях к системе CGSE необходимо сделать замену $\mu_0 = 4\pi/c$, $B\to B/c$.

В заключение отметим также, что в *статическом* случае из закона сохранения заряда (1.1) следует, что линии электрического тока тоже замкнуты: $\operatorname{div}\vec{j} = 0$, т.к. заряд не накапливается ($\partial\rho/\partial t{=}0$).

1.5 Поля, зависящие от времени, закон Фарадея, ток смещения .

До сих пор мы рассматривали лишь случай статических полей. Фарадей обнаружил, что переменное магнитное поле может порождать вихревое электрическое поле, циркуляция которого отлична от нуля:

$$\oint_l \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\, d\vec{S} \tag{1.14}$$

и пропорциональна изменению потока магнитного поля. В дифференциальной форме

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{1.15}$$

Другая, нетривиальная добавка к магнитному полю связана с изменением электрического поля:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0(\,\vec{j} + \vec{j}_{\text{см}}) \tag{1.16}$$

где величина $\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}(\mu_0\varepsilon_0)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ интерпретировалась как т.н. “ток смещения”.

Окончательно, полная система уравнений Максвелла принимает вид (в системе СИ):

$$\left\{\begin{array}{lcl}\operatorname{div}\vec{E} & = & \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\\ \operatorname{rot}\vec{E} & = & -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \operatorname{div}\vec{B} & = & 0\\ \operatorname{rot}\vec{B} & = & \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl}\oint\vec{E}\,d\vec{S} & = & \frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho\, dV\\ \oint\vec{E}\,d\vec{l} & = & -\frac{\partial}{\partial t}\int\vec{B}\,d\vec{S}\\ \oint\vec{B}\,d\vec{S} & = & 0\\ \oint\vec{B}\,d\vec{l} & = & \int d\vec{S}\left(\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\end{array}\right. \tag{1.17}$$

1.6 Потенциалы в случае полей, зависящих от времени.

Введем потенциалы φ и $\vec{A}$, связанные с полями $\vec{E}$ и $\vec{B}$ как

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \tag{1.18}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{1.19}$$

тогда уравнения Максвелла, не содержащие источников, выполняются автоматически:

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

в силу математических тождеств: rot grad $(...) \equiv 0$, и div rot$(...) \equiv 0$. Из оставшихся двух уравнений следует

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1.20}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} + \vec{\nabla}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \tag{1.21}$$

Эти уравнения можно упростить, используя неоднозначность потенциалов, определяемых соотношениями (1.18),(1.19): электрическое поле $\vec{E}$ и магнитное поле $\vec{B}$ остаются неизменными при преобразовании

$$\vec{A} \to \vec{A} + \operatorname{grad} f(\vec{r}\,, t) \tag{1.22}$$

$$\varphi \to \varphi - \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}\,, t) \tag{1.23}$$

Это свойство называется *калибровочной инвариантностью* уравнений электродинамики (уравнений Максвелла), а соотношения (1.22),(1.23) – калибровочными преобразованиями потенциалов. Неоднозначность в выборе потенциалов можно устранить, например, накладывая дополнительное условие, называемое *калибровочным условием Лоренца*:

$$\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0. \tag{1.24}$$

Замечание 1.2. Возможны и другие условия, наиболее популярными из которых являются:

$$\operatorname{div}\vec{A}=0 \tag{1.25}$$

(кулоновская калибровка), и

$$\varphi=0 \tag{1.26}$$

(гамильтонова калибровка).

В лоренцевской калибровке уравнения для потенциалов (1.20),(1.21) в системе СИ принимают вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=\Box\varphi = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{1.27}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A}=\Box\vec{A} = \mu_0\vec{j} \tag{1.28}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Даламбера*, а дифференциальный оператор

$$\Box\equiv\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta \tag{1.29}$$

называется *оператором Даламбера*.

Соответствующие уравнения в системе CGSE получаются заменой $\varepsilon_0\to 1/4\pi$, $\mu_0\to 4\pi/c^2$, $\vec{A}\to\vec{A}/c$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi &= 4\pi\rho\\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}\end{aligned}$$

причем φ и $\vec{A}$ в этой системе оказываются одной и той же размерности!

Глава 2
Релятивистская ковариантность классической электродинамики.

2.1 Основы специальной теории относительности.

2.1.1 Основные постулаты.

- Все инерциальные системы отсчета – движущиеся с постоянной относительной скоростью – *равноправны*.
- Существует *максимально возможная скорость* и она равна скорости света:

$$c = 2.99793 \cdot 10^8\ \text{м/сек}. \tag{2.1}$$

Принцип относительности: .
все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета

Понятие интервала. Рассмотрим два события, связанные световым сигналом и отвечающие во времени и пространстве двум точкам (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2)[2.1]. Тогда из равенства скорости света (одному и тому же универсальному значению c) во всех инерциальных системах отсчета следует, что величина

$$(s_{21})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \tag{2.2}$$

в этих системах инвариантна.

Справедливо более общее утверждение:

для *любых* двух событий (t_1, x_1, y_1, z_1) и (t_2, x_2, y_2, z_2) величина, называемая ***интервалом***, квадрат которой определяется как

$$(s_{21})^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{2.3}$$

инвариантна во всех (инерциальных) системах отсчета.

2.1.2 Геометрическая интерпертация.

Инвариантность интервала имеет простую геометрическую интерпретацию, если предположить, что временная и 3 пространственные переменные нашего мира являются компонентами 4-мерного ***псевдо****евклидового* пространства. В этом случае интервал имеет смысл расстояния между двумя точками в пространственно-временном континууме, и переход от одной инерциальной системы отсчета к другой эквивалентен *повороту* системы координат в этом пространстве – очевидно, что расстояние между точками от выбора системы координат зависеть не должно.

Каждое тело совершает в этом пространстве движение по некоторой траектории, называемой *мировой линией*. Даже *покоящееся* в некоторой системе отсчета тело *движется во времени*; очевидно, что в других системах отсчета (отвечающих повороту 4-мерной системы координат) такое движение имеет и пространственные составляющие.

В случае, когда для двух событий квадрат интервала $s_{12}^2 > 0$, возможен такой поворот системы координат, что оба события окажутся в одной и той же пространственной точке, разделенные лишь временным интервалом. В этом случае говорят, что оба события разделены *времениподобным* интервалом. Очевидно, что любые две точки, лежащие на одной мировой линии всегда разделены времениподобным интервалом – для этого, например, достаточно перейти в систему отсчета, в которой рассматриваемое тело покоится.

2.1. Например, первая точка соответствует испусканию светового сигнала, а вторая – его регистрации.

Для двух событий возможно также, что $s_{12}^2 < 0$, в этом случае, очевидно, не существует выбора (поворота) системы координат, при котором они будут разделены лишь во времени – однако возможен такой поворот, при котором они станут одновременными и будут разд- делены лишь пространственно. Такой интервал называют *пространственноподобным*. Очевидно, что такие события не могут быть причинно связанными, т.к. воздействие причины на следствие должно в таком случае передаваться с мгновенной скоростью, что противоречит основному постулату о существовании предельной скорости, равной скорости света.

2.1.3 Собственное время, парадокс близнецов.

Пусть космонавт, находящийся на космическом корабле, измеряет отрезок времени $\Delta\tau$. Интервал между началом и концом этого отрезка, равный в системе покоя корабля $(\Delta s)^2 = c^2(\Delta\tau)^2$, равен интервалу, измеренному в лабораторной системе, относительной которой корабль летит со скоростью v:

$$c^2(\Delta\tau)^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2,$$

где Δt – время, прошедшее между началом и концом измерения с точки зрения лабораторного наблюдателя, и $\Delta x = v\cdot\Delta t$ – соответствующее расстояние, пролетаемое космическим кораблем за этот период времени. Тогда $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-(\Delta x/c\cdot\Delta t)^2} = \Delta t\sqrt{1-(v/c)^2} = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta \equiv v/c$. Соответственно, в лабораторной системе

$$\Delta t = \Delta\tau\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1, \tag{2.4}$$

т.е. движущиеся часы идут медленнее. Время в системе покоя часов (т.е. в системе, где рассматриваемые события происходят *в одной и той же* пространственной точке) называется ***собственным временем***. Собственное время всегда меньше времени, прошедшего с точки зрения наблюдателя, движущегося относительно рассматриваемых событий. Это лежит в основе известного “парадокса близнецов”: близнец, путешествующий на космическом корабле с околосветовой скоростью, после возвращения окажется значительно более молодым, чем его брат, оставшийся на Земле.

Замечание. На первый взгляд, парадокс близнецов нарушает принцип эквивалентности различных систем отсчета. В действительности, принцип эквивалентности относится лишь к инерциальным системам отсчета, тогда как близнец-путешественник движется неинерциально: для того, чтобы вернуться на Землю, он должен менять и скорость, и направление своего движения.

Задача 2.1. Один близнец движется с постоянной скоростью v_1, другой покоится. Потом, через время t_0 второй начинает движение со скоростью $v_2 > v_1$. По чьим часам к моменту встречи пройдет больше времени?

2.1.4 Релятивистское сокращение длины.

Пусть линейка движется в продольном направлении (вдоль своей длины) со скоростью $v \parallel x$, и в начальный момент времени $t = 0$ ее передний конец находится в точке $x = 0$. Задний конец линейки окажется в точке $x = 0$ в момент $t = l'/v$, где l' – длина линейки, *видимая* в лабораторной системе, а соответствующий интервал между двумя событиями $s^2 = c^2t^2 = c^2{l'}^2/v^2$. В системе, движущейся вместе с линейкой (в которой линейка покоится) эти события разделены промежутком времени $\tau = l_0/v$ (l_0 – длина линейки в системе ее покоя) и пространственным промежутком l_0, что отвечает интервалу $s^2 = c^2\tau^2 - l_0^2 = l_0^2(c^2/v^2 - 1)$. Сравнивая оба интервала, имеем

$$l' = l_0\sqrt{1-(v/c)^2} = l_0/\gamma \tag{2.5}$$

2.1.5 Поворот в псевдоевклидовой плоскости (x,t). Преобразования Лоренца .

Преобразования поворота в евклидовой плоскости

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= y\cos\alpha + x\sin\alpha \end{aligned}$$

сохраняют инвариантной длину, квадрат которой определен как $r^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = r'^2$. В *псевдоевклидовой* плоскости (x,t) при преобразованиях поворота инвариантным остается интервал, квадрат которого определен как $s^2 = t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$. Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что преобразования:

$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\eta + t\,\mathrm{sh}\,\eta \tag{2.6}$$

$$t' = t\,\mathrm{ch}\,\eta + t\,\mathrm{sh}\,\eta \tag{2.7}$$

действительно оставляют интервал инвариантным.

Выясним теперь физический смысл параметра η. Пусть $x = 0$, т.е. в системе отсчета связанной с координатами x, t тело покоится в точке $x = 0$. Тогда в системе отсчета связанной с координатами x', t' имеем $x' = t\,\mathrm{sh}\,\eta$ и $t' = t\,\mathrm{ch}\,\eta$, откуда $x'/t' = \mathrm{th}\,\eta$. Другими словами, в системе x', t' тело движется с постоянной скоростью

$$v = \mathrm{th}\,\eta, \tag{2.8}$$

поскольку $x' = t'\cdot\mathrm{th}\,\eta \equiv t'\cdot v$.

Далее, выражая параметр η через скорость v, получим

$$\mathrm{ch}\,\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma, \qquad \mathrm{sh}\,\eta = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma\frac{v}{c} \tag{2.9}$$

в результате чего преобразования (2.6),(2.7) примут вид

$$x' = \frac{x+ct}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t+\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2.10}$$

В этом виде они известны как *преобразования Лоренца*, описывающие преобразования координат и времени в случае, когда одна система отсчета движется относительно другой вдоль оси x со скоростью v. Координаты y, z, перпендикулярные направлению движения остаются инвариантными.

Задача 2.2. Используя преобразования Лоренца, получить: а) релятивистское замедление времени (2.4) и б) релятивистское сокращение длины (2.5).

2.2 Ковариантная фомулировка СТО: скаляры и вектора в 4-мерном пространстве-времени Минковского.

2.2.1 Законы преобразования при поворотах.

В обычном 3-мерном пространстве геометрические объекты классифицируются по отношению к преобразованиям поворота как

a) скаляры, остающиеся неизменными при поворотах,

b) вектора A_i, преобразующиеся как соответствующие компоненты радиус-вектора x_i,

c) тензора ранга m $A_{i_1 \ldots i_m}$ преобразующиеся как произведения $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$.

Аналогично в 4-мерном пространстве-времени Минковского объекты могут быть классифицированы по отношению к преобразованиям, включающим в себя обычные повороты и преобразования Лоренца:

a) релятивистский (лоренцевский) скаляр. Примером является интервал и любая функция от него, которые инвариантны по определению;

b) релятивистский 4-вектор $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{r})$. Компоненты любого 4-вектора A^μ должны преобразовываться как компоненты 4-вектора x^μ:

$$A'^0 = \frac{A^0 + \beta A^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad A'^1 = \frac{A^1 + \beta A^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad A'^2 = A^2, \qquad A'^3 = A^3 \tag{2.11}$$

Примером 4-вектора является также 4-скорость

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}, \tag{2.12}$$

где $\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau = c\sqrt{1-\beta^2}\mathrm{d}t$. Кроме того, 4-скорость выражается через 3-скорость, как $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} = (\gamma, \gamma\frac{\vec{v}}{c})$, но преобразования Лоренца для 3-скорости – релятивистский закон сложения скоростей – выглядят несколько сложнее. Пусть космический корабль движется относительно наблюдателя со скоростью V, а $\vec{v}\,'$ – скорость тела относительно космического корабля, тогда $\vec{v}$ – "суммарная" скорость тела относительно наблюдателя

$$v_\parallel = \frac{v'_\parallel + V}{1 + (\vec{v}_\parallel\vec{V})/c^2}, \qquad \vec{v}_- = \frac{\vec{v}\,'_-\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (\vec{v}_\parallel\vec{V})/c^2} \tag{2.13}$$

Легко видеть, что она никогда не превышает скорости света.

2.2.2 Скалярное произведение 4-векторов, метрический тензор.

Обобщая определение интервала, как скалярное произведение радиус-вектора с самим собой, для двух различных 4-векторов A^μ и B^μ его следует определить как разность произведения временных компонент и скалярного произведения трехмерных векторов, отвечающих пространственным компонентам:

$$A^0B^0 - (A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3). \tag{2.14}$$

Удобно для каждого 4-вектора ввести два эквивалентных определения. Первое из них, называемое *контравариантным* (фактически оно было уже использовано выше) строится из временной A^0 и пространственных компонент $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ как

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}),$$

тогда как определение ковариантного вектора A_μ отличается знаком пространственных компонент:

$$A_\mu = (A^0, -\vec{A})$$

В обозначениях эти определения отличаются положением индекса: индекс сверху обозначает контравариантный вектор и называется контравариантным индексом, а индекс снизу обозначает ковариантный вектор и называется соответственно ковариантным. Тогда скалярное произведение (2.14) может быть записано как

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu$$

где также подразумевается суммирование по паре повторяющихся индексов: $A^\mu B_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu$.

Использование контравариантного и ковариантного метрического тензора

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

дает другой, эквивалентный способ записи скалярного произведения

$$A^\mu B_\mu = A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu g^{\mu\nu}$$

Фактически роль метрического тензора сводится к “опусканию” и “подниманию” индекса:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \,, \qquad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Задача 2.3. Показать, что для 4-скорости u^μ скалярное произведение $u^\mu u_\mu = 1$.

2.2.3 4-градиент и 4-вектор энергии-импульса.

Вектор **4-градиента** строится обычным образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \equiv \partial_\mu \,, \qquad \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \equiv \partial^\mu$$

Следует подчеркнуть, что дифференцирование по *контра*вариантному вектору дает *ко*вариантный вектор и, наоборот, дифференцирование по *ко*вариантному вектору дает *контра*вариантный вектор.

4-вектор энергии-импульса определен как

$$p^\mu = (E, c\,\vec{p}\,) \equiv (\gamma m c^2, \gamma m c\,\vec{v}\,)$$

Отметим, что хотя энергия E - скаляр по отношению к 3-мерным поворотам, по отношению к преобразованиям Лоренца она неинвариантна, т.к. является временной компонентой 4-вектора энергии-импульса.

Задача 2.4. Показать, что $p^\mu p_\mu = m c^2$.

2.3 Релятивистская ковариантность классической электродинамики.

Различные представления уравнений Максвелла (дифференциальное и интегральное) связывают между собою напряженности полей $\vec{E}$, $\vec{H}$ и порождающие их источники – плотности зарядов и токов ρ, $\vec{j}$. Однако непосредственно из этих уравнений увидеть релятивистскую ковариантность классической электродинамики непросто. Главная проблема – установить правильные преобразования соответствующих величин в зависимости от системы отсчета.

2.3.1 4-вектор тока, уравнение непрерывности.

Проще всего начать с изучения законов преобразования для источников. Пусть в покоящейся системе плотность зарядов равна ρ_0. В системе, движущейся со скоростью v, соответствующий элемент объема V_0 сокращается в продольном (вдоль скорости) направлении в γ раз: $V = V_0/\gamma$, поэтому соответствующая плотность заряда $\rho = \rho_0 \cdot \gamma$ т.к. полный заряд инвариантен: $\rho V = \rho_0 V_0$. Аналогично, для плотности тока получим $\vec{j} = \rho_0 \gamma \vec{v}$. Вспоминая, что 4-вектор скорости имеет вид $u^\mu = (c\gamma,\, v_i\gamma)$, легко сообразить, что и комбинация $j^\mu = (\rho c, \vec{j}\,)$ также является 4-вектором, т.к.

$$j^\mu = \rho_0 u^\mu \tag{2.15}$$

С учетом этого закон сохранения заряда (1.1) – уравнение непрерывности – легко записывается в ковариантной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{2.16}$$

По существу левая часть уравнения представляет собой 4-дивергенцию 4-вектора тока (2.15) – т.е. скалярное произведение 4-векторов ∂^μ и j^μ и является при этом релятивистским скаляром.

2.3.2 4-мерный вектор-потенциал A^μ.

Покажем, что комбинация

$$A^\mu = (\varphi/c, \vec{A}), \tag{2.17}$$

где φ и $\vec{A}$ скалярный и векторный потенциалы, определенные соотношениями (1.19) и (1.18), соответственно, образует 4-мерный вектор-потенциал. Действительно, определение (2.17) позволяет уравнения Даламбера для скалярного потенциала φ (1.27) и векторного потенциала $\vec{A}$ (1.28) записать в виде одного уравнения (в системе СИ)

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu \tag{2.18}$$

(где использовано $\rho/\varepsilon_0 c = \rho c/\varepsilon_0 c^2 = \mu_0 \rho c$). Оператор Даламбера в 4-мерной записи представляет собой скалярный оператор $\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu$, и действие им на A^μ может дать 4-вектор $\mu_0 j^\mu$ лишь при условии, что A^μ является 4-вектором. Уравнения Даламбера (1.27),(1.28) справедливы если на потенциалы наложено условие лоренцевской калибровки (1.24), в 4-мерных обозначениях принимающее вид равенства нулю 4-мерной дивергенции от A^μ:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \partial_\mu A^\mu = 0. \tag{2.19}$$

Калибровочные преобразования (1.22),(1.23) в этих же обозначениях принимают вид

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu f \tag{2.20}$$

2.3.3 4-мерное представление для напряженностей полей.

Поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ связаны с потенциалами φ и $\vec{A}$ как

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

или в покомпонентной записи

$$\begin{array}{ll} E_x = -\partial_x\varphi - \partial_t A_x & H_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ E_y = -\partial_y\varphi - \partial_t A_y & H_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ E_z = -\partial_z\varphi - \partial_t A_z & H_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{array} \tag{2.21}$$

Вычисляя антисимметричный тензор $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ и сравнивая его компоненты с (2.21), легко увидеть, что

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} & -\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = \qquad (2.22) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu}. \qquad (2.23) \end{aligned}$$

Тензор $F^{\mu\nu}$ называется *тензором электромагнитного поля*. Используя лоренцевскую калибровку (2.19) и уравнение Даламбера (2.18) и вычисляя 4-дивергенцию тензора $F^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu}_{\Box A^\nu} - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \Box A^\nu - \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} = \mu_0 j^\nu$$

получим уравнения Максвелла в ковариантной 4-мерной записи:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \tag{2.24}$$

Задача 2.5. Доказать, что тензор $F^{\mu\nu}$ калибровочно инвариантен.

Поскольку и левая, и правая часть уравнения (2.24) калибровочно инвариантны, это уравнение справедливо в любой калибровке, а не только в лоренцевской, в которой оно было получено.

Уравнения Максвелла (1.17) представляют собой систему из 8-ми *независимых* уравнений, тогда как в (2.24) содержится лишь 4 независимых уравнения, а именно:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Где же остальные четыре:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0?$$

Эти уравнения содержатся в *тождестве Бьянки*:

$$C^{\lambda\mu\nu} \equiv \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0. \tag{2.25}$$

Задача 2.6. Прямым вычислением доказать тождество (2.25), пользуясь определением $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Задача 2.7. Используя антисимметричность $C^{\lambda\mu\nu}$ по любой паре индексов, доказать, что тождество (2.25) представляет собой 4 независимых уравнения.

2.3.4 Преобразования Лоренца для потенциалов и полей.

Поскольку потенциалы представляют собой компоненты 4-вектора (2.17), они преобразуются стандартным образом (2.11):

$$\begin{aligned} \varphi' &= \gamma(\varphi - \vec{v}\vec{A}_\|), \\ \vec{A}'_\| &= \gamma(\vec{A}_\| - \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi), \\ \vec{A}'_- &= \vec{A}_-. \end{aligned}$$

Напряженности полей являются компонентами 4-мерного тензора второго ранга и преобразуются как произведение соответствующих компонент 4-вектора. В 3-мерной записи эти преобразования принимают вид:

$$\begin{cases} \vec{E}'_\| = \vec{E}_\|, & \vec{E}'_- = \gamma(\vec{E}_- + [\vec{v}\times\vec{B}]) \\ \vec{B}'_\| = \vec{B}_\|, & \vec{B}'_- = \gamma(\vec{B}_- - \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}]) \end{cases} \tag{2.26}$$

В нерелятивистском пределе ($v \ll c$)

$$\vec{E}'_- = \vec{E}_- + [\vec{v}\times\vec{B}], \quad \vec{B}'_- = \vec{B}_- - \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}]$$

Задача 2.8. Объяснить, почему продольные компоненты поля остаются инвариантными: $\vec{E}'_\| = \vec{E}_\|$ и $\vec{B}'_\| = \vec{B}_\|$.

2.3.5 Инварианты поля.

Используя тензор $F^{\mu\nu}$ универсальный тензор $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно построить две скалярные величины

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \mathrm{inv} \tag{2.27}$$

и

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho} = \vec{E}\vec{H} = \mathrm{inv}. \tag{2.28}$$

Являясь 4-мерными скалярами, они по отношению к преобразованиям Лоренца *инвариантны*.

Задача 2.9. Используя (2.26), явным вычислением доказать инвариантность (2.27) и (2.28).

2.3.6 Релятивистская частица в электромагнитном поле.

Физическая траектория частицы отвечает минимуму действия независимо от системы отсчета. Поэтому действие должно быть релятивистским инвариантом. Для свободной частицы единственным инвариантом, зависящим от траектории частицы является интервал, поэтому естественно ожидать, что действие

$$S=-mc^2\int \mathrm{d}s=-mc^2\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \tag{2.29}$$

откуда ***функция Лагранжа свободной частицы***

$$L_0=-mc^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{2.30}$$

Минимум действия для свободной частицы означает кратчайшее расстояние в пространстве Минковского.

Взаимодействие с электромагнитным полем дает свой вклад в действие

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{int}} &= -\int j_\mu A^\mu\,\mathrm{d}s= && (2.31)\\ &= -\int e\frac{\varphi}{c}\frac{c\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s+\int e\,\vec{A}\,\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s= && \\ &= -e\int \varphi\,\mathrm{d}t+e\int \vec{A}\,\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int L_{\mathrm{int}}\mathrm{d}t && (2.32)\end{aligned}$$

откуда

$$L_{\mathrm{int}}=-e\varphi+e\,\vec{A}\vec{v} \tag{2.33}$$

Таким образом, ***функция Лагранжа для частицы в электромагнитном поле***

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\,\vec{A}\vec{v}-e\varphi \qquad \text{(в системе СИ)} \tag{2.34}$$

или

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+e\,\vec{A}\vec{v}-e\varphi \qquad \text{(в системе CGSE)} \tag{2.35}$$

Обобщенный импульс – *канонический импульс*

$$\vec{\mathcal{P}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}=\frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\,\vec{A}=\vec{p}+e\,\vec{A} \tag{2.36}$$

где $\vec{p}=m\,\vec{v}\gamma$ “обычный” импульс. ***Гамильтониан частицы в электромагнитном поле*** строится обычным образом

$$\mathcal{H}=E=\vec{v}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+e\varphi \tag{2.37}$$

На первый взгляд, зависимость от поля выпала из гамильтониана. На самом деле гамильтониан следует выразить в естественных *канонических* переменных: $\mathcal{H}=\mathcal{H}(x,\mathcal{P})$. Сначала выразим скорость через канонический импульс $\vec{\mathcal{P}}$ и вектор-потенциал $\vec{A}$, используя (2.36):

$$\left(\vec{\mathcal{P}}-e\,\vec{A}\right)^2 = \left(\frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 \tag{2.38}$$

откуда

$$v^2 = \frac{\left(\vec{\mathcal{P}}-e\,\vec{A}\right)^2}{m^2c^2+\left(\vec{\mathcal{P}}-e\,\vec{A}\right)^2} \tag{2.39}$$

и

$$1-\frac{v^2}{c^2} \;=\; \frac{m^2c^2}{m^2c^2+\left(\vec{\mathcal{P}}-e\,\vec{A}\right)^2} \tag{2.40}$$

В результате

$$\mathcal{H}=\sqrt{m^2c^4+c^2\left(\vec{\mathcal{P}}-e\,\vec{A}\right)^2}+e\varphi \tag{2.41}$$

В нерелятивистском пределе ($\frac{v}{c}\ll 1$) в системе СИ имеем

$$\mathcal{H}=m\,c^2+\frac{1}{2}\left(\vec{\mathcal{P}}-e\,\vec{A}\right)^2+e\varphi \tag{2.42}$$

и в системе CGSE, соответственно

$$\mathcal{H}=m\,c^2+\frac{1}{2}\left(\vec{\mathcal{P}}-\frac{e}{c}\,\vec{A}\right)^2+e\varphi \tag{2.43}$$

Рассмотрим теперь уравнения движения частицы в электромагнитном поле. Уравнения Лагранжа

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\frac{\partial L}{\partial\vec{r}}, \qquad \text{где } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}\,\frac{\partial}{\partial\vec{r}} \tag{2.44}$$

дают

$$\dot{\vec{p}}+e\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+e(\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{A}=e\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{v})-e\vec{\nabla}\,\varphi, \tag{2.45}$$

откуда

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} \;&=\; -e\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-e\vec{\nabla}\varphi+e\vec{\nabla}(\vec{A}\vec{v})-e(\vec{v}\,\vec{\nabla})\vec{A}= \\
&=\; -e\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-e\vec{\nabla}\varphi+e\left[\vec{v}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\right]= \\
&=\; e\vec{E}+e\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]=\vec{F}_e.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Первое слагаемое описывает действие электрического поля $\vec{E}$ на заряд, второе – *силу Лоренца*, описывающее действие магнитного поля $\vec{B}$ на *движущийся* заряд. Изменение энергии частицы в единицу времени равно

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}_e\vec{v}=\left\{e\vec{E}+e\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]\right\}\vec{v}=e\vec{E}\vec{v}$$

т.е. работу над частицей совершает только электрическое поле $\vec{E}$, и изменение энергии от магнитного поля $\vec{B}$ не зависит.

Глава 3
Статические поля.

3.1 Условия применимости статического приближения.

Согласно СТО, скорость распространения полей конечна и не может превышать скорость света. Другими словами, изменение положения зарядов и токов скажутся на величине поля для наблюдателя, удаленного на расстояние R, через время $\tau = R/c$. Это время должно быть мало по сравнению с характерным временем движения (или колебания) зарядов внутри системы T, т.е. $\tau \ll T$. В случае, когда наблюдатель находится вблизи системы, т.е. $R \sim L$ (размеров системы), это приводит к минимальному требованию – ограничению на скорость зарядов $v/c \ll 1$. При выполнении этого условия справедливо рассмотренное ранее статическое приближение для зарядов, токов и порождаемых ими полей (см. (1.8),(1.9) и (1.13),(1.12)):

$$\begin{cases} \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \\ \varphi(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}V'\frac{\rho(r')}{R} \\ \vec{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \mathrm{d}V'\rho(r')\frac{\vec{R}}{R^3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \\ \vec{A}(r) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}\,(r')}{R} \\ B(r) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}V'\vec{j}\,(r')\frac{\vec{R}}{R^3} \end{cases} \tag{3.1}$$

т.е. с помощью статических функций Грина (1.10) поля выражаются через распределения зарядов и токов (здесь $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$).

3.2 Электрические поля на больших расстояниях, мультипольное разложения.

Рассмотрим наблюдателя, находящегося на расстоянии $R \gg L$ – характерных размеров системы зарядов. Выберем начало координат внутри системы зарядов, $\vec{r}\,'$ — радиус-вектор, указывающий на заряд, $\vec{r}$ — радиус-вектор, указывающий на наблюдателя. Поскольку $|\vec{r}\,'| \sim L \ll |\vec{r}\,| \sim R$, для (3.1) справедливо разложение

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \sum_{i=1}^{3} r_i' \frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} r_i' r_j' \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\frac{1}{r} + \ldots \tag{3.2}$$

что для скалярного потенциала дает

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q}{r} - \vec{d}\operatorname{grad}\frac{1}{r} + \frac{1}{6}Q_{ij}\frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\frac{1}{r} + \ldots\right\} \tag{3.3}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{r} = -\frac{r_i}{r^3}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j}\frac{1}{r} = \frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}$$

и

$$\begin{aligned} q &= \int \mathrm{d}V\,\rho(\vec{r}\,) \quad \text{— полный заряд системы,} \\ \vec{d} &= \int \mathrm{d}V\,\vec{r}\rho(\vec{r}\,) \text{ — электрический дипольный момент системы,} \\ Q_{ij} &= \int \mathrm{d}V\left(\frac{3r_i r_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3}\right)\rho(\vec{r}\,) \text{ — квадрупольный момент системы.} \end{aligned}$$

Электрическое поле диполя

$$\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q\vec{r}}{r^3} + \left(\frac{3\vec{r}\,(\vec{d}\vec{r}\,)}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3}\right)\right\} \tag{3.4}$$

Поле диполя спадает гораздо быстрее, чем поле заряда!

Задача 3.1. При каком условии дипольный момент не зависит от выбора начала координат?
Решение. Сдвинем начало координат на вектор $\vec{a}$, тогда дипольный момент

$$\vec{d}\,' = \int \mathrm{d}V(\vec{a} + \vec{r}\,)\rho(\vec{r}\,) = \int \mathrm{d}V\,\vec{r}\rho(\vec{r}\,) + \int \mathrm{d}V\,\vec{a}\rho(\vec{r}\,) = \vec{d} + \vec{a}\cdot q$$

Дипольный момент не зависит от выбора начала координат при условии $q = 0$.

Задача 3.2. Приведите пример диполя и квадруполя.

3.3 Магнитные поля на больших расстояниях, магнитный дипольный момент, гиромагнитный фактор .

Рассмотрим вектор-потенциал

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}\,(r')}{R} \tag{3.5}$$

на расстояниях $r \gg L$ –размера области, занимаемой токами $\vec{j}\,(r)$, где $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$. На больших расстояниях, как и в предыдущем случае справедливо разложение

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}\,'\vec{r}\,)}{r^3} + \ldots$$

Первый член разложения дает

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\int \mathrm{d}V'\,\vec{j}\,(r') = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,e\sum_i \vec{v}_i{}' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e\sum_i \vec{r}\,'_i\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{d} = 0 \end{aligned}$$

т.к. в статической системе дипольный момент системы не зависит от времени.

Второй член разложения

$$\vec{A}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}\,(r')(\vec{r}\,'\vec{r}\,)}{r^3}.$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} \vec{j}\,(r')(\vec{r}\,'\vec{r}\,) &= e\sum_i \frac{\vec{v}_i'(\vec{r}\,\vec{r}\,') - \vec{r}_i'(\vec{r}\,\vec{v}_i')}{2} + e\sum_i \frac{\vec{v}_i'(\vec{r}\,\vec{r}\,') + \vec{r}_i'(\vec{r}\,\vec{v}_i')}{2} = \\ &= e\sum_i \frac{\vec{r}\times[\vec{v}_i'\times\vec{r}_i']}{2} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e\sum_i \frac{\vec{r}_i'(\vec{r}\,\vec{r}\,')}{2}}_{=0} = \\ &= \frac{\vec{r}\times[\vec{j}\,'\times\vec{r}_i']}{2} \end{aligned}$$

Второе слагаемое обращается в нуль для статического распределения зарядов и токов. Таким образом, в рамках данного приближения

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\vec{r}\times[\vec{j}\,'\times\vec{r}_i']}{2r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\left[\vec{m}\times\nabla\frac{1}{r}\right] + \ldots\right\} \tag{3.6}$$

где

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V'\left[\vec{r}\,'\times\vec{j}\,(r')\right] \tag{3.7}$$

магнитный дипольный момент.

Соответствующее магнитное поле

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{rot}\left[\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\vec{m}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{m}\left(\nabla,\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \left(\vec{m}\,,\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\underbrace{\vec{m}\,4\pi\delta(\vec{r}\,)}_{=0\text{ на больших }\vec{r}} - \frac{1}{r^3}\left(\vec{m}\,,\vec{\nabla}\right)\vec{r} - \vec{r}\left(\vec{m}\,,\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\right) = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{m}}{r^3} - 3\frac{\vec{r}\,(\vec{m}\,,\vec{r}\,)}{r^5}\right) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Задача 3.3. Найти магнитный момент плоского контура с током I.

Решение.

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}V'\left[\vec{r}\,'\times\vec{j}\,(r')\right] = \frac{I}{2}\int\left[\vec{r}\,'\times\mathrm{d}\vec{l}\,\right] = I\cdot\vec{S}$$

Для системы точечных зарядов в системе СИ

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i e_i[\vec{r}_i\times\vec{v}_i] \tag{3.9}$$

(или $\frac{1}{2c}\sum_i e_i[\vec{r}_i\times\vec{v}_i]$ в системе CGSE). Если для всех зарядов $e_i/m_i = \mathrm{const} \equiv e/m$, и $v \ll c$, то магнитный момент системы оказывается пропорционален механическому:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{e_i}{m_i}[\vec{r}_i\times\vec{p}_i] = \frac{e}{2m}\sum_i[\vec{r}_i\times\vec{p}_i] = g\vec{M} \tag{3.10}$$

где $\vec{M}$ — механический момент импульса системы, и $g = e/2m$ – гиромагнитное соотношение (гиромагнитный фактор). Это верно также для любого тела, распределения плотности и заряда в котором совпадают.

Глава 4
Энергия поля.

4.1 Плотность энергии поля и вектор Пойтинга.

Изучим для системы зарядов и электромагнитных полей баланс энергии. Для этого рассмотрим уравнения Максвелла, описывающие взаимодействие поля с источниками:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ \operatorname{rot}\vec{B} &= \mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Умножая первое на $(-\vec{B})$, а второе – на $(\vec{E})$ и складывая, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c^2}E^2+B^2\right\}+\mu_0\cdot\left(\vec{j}\vec{E}\right)=\left(\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}\right)-\left(\vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{E}\right) \tag{4.1}$$

Покажем, что правая часть равна $\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B})$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B}) &= \varepsilon^{ijk}\nabla^i(E^jB^k)=\\ &= \varepsilon^{ijk}B^k(\nabla^iE^j)+\varepsilon^{ijk}E^j(\nabla^iB^k)=\\ &= B^k\underbrace{\varepsilon^{kij}(\nabla^iE^j)}_{\operatorname{rot}\vec{E}}-E^j\underbrace{\varepsilon^{jik}(\nabla^iB^k)}_{\operatorname{rot}\vec{B}}\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Далее, слагаемое

$$\left(\vec{j}\vec{E}\right)=\sum_i e\vec{v}_i\vec{E}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varepsilon_{\text{кин}}$$

описывает скорость изменения кинетической энергии. Интегрируя (4.1) по объему, получим

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\int\left\{\frac{1}{c^2}E^2+B^2\right\}\mathrm{d}V+\mu_0\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\varepsilon_{\text{кин}}\mathrm{d}V}_{\mathcal{E}_{\text{кин}}} &= -\int\mathrm{d}V\,\operatorname{div}(\vec{E}\times\vec{B})=\\ &= -\oint\mathrm{d}\vec{S}[\vec{E}\times\vec{B}]\end{aligned} \tag{4.2}$$

Таким образом, изменение кинетической энергии частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_{\text{кин}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{1}{2}\int\left\{\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right\}\mathrm{d}V-\oint\mathrm{d}\vec{S}\,\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] \tag{4.3}$$

складывается из изменения энергии электромагнитного поля (первое слагаемое) и потока энергии через охватывающую поверхность (второе слагаемое).

Тем самым мы установили, что поле обладает плотностью энергии

$$w_{\text{поля}}=\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right\} \tag{4.4}$$

и потоком энергии

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] \tag{4.5}$$

вектор Пойнтинга. Т.е. поле выступает как материальный объект, а не абстракция для описания дальнодействия.

4.2 Электростатическая энергия заряженной системы .

Электростатическая энергия заряженной системы можно выразить через энергию электрического поля

$$\begin{aligned} W_э &= \int \mathrm{d}V \cdot \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}V \cdot \vec{E} \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi\right) = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}V\varphi \cdot \mathrm{div}\vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}V \cdot \mathrm{div}\,(\varphi\vec{E}) = \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\varphi\cdot\rho - \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\oint \mathrm{d}\vec{S}\cdot \underbrace{\varphi\vec{E}}_{\propto r^{-3}}}_{\to 0 \text{ при } r\to\infty} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Далее, используя

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

видим, что энергия поля тождественна *потенциальной энергии* создающих поле зарядов:

$$W_э = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}V\varphi\cdot\rho = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V\,\mathrm{d}V'\frac{\rho(r)\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i>j}\frac{e_i e_j}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{4.7}$$

Задача 4.1. Найти энергию шара, равномерно заряженного по объему.
Ответ:

$$W_э = \frac{3}{5}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\,a} \tag{4.8}$$

где q – заряд шара, a – радиус шара.

Задача 4.2. Найти энергию равномерно заряженной сферы радиуса a.
Ответ:

$$W_э = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\,a} \tag{4.9}$$

4.3 Электростатическая собственная энергия точечного заряда. Классический радиус электрона.

Допустим, вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение, и электрон представляет собой сферу радиуса r_e, тогда

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2} = 2.8\cdot 10^{-13}\text{см} \tag{4.10}$$

Это принципиальная граница классической электродинамики. На самом деле значительно раньше проявляются квантовые эффекты, которые становятся существенными начиная с расстояний порядка комптоновской длины волны

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} = 3.9\cdot 10^{-11}\text{см} \tag{4.11}$$

С учетом квантовых эффектов

$$W_э/mc^2 = \frac{3\alpha}{2\pi}\,\ln\frac{\lambda_c}{a} \tag{4.12}$$

где постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c \approx 1/137$. Тем самым, квантовая электродинамика непротиворечива до расстояний

$$r_{кв} = \lambda_c \mathrm{e}^{-2\pi/3\alpha} = \lambda_c \mathrm{e}^{-287} = 8.9\cdot 10^{-136}\text{см}$$

На самом деле на расстояниях $\lambda_{\text{КХД}} \sim 10^{-13}$см начинают сказываться эффекты сильных взаимодействий, а на на расстояниях $\lambda_{\text{weak}} \sim 10^{-16}$см начинает работать объединенная теория электрослабых взаимодействий и, наконец, на расстояниях $\lambda_{\text{грав}} \sim 10^{-33}$см вступает в игру квантовый характер пространства-времени.

4.4 Взаимодействие двух заряженных подсистем.

Взаимодействие двух заряженных подсистем может рассматриваться как результат "интерференции" электростатического поля. Аналогично (4.6)

$$\begin{aligned} W_{\text{э}}^{(12)} &= \int \mathrm{d}V \cdot \varepsilon_0 \vec{E}^{(1)} \vec{E}^{(2)} = \\ &= \int \mathrm{d}V \cdot \rho^{(1)} \varphi^{(2)} = \int \mathrm{d}V \cdot \rho^{(2)} \varphi^{(1)} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}V \mathrm{d}V' \frac{\rho^{(1)}(r)\rho^{(2)}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \end{aligned} \tag{4.13}$$

она тождественна энергии кулоновского взаимодействия заряженных подсистем. Аналогично для системы во внешнем поле

$$W_{\text{э}}^{\text{ext}} = \int \mathrm{d}V \cdot \rho(r) \varphi^{\text{ext}}(r) \tag{4.14}$$

В случае точечного заряда, расположенного в точке $\vec{r}$ потенциальная энергия

$$W_{\text{э}}^{\text{ext}} = e\varphi^{\text{ext}}(r) = U(r)$$

Для электрического диполя во внешнем поле

$$W_{\text{э}}^{\text{ext}} = -\vec{E}^{\text{ext}}(r)\vec{d} = U(r) \tag{4.15}$$

Сила и момент сил, действующих на диполь

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W_{\text{э}}^{\text{ext}} = (\vec{d}\,\vec{\nabla})\vec{E}^{\text{ext}}(r) \tag{4.16}$$

$$\vec{K} = [\vec{d} \times \vec{E}^{\text{ext}}(r)] \tag{4.17}$$

4.5 Магнитная энергия в статическом случае.

$$\begin{aligned} W_M &= \int \mathrm{d}V \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathrm{d}V \, \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} = \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \left(\vec{A}\vec{j}\right) + \underbrace{\frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \operatorname{div}[\vec{A} \times \vec{B}]}_{\to 0} = \\ &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \, \vec{A}\vec{j} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Используя $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, получим что энергия магнтного поля сводится к энергии взамодействия токов

$$W_M = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}V \, \vec{A}\vec{j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V \mathrm{d}V' \frac{\vec{j}\,(r)\vec{j}\,(r')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{4.19}$$

Взаимодействие двух подсистем токов

$$W_M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_1 \int_2 \mathrm{d}V_1 \mathrm{d}V_2 \frac{\vec{j}\,(r_1)\vec{j}\,(r_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \int_1 \mathrm{d}V \, \vec{A}_1 \vec{j}_2 = \int_2 \mathrm{d}V \, \vec{A}_2 \vec{j}_1 \tag{4.20}$$

Энергия системы токов во внешнем поле

$$W_M^{\text{ext}} = \int \mathrm{d}V \, \vec{A}^{\text{ext}}(r) \vec{j}\,(r) = U(r) \tag{4.21}$$

Энергия магнитного диполя

$$W_M^{\rm ext} = -\vec{B}^{\rm ext}(r)\vec{m} = U(r) \tag{4.22}$$

Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном магнитном поле

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = (\vec{m}\vec{\nabla})\vec{B} \tag{4.23}$$

а момент сил

$$\vec{K} = [\vec{m} \times \vec{B}] \tag{4.24}$$

Глава 5

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Выше мы получили, что плотность энергии электромагнитного поля выражается через напряженности $\vec{E}$ и магнитную индукцию $\vec{B}$ как

$$w=\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right\} \tag{5.1}$$

а поток энергии (вектор Пойнтинга)

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\left\{\vec{E}\times\vec{B}\right\} \tag{5.2}$$

В отличии от плотности заряда и тока, образующих 4-вектор $j^\mu = (\mathrm{c}c\rho,\ \vec{j}\,)$, плотность энергии и ее поток 4-вектора не образуют, т.к. энергия – в отличии от заряда – релятивистским скаляром не является.

Согласно (5.1),(5.2) плотность и поток энергии поля квадратичны по полю, поэтому естественно ожидать, что тензор энергии-импульса формируется как

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{\mu_0}\left(aF^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}F^{\sigma\nu}+bg^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}\right) \tag{5.3}$$

Выпишем покомпонентно

$$F^{\mu\rho}g_{\rho\sigma}F^{\sigma\nu}=\begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\vec{E}^2 & \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_x & \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_y & \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_z \\ \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_x & \frac{1}{c^2}E_x^2-B_z^2-B_y^2 & \frac{E_xE_y}{c^2}+B_xB_y & \frac{E_xE_z}{c^2}+B_xB_z \\ \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_y & \frac{E_xE_y}{c^2}+B_xB_y & \frac{1}{c^2}E_y^2-B_z^2-B_x^2 & \frac{E_yE_z}{c^2}+B_yB_z \\ \frac{1}{c}[\vec{E}\times\vec{B}]_z & \frac{E_xE_z}{c^2}+B_xB_z & \frac{E_yE_z}{c^2}+B_yB_z & \frac{1}{c^2}E_z^2-B_y^2-B_x^2 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

и $F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho} = -\,2\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2-\vec{B}^2\right)$. Требование, чтобы плотность энергии T^{00} совпадала с (5.1), дает $a=1, b=1/4$, откуда окончательно

$$T^{\mu\nu}=\left(\begin{array}{c|ccc} w & \frac{1}{c}S_x & \frac{1}{c}S_y & \frac{1}{c}S_z \\ \hline \frac{1}{c}S_x & & & \\ \frac{1}{c}S_y & & T^{ik} & \\ \frac{1}{c}S_z & & & \end{array}\right) \tag{5.5}$$

где 3-мерный тензор натяжений

$$T^{ik}=\\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{(E_x^2-E_y^2-E_z^2)}{c^2}+(B_x^2-B_z^2-B_y^2) & \frac{E_xE_y}{c^2}+B_xB_y & \frac{E_xE_z}{c^2}+B_xB_z \\ \frac{E_xE_z}{c^2}+B_xB_z & \frac{(E_x^2-E_y^2-E_z^2)}{c^2}+(B_x^2-B_z^2-B_y^2) & \frac{E_yE_z}{c^2}+B_yB_z \\ \frac{E_xE_z}{c^2}+B_xB_z & \frac{E_yE_z}{c^2}+B_yB_z & \frac{(E_x^2-E_y^2-E_z^2)}{c^2}+(B_x^2-B_z^2-B_y^2) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Закон сохранения энергии при этом принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} = \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} = -\vec{j}\vec{E} = -\vec{f}\vec{v} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial t} \tag{5.7}$$

где ϵ – плотность энергии частиц. В интегральной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \oint \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \tag{5.8}$$

Другими словами, сумма энергии частиц $\mathcal{E} = \int_V \epsilon \mathrm{d}v$ и энергии поля $W = \int_V w \mathrm{d}v$ сохраняется, если полный поток энергии через охватывающую поверхность равен нулю: $\oint \vec{S}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0$. Если размер области $R \to \infty$, площадь поверхности $\propto R^2$ и полный поток стремится к нулю при условии, что вектор Пойнтинга $|\vec{S}\,|$ убывает быстрее, чем R^{-2}. В случае, когда $|\vec{S}\,| \propto R^{-2}$, поток энергии распространяется сколь угодно далеко, и мы имеем дело с *излучением* электромагнитной энергии.

Закон сохранения импульса для электромагнитного поля

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}S^i + \frac{\partial}{\partial x^i}T^{ik}}_{\frac{\partial}{\partial x^\mu}T^{i\mu}} = -f^i = -\frac{\partial p^i}{\partial t} \tag{5.9}$$

где $\vec{p}$ плотность импульса частиц, а $\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \frac{1}{c^2\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] = \varepsilon_0[\vec{E}\times\vec{B}]$ – плотность импульса поля. Баланс импульса можно увидеть и непосредственно из уравнений Максвелла. Запишем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\vec{g} &= \varepsilon_0[\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}] + \varepsilon_0[\vec{E}\times\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}] = \\ &= -c^2\mu_0\varepsilon_0[\vec{j}\times\vec{B}] + c^2\varepsilon_0[\operatorname{rot}\vec{B}\times\vec{B}] - \varepsilon_0[\vec{E}\times\operatorname{rot}\vec{E}]\end{aligned}$$

где использованы уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$. Далее, используя тождество $\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{lmk} = \delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{lj}$, можно преобразовать

$$\begin{aligned}[\vec{E}\times\operatorname{rot}\vec{E}]^i &= \varepsilon^{ijk}E^j(\operatorname{rot}\vec{E})^k = \varepsilon^{ijk}E^j\varepsilon^{klm}\partial^l E^m = \\ &= E^j\partial^i E^j - (E^j\partial^j)E^i = \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{E})^2 - (\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E} + \vec{E}\underbrace{(\operatorname{div}\vec{E})}_{\frac{1}{\varepsilon_0}\rho} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{E})^2 - (\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E} + \frac{\vec{E}}{\varepsilon_0}\rho\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}[\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{B}] &= \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{B})^2 - (\vec{\nabla}\vec{B})\vec{B} + \vec{B}\underbrace{(\operatorname{div}\vec{B})}_{=0} = \\ &= \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{B})^2 - (\vec{\nabla}\vec{B})\vec{B}\end{aligned} \tag{5.11}$$

В итоге получаем

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\vec{g} + \rho\Big(\vec{E} + [\vec{v}\times\vec{B}]\Big)\right\}^i = -\nabla^i\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0\vec{E}^{\,2} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2}\right\} + \varepsilon_0\nabla^k(E^iE^k) + \frac{1}{\mu_0}\nabla^k(B^iB^k) \tag{5.12}$$

Правая часть представляет собой полную производную и при интегровании по объему сводится к интегралу от тензора натяжений по охватывающей объем поверхности: $\oint \mathrm{d}s^k T^{ik}$. При стремлении размеров области к бесконечности, при достаточно быстром убывании полей она обратится в ноль, что означает сохранения суммарного импульса электромагнитного поля и взаимодействующих с ним частиц.

Глава 6
Электромагнитные волны.

Рассмотрим уравнения Максвелла в пустоте в отсутствии источников (или когда источникм находятся на бесконечности). В этом случае нетривиальные решения возникают для полей, зависящих от времени: $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\neq 0$, $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\neq 0$. В этом случае уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E} &= 0,\\
\operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\vec{B} &= 0,\\
\operatorname{rot}\vec{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},
\end{aligned}$$

где $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

Отметим, что уравнения симметричны относительно замены $E\longleftrightarrow iBc$, т.е. магнитное и электрическое поле входят в них равноправным образом! Эта симметрия отсутствует, однако, на уровне потенциалов.

6.1 Волновые уравнения.

Подстановкой одного уравнения в другое нетрудно получить:

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\Longrightarrow\Delta\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0, \tag{6.1}$$

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\vec{B}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\Longrightarrow\Delta\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0, \tag{6.2}$$

где использовано $\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\vec{X}=-\Delta\vec{X}+\vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{X})$, и $\operatorname{div}\vec{E}=\operatorname{div}\vec{B}=0$. Аналогичные уравнения можно получить и для потенциалов:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{E} &= \operatorname{div}\left(-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=-\Delta\varphi+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{A}\right)=0\\
-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} &= -\Delta\vec{A}-\vec{\nabla}(\operatorname{div}\vec{A})=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\\
&\Rightarrow\ -\Delta\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\vec{\nabla}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{A}\right).
\end{aligned}$$

Если использовать калибровку Лоренца $\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{A}=0$, то имеем

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi = 0, \tag{6.3}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\Delta\vec{A} = 0 \tag{6.4}$$

волновые уравнения для потенциалов.

6.2 Решение волновых уравнений. Избыточность решений.

Частным решением волновых уравнений являются т.н. *плоские волны*

$$\varphi(\vec{r}\,,t) \;=\; \varphi(t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}), \tag{6.5}$$

$$\vec{A}(\vec{r}\,,t) \;=\; \vec{A}(t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}), \tag{6.6}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения волны. Аналогичные решения справедливы и для полей $\vec{E}\,,\vec{B}$.

На первый взгляд решение содержит 4 произвольных функции. на самом деле степень произвола значительно меньше.

Пусть $\vec{n}$ параллельно оси x, и пусть $\varphi=\varphi(t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c})\neq 0$, тогда из калибровочного условия Лоренца:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\varphi'=-\frac{\partial A_x}{\partial x}=cA_x' \Longrightarrow A_x=\frac{\varphi}{c} \tag{6.7}$$

Легко показать, что вклад продольной компоненты $A_\parallel\equiv A_x$ в поля равен нулю:

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}_x=0;\;\; \vec{E}_\parallel=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial A_\parallel}{\partial t}=0.$$

Итак, в нашей калибровке можно без потери общности положить

$$\varphi\equiv 0,\;\; A_\parallel=0; \tag{6.8}$$

остается лишь $\vec{A}_-\neq 0$. Равенство нулю продольных компонент $E_\parallel=B_\parallel=0$ следует также из уравнений $\mathrm{div}\,\vec{E}=0$, $\mathrm{div}\,\vec{B}=0$.

Окончательно, в общем случае решения в виде плоской волны можно представить в виде

$$\vec{A} \;=\; \vec{A}_-, \tag{6.9}$$

$$\vec{E} \;=\; -\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}, \quad \text{где} \;\; \tau=t-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c}, \tag{6.10}$$

$$\vec{B} \;=\; -\frac{1}{c}\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\right]=\frac{1}{c}\left[\vec{n}\times\vec{E}\right]. \tag{6.11}$$

Можно также записать

$$\vec{E}=\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\right]. \tag{6.12}$$

Легко видеть, что плоские волны поперечны:

$$\vec{n}\vec{E}=\vec{n}\vec{B}=\vec{E}\vec{B}=0. \tag{6.13}$$

Плотность энергии в плоской волне

$$w=\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_0\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right\}=\varepsilon_0\vec{E}^2=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 \tag{6.14}$$

т.к. $\sqrt{\varepsilon_0}E=B/\sqrt{\mu_0}$. Очевидно также, что плотность потока энергии

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\left[\vec{E}\times\vec{B}\right]=\vec{n}cw, \tag{6.15}$$

т.е. электромагнитная энергия в плоской волне распространяется со скоростью света.

6.3 Сферические волны.

Для точечного источника, расположенного в начале координат, решение для потенциалов

$$\varphi(\vec{r}\,,t) \;=\; \frac{1}{r}f(t-\frac{r}{c}) \tag{6.16}$$

$$\vec{A}(\vec{r}\,,t) \;=\; \frac{1}{r}\vec{a}\,(t-\frac{r}{c}) \tag{6.17}$$

описывает расходящиеся сферические волны. Для напряженностей полей, аналогично случаю плоской волны, имеем

$$\vec{E} \;=\; \frac{1}{r}\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{a}}{\partial\tau}\right]\right] \tag{6.18}$$

$$\vec{B} \;=\; -\frac{1}{c}\frac{1}{r}\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{a}}{\partial\tau}\right] \tag{6.19}$$

где $\tau = t - r/c$.

6.4 Монохроматические плоские и сферические волны.

Пусть зависимость полей от времени и координат имеет вид

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,,t) \;=\; \vec{E}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}\,-\omega t)}, \tag{6.20}$$

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,,t) \;=\; \vec{B}_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}\,-\omega t)}, \tag{6.21}$$

(где $\vec{E}_0 = c[\vec{n}\times\vec{B}_0]$). Это решение описывает монохроматическую плоскую волну с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$, $k = \omega/c$, или $\vec{k} = \vec{n}k$. Длина волны $\lambda = 2\pi/k$, а период $T = 2\pi/\omega$.

Аналогичное решение для сферической волны

$$\vec{E}\,(\vec{r}\,,t) \;=\; \vec{e}_0\,\frac{1}{r}\mathrm{e}^{i(k\,r-\omega t)}, \tag{6.22}$$

$$\vec{B}\,(\vec{r}\,,t) \;=\; \vec{b}_0\,\frac{1}{r}\mathrm{e}^{i(k\,r-\omega t)}. \tag{6.23}$$

Комплексные вектора $\vec{E}_0, \vec{e}_0$ и $\vec{B}_0, \vec{b}_0$ описывают амплитуду $|E_0|$ и фазу φ волны:

$$\vec{E}_0 = |E_0|\cdot \mathrm{e}^{i\varphi}$$

Волновое уравнение второго порядка, и два линейно независимых решения описываются как мнимая и действительная часть данного решения (еще одно следствие линейности уравнений Максвелла!). В квадратичных величинах (плотность энергии, поток энергии) необходимо квадрат модуля умножать на дополнительный фактор $\frac{1}{2}$.

Вектора $\vec{E}_0$, $\vec{e}_0$ и $\vec{B}_0$, $\vec{b}_0$ лежат в *двумерной* плоскости, перпендикулярной направлению равпространения волны. Выберем в качестве базиса два вектора $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, так, что $\vec{e}_1$ $-\vec{n}$ и $\vec{e}_2 = [\vec{e}_1\times\vec{n}]$. Пусть $\vec{E}_0 = \alpha_1\vec{e}_1\mathrm{e}^{i\varphi_1} + \alpha_2\vec{e}_2\mathrm{e}^{i\varphi_2}$, где $\alpha_{1,2}$ и $\varphi_{1,2}$ – вещественные числа.

Тогда,

а) при $\varphi_1 = \varphi_2$ Re $\vec{E}\,(t)$ колеблется вдоль некоторого направления – случай линейной поляризации;

б) при $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$ Re $\vec{E}\,(t)$ колеблется по эллипсу – случай эллиптической поляризации.

6.5 Волновые пакеты. Фазовая и групповая скорость.

Рассмотрим для простоты одномерный волновой пакет, т.е. собранный из плоских монохроматических волн, распространяющихся в одном направлении

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, g(k) \mathrm{e}^{i(k\,x-\omega(k)t)} \tag{6.24}$$

В частности, в 3-мерном пространстве

$$\varphi(\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,g(k)\mathrm{e}^{i(k\xi-\omega t)},$$

где $\xi=\vec{n}\vec{r}$. Пусть амплитуда $g(k)\neq 0$ в узкой области вблизи $k=k_0$. Покажем, что огибающая пакета распространяется с т.н. *групповой скоростью*

$$v_{\text{гр}}=\left(\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}\right)_{k=k_0}, \tag{6.25}$$

т.е.

$$\varphi(x,t)=G(x-v_{\text{гр}}t)\cdot\mathrm{e}^{i(k_0x-\omega_0t)} \tag{6.26}$$

где $\omega_0=\omega(k_0)$.

Действительно, разлагая вблизи $k=k_0$

$$kx-\omega(k)t\approx(k_0x-\omega(k_0)t)+(k-k_0)\cdot\left[x-\left(\frac{\partial\omega(k)}{\partial k}\right)_{k_0}\cdot t\right]+\ldots$$

и подставляя в (6.24), получим

$$\varphi(x,t)\;=\;\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k\,g(k)\mathrm{e}^{i(k-k_0)\cdot(x-v_{\text{гр}}t)}\right\}}_{G(x-v_{\text{гр}}t)}\cdot\mathrm{e}^{i(k_0x-\omega_0t)},$$

что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что групповая скорость отличается от *фазовой скорости*

$$v_{\Phi}=\frac{\omega}{k} \tag{6.27}$$

которая описывает скорость распространения фронта постоянной фазы $(kx-\omega(k)t)=\text{const}$. Для света в вакууме $v_{\Phi}=v_{\text{гр}}=c$.

Задача 6.1. Найти фазовую и групповую скорости для электромагнитной волны в волноводе сечением $l_x\times l_y$.

6.6 Эффект Допплера.

Распространение монохроматической волны описывается формулой

$$\varphi\propto\exp\left[i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\right],$$

где $|\vec{k}|=\omega/c$. Фаза волны

$$\theta\equiv\vec{k}\vec{r}-\omega t=-k^{\mu}x_{\mu}$$

является релятивистским скаляром, и поскольку $x^{\mu}=(ct,\,\vec{r})$ – 4-вектор, 4-компонентный сомножитель $k^{\mu}=(\omega/c,\,\vec{k})$ также образует 4-вектор. Применяя к нему преобразования Лоренца, получим

$$\vec{k}_{\parallel}'=\gamma\cdot\left(\vec{k}_{\parallel}-\vec{v}\frac{\omega}{c^2}\right) \tag{6.28}$$

$$\vec{k}_{-}'=\vec{k}_{-} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned}\omega'&=\gamma\cdot\left(\omega-\vec{k}\vec{v}\right)=\\&=\gamma\cdot\left(\omega-\frac{\omega}{c}v\cos\theta\right)=\gamma\omega\cdot\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\end{aligned} \tag{6.30}$$

Пусть источник волны с частотой ω_0 покоится в системе (x') (т.е. $\omega'\equiv\omega_0$), тогда в системе отсчета наблюдателя (x) получим преобразованную частоту

$$\omega=\frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\,\omega_0, \tag{6.31}$$

(здесь угол прихода волны θ в системе отсчета *наблюдателя*). В нерелятивистском пределе $\beta \equiv v/c \ll 1$ эффект Допплера принимает вид

$$\omega = (1 + \beta\cos\theta)\omega_0.$$

В поперечном направлении $\theta = \pi/2$ нерелятивистский эффект Допплера отсутствует, а точная формула (6.31) дает

$$\omega = \sqrt{1-\beta^2}\,\omega_0 = \omega_0/\gamma, \tag{6.32}$$

отражая простой факт *замедления времени* в движущейся релятивистской системе отсчета.

Рассмотрим теперь преобразование угла распространения волны. Пусть источник в системе (x') излучает под углом θ'; найдем угол, под которым распространяется волна в системе отсчета наблюдателя (x). Для этого поделим уравнение (6.29) на уравнение (6.28):

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{1}{\gamma}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \beta}. \tag{6.33}$$

Передняя полусфера в системе источника (x') $0 < \theta' \leqslant \pi/2$ отвечает в системе наблюдателя

$$1 \geqslant \cos\theta \geqslant \beta. \tag{6.34}$$

причем угол в системе источника $\theta' = \pi/2$ отвечает в системе наблюдателя $\cos\theta - \beta = 0$. В ультрарелятивистском пределе $\gamma \gg 1$, $\beta \to 1$, разлагая $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, имеем

$$\cos\theta - \beta \approx 1 - \theta^2/2 - \beta = (1-\beta) - \theta^2/2 = 0$$

откуда

$$\theta^2 = 2(1-\beta) \approx (1+\beta)(1-\beta) = 1/\gamma^2.$$

Таким образом, передняя полусфера в *системе источника* в ультрарелятивистском случае сжимается с точки зрения наблюдателя в узкий конус $\theta \lesssim 1/\gamma \ll 1$.

Задача 6.2. Как искажается карта звездного неба для космонавта, двигающегося с ультрарелятивистской скоростью, $\gamma \gg 1$?

Глава 7
Запаздывающие потенциалы и поля.

7.1 Поле равномерно движущегося заряда.

Пусть точечный заряд e движется в *лабораторной* системе (x) (системе наблюдателя) со скоростью $\vec{v}$ паралельно оси x. В *собственной* системе отсчета (x') заряд покоится в начале системы кординат $x'=y'=z'=0$, и соответствующее поле заряда

$$\varphi' = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R'}; \quad \vec{A}\,' = 0. \tag{7.1}$$

Пусть также в момент $t=0$ начала обеих систем координат совпадают.

Используя преобразования Лоренца для потенциалов

$$\varphi = \gamma\cdot(\varphi' + vA'_x), \qquad A_x = \gamma\cdot(A'_x + \frac{v}{c^2}\,\varphi'),$$

в лабораторной системе системе получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R'\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{R'}, \\ A_x &= \frac{v}{c^2}\,\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R'\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma\frac{\mu_0}{4\pi}\,v_x\,\frac{e}{R'}, \end{aligned}$$

где $R' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ – расстояние до наблюдателя в системе покоя заряда. Учитывая преобразования

$$x' = \gamma\cdot(x - vt),\; y' = y,\; z' = z,$$

выразим R' через лабораторные координаты наблюдателя x, y, z:

$$R' = \gamma\sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)} = \gamma R^* \tag{7.2}$$

$$R^* = \sqrt{(x-vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}, \tag{7.3}$$

$$\beta \equiv v/c,$$

что позволяет потенциалы записать в виде, напоминающем соответствующие результаты в нерелятивистском пределе

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{R^*},\;\; \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\;\vec{v}\;\frac{e}{R^*}. \tag{7.4}$$

“Эффективное расстояние” R^* выражается также через угол между $\vec{R}$ и $\vec{v}$ как

$$R^* = R\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta} \tag{7.5}$$

Аналогичным образом, записывая в системе покоя заряда выражения для полей

$$\vec{E}\,' = \frac{e\,\vec{R}\,'}{4\pi\varepsilon_0 R'^3}; \quad \vec{B}\,' = 0,$$

и используя релятивистские преобразования полей

$$\begin{aligned} &\vec{E}_\parallel = \vec{E}'_\parallel;\;\; \vec{E}_- = \gamma(\vec{E}'_- - [\vec{v}\times\vec{B}\,']) = \gamma\vec{E}'_-, \\ &\vec{B}_\parallel = \vec{B}'_\parallel;\;\; \vec{B}_- = \gamma(\vec{B}'_- + \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}\,']) = \gamma\frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}\,'] = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}] \end{aligned} \tag{7.6}$$

в лабораторной системе имеем

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ex'}{4\pi\varepsilon_0 R'^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\gamma^3 {R^*}^3}\gamma\cdot(x-vt) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\cdot(x-vt)}{\gamma^2 {R^*}^3}, \\ \vec{E}_- &= \gamma\vec{E}'_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\gamma\frac{e\,\vec{r}_-}{R'^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\vec{r}_-}{\gamma^2 {R^*}^3} \end{aligned}$$

Объединяя эти формулы, получим

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(1-\beta^2)\frac{e\vec{R}}{{R^*}^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\vec{R}\,(1-\beta^2)}{R^3(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}} \tag{7.7}$$

и, в соответствии с (7.6)

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{E}]. \tag{7.8}$$

Напомним, что радиус-вектор $\vec{R} = (x-vt, y, z) = \vec{r} - \vec{r}_e(t)$, где $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{r}_e = (vt, 0, 0)$ – положение в лабораторной системе наблюдателя и точечного заряда, соответственно.

7.2 Решение уравнений Максвелла с заданными источниками, учет запаздывания.

В лоренцевской калибровке

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{7.9}$$

потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению с правой частью:

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho \tag{7.10}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \tag{7.11}$$

Для решения этих уравнений полезно перейти к спектральному представлению

$$\begin{aligned} \varphi(r,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\varphi_\omega(r), \qquad \rho(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\rho_\omega(r), \\ \vec{A}(r,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\vec{A}_\omega(r), \qquad \vec{j}(r,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ \mathrm{e}^{-i\omega t}\vec{j}_\omega(r), \end{aligned}$$

в котором уравнения (7.9),(7.10),(7.11) принимают вид

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi_\omega - k^2\varphi_\omega &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_\omega, \\ \nabla^2\vec{A}_\omega - k^2\vec{A}_\omega &= -\mu_0\vec{j}_\omega, \\ \operatorname{div}\vec{A}_\omega - \frac{ik}{c}\varphi_\omega &= 0. \end{aligned}$$

Ввиду линейности решения этих уравнений могут быть получены методом функции Грина:

$$\varphi_\omega(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\, G_\omega(\vec{r}-\vec{r}\,')\rho_\omega(\vec{r}\,') \tag{7.12}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\mu_0\int \mathrm{d}V'\, G_\omega(\vec{r}-\vec{r}\,')\vec{j}_\omega(\vec{r}\,') \tag{7.13}$$

где функция Грина $G_\omega(\vec{r}-\vec{r}\,')$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 G_\omega(\vec{R}) + k^2 G_\omega(\vec{R}) = \delta(\vec{R}). \tag{7.14}$$

Переход к импульсному представлению дает

$$G_\omega(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k'\ \mathrm{e}^{i\vec{k}'\vec{R}}G_\omega(k') \tag{7.15}$$

$$G_\omega(k') = \frac{1}{k^2 - {k'}^2} \tag{7.16}$$

"Запаздывающая" функция Грина дает решения в виде расходящихся волн:

$$G^{\rm ret}_\omega(\vec R) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k'\,\mathrm{e}^{i\vec k\,'\vec R}\frac{1}{k^2-k'^2+i\varepsilon\frac{\omega}{c}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{ikR\frac{\omega}{|\omega|}}}{R} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}$$

Фактически она описывает решение для единичного заряда, умноженное на фазовый множитель $\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}$, описывающий набег фазы при распространении волны на расстоянии R, из точки испускания в точку наблюдения. Именно этот набег фазы отличает от статических решений (1.8) соответствующее решение для запаздывающих потенциалов в спектральном представлении:

$$\varphi_\omega(\vec r\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\frac{\rho_\omega(\vec r\,')}{R} \tag{7.17}$$

$$\vec A_\omega(\vec r\,) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\frac{\vec j_\omega(\vec r\,')}{R} \tag{7.18}$$

Переходя от спектрального к временному представлению, получим запазывающие потенциалы

$$\varphi(\vec r\,,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\rho(\vec r\,',t-R/c)}{R} \tag{7.19}$$

$$\vec A(\vec r\,,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\frac{\vec j\,(\vec r\,',t-R/c)}{R} \tag{7.20}$$

в правую часть которых явным образом вошло время распространения волны от источника до наблюдателя, равное R/c.

7.3 Поля произвольно движущегося точечного заряда.

7.3.1 Потенциалы Лиенара-Вихерта.

Рассмотрим случай произвольно движущегося точечного заряда

$$\rho(r,t) = e\delta(\vec r - \vec r_0(t));\quad \vec j\,(r,t) = e\,\vec v\,(t)\delta(\vec r - \vec r_0(t));\quad (\,\vec v\,(t)\equiv \mathrm{d}\vec r_0(t)/\mathrm{d}t) \tag{7.21}$$

В спектральном представлении потенциалы получаются подстановкой плотности заряда и тока точечного источника в (7.17),(7.18)

$$\begin{aligned}\varphi_\omega(\vec r\,) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}V'\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\,\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\;e\delta(\vec r - \vec r_0(\tau)) = \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\frac{1}{R(\tau)}\,\mathrm{e}^{i(\omega\tau+\frac{\omega}{c}R(\tau))},\\ \vec A_\omega(\vec r\,) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R}\,\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}\;e\vec v\,\delta(\vec r - \vec r_0(\tau)) = \\ &= \frac{\mu_0\,e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\frac{\vec v\,(\tau)}{R(\tau)}\,\mathrm{e}^{i(\omega\tau+\frac{\omega}{c}R(\tau))}.\end{aligned}$$

Потенциалы во временном представлении получаются с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec r\,,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\varphi_\omega(\vec r\,) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\frac{1}{R(\tau)}\,\mathrm{e}^{i(\omega\tau+\frac{\omega}{c}R(\tau))} = \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\frac{1}{R(\tau)}\delta(\tau - t + \frac{R(\tau)}{c}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e}{R(\tau)}\,\frac{1}{\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\tau + R(\tau)/c)\right|} = \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{R(\tau)(1-\vec n\vec v\,/c)},\end{aligned} \tag{7.22}$$

где использовано
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}R(\tau) \equiv \frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)|}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\vec{r}-\vec{r}_0(\tau)) = -\vec{n}\vec{v}$$
Аналогично,
$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\,\vec{v}}{R(\tau)(1-\vec{n}\vec{v}/c)} = \frac{\vec{v}}{c^2}\varphi\end{aligned} \tag{7.23}$$
В правой части (7.22) и (7.23) зависящие от времени величины берутся в момент времени τ, определяемый из уравнения
$$t-\tau = R(\tau)/c \tag{7.24}$$
Полученные выражения (7.22) и (7.23) называются *потенциалами Лиенара-Вихерта*.

7.3.2 Поля точечного заряда.

Напряженности полей могут быть вычислены непосредственно из потенциалов (7.22) и (7.23), однако при вычислении производных необходимо учесть, что потенциалы в момент времени t на самом деле выражены через величины, заданные в момент времени τ:
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{1}{(1-\vec{n}\vec{v}/c)}\,\frac{\partial}{\partial\tau} \\ \nabla|_{t=\mathrm{const}} &= \nabla|_{\tau=\mathrm{const}} + (\nabla\tau)\,\frac{\partial}{\partial\tau} = \\ &= \nabla|_{\tau=\mathrm{const}} - \frac{\vec{n}}{c\cdot(1-\vec{n}\vec{v}/c)}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\end{aligned}$$
Вычисления дают
$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{(1-\vec{n}\vec{v}/c)^3}\,\frac{\vec{n}-\vec{v}/c}{R^2} + \\ &+ \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{c^2(1-\vec{n}\vec{v}/c)^3}\,\frac{[\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{v}/c)\times\vec{a}]]}{R},\end{aligned} \tag{7.25}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}] \tag{7.26}$$
Напомним, что положение, скорость и ускорение в этих формулах берутся в момент времени $\tau = t - R(\tau)/c$, где $R(\tau)/c$ – время, необходимое для распространения поля от источника до наблюдателя.

Поле распадается на два слагаемых: первое зависит от координаты заряда $\vec{r}_0$ и его скорости $\vec{v}$ и убывает с расстоянием $\propto R^{-2}$, второе же зависит еще и от ускорения $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$, но убывает с расстоянием как $\propto R^{-1}$. Первое слагаемое доминирует в области вблизи движущегося заряда, называемой *квазистатической зоной*, второе – в области на больших расстояниях, называемой *волновой зоной*.

7.3.2.1 Поля в квазистатической зоне, связь с полем равномерно движущегося заряда.

Основной вклад в квазистатической зоне дает слагаемое
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{(1-\vec{n}\vec{v}/c)^3}\,\frac{\vec{n}-\vec{v}/c}{R^2}\bigg|_{\tau=t-R(\tau)/c}, \tag{7.27}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}].$$
Итак, в квазистатической зоне поля не зависят от ускорения и спадают $\propto R^{-2}$.

Поле в точке наблюдения $\vec{r}$ в момент времени t определяется, согласно (7.27), положением заряда $\vec{r}_0$ и его скоростью $\vec{v}$ в момент времени $\tau = t - R(\tau)/c$. Введем радиус-вектор $\tilde{\vec{R}}$ описывающий "эффективное положение" заряда, в котором заряд оказался бы в момент времени t, если, начиная с момента τ, он продолжал бы двигаться с постоянной скоростью $\vec{v} = \vec{v}(\tau)$:

$$\tilde{\vec{R}} = \vec{r} - [\vec{r}_0(\tau) + (t-\tau)\vec{v}] = \underbrace{\vec{r} - \vec{r}_0(\tau)}_{\vec{R}(\tau)} - \underbrace{(t-\tau)}_{R(\tau)/c}\vec{v} = R(\tau)\cdot\left(\vec{n} - \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

Выразим поля в квазистатической зоне через "эффективное положение" заряда

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\tilde{\vec{n}}}{\tilde{R}^2}\frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\tilde{\theta}\right)^{3/2}}, \tag{7.28}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\cdot[\vec{v}\times\tilde{\vec{n}}]}{\tilde{R}^2}\frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\tilde{\theta}\right)^{3/2}} = \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}]. \tag{7.29}$$

Эти выражения по виду совпадают с результатами (7.7),(7.8) для заряда, движущегося с постоянной скоростью.

В нерелятивистском пределе ($v/c \ll 1$)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\tilde{\vec{n}}}{\tilde{R}^2}, \tag{7.30}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\cdot[\vec{v}\times\tilde{\vec{n}}]}{\tilde{R}^2}, \tag{7.31}$$

электрическое поле сферически симметрично, а магнитное поле мало: $c|\vec{B}|/|\vec{E}| = v/c \ll 1$.

В ультрарелятивистском случае ($v/c \to 1$) поля велики в узкой области $\Delta\tilde{\theta} \sim 1/\gamma$ вблизи плоскости, перпендикулярной скорости частицы и проходящей через ее эффективное положение в момент t.

Квазистатическое поле перемещается вместе с зарядом, не отрываясь от него, и ***не дает*** *вклада в излучение.*

7.3.2.2 Поле в волновой зоне, излучение.

На достаточно больших расстояниях поля определяются вторым слагаемым в (7.25):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{c^2(1 - \vec{n}\vec{v}/c)^3}\frac{[\vec{n}\times[(\vec{n} - \vec{v}/c)\times\vec{a}]]}{R},$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c}[\vec{n}\times\vec{E}].$$

и описывают расходящиеся сферические волны: поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ убывают пропорционально R^{-1}, а полный поток энергии $\propto 4\pi R^2\cdot\frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] \to \mathrm{const}$.

Согласно (6.17), (6.18) для сферической волны поля могут быть выражены также и через производную вектор-потенциала (7.23) по времени

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]\right] = \frac{1}{1 - \vec{n}\vec{v}/c}\left[\vec{n}\times\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\right]\right],$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c}\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right] = \frac{1}{1 - \vec{n}\vec{v}/c}\left[\vec{n}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}\right].$$

Интенсивность излучения (поток энергии, измеряемый наблюдателем) в заданный телесный угол равна

$$\mathrm{d}I(\theta, \varphi) = c\varepsilon_0 E^2\cdot R^2\mathrm{d}\Omega = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\vec{n}\times[(\vec{n} - \vec{v}/c)\times\vec{a}]]^2}{c^3(1 - \vec{n}\vec{v}/c)^6}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{7.32}$$

Изменение энергии частицы W в единицу времени:

$$-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\cdot\mathrm{d}I(\theta,\varphi)=(1-\vec{n}\vec{v}/c)\mathrm{d}I(\theta,\varphi)=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\vec{n}\times[(\vec{n}-\vec{v}/c)\times\vec{a}]]^2}{c^3(1-\vec{n}\vec{v}/c)^5}\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{7.33}$$

Интегрирование по всем направлениям дает

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2-\left[\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{a}\right]^2}{c^3(1-\frac{v^2}{c^2})^3} \tag{7.34}$$

Глава 8
Излучение электромагнитных волн.

8.1 Характер излучения в нерелятивистском и ультрарелятивистском случаях, угловое распределение.

В ***нерелятивисткгом пределе*** выражение (7.33) для излучаемой мощности дает

$$-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\tau}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\vec{n}\times\vec{a}]^2}{c^3}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}\,]^2}{c^3}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{8.1}$$

Мы видим, что в нерелятивистском приближении излучение точечного заряда носит *дипольный* характер.

Угловое распределение зависит от конкретной зависимости $\vec{d}\,(t)$. В частности, пусть зависимость $\vec{d}\,(t)=\vec{d}_0\cos\omega_0 t$, и пусть $\vec{d}_0\|z$, тогда интенсивность излучения

$$\mathrm{d}I(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4|d_0|^2}{c^3}\cos^2\omega_0 t\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{8.2}$$

Задача 8.1. Пусть дипольный момент d вращается в плоскости xy, с частотой ω_0. Найти распределение интенсивности по углам, а также полную интенсивность излучения.

Полная мощность дипольного излучения дается интегрированием по углам:

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3}=\frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ddot{\vec{d}}^{\,2}}{c^3} \tag{8.3}$$

В ***ультрарелятивистском пределе*** основная мощность излучения сосредоточена в узком конусе $\Delta\theta\sim 1/\gamma$.

Если $\vec{a}\,\|\vec{v}$, то

$$-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\tau}\;=\;\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}\,]^2}{c^3(1-\vec{n}\vec{v}/c)^5}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{8.4}$$

а полная мощность излучения

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}\;=\;\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3(1-v^2/c^2)^3}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\vec{d}}\,|^2}{c^3(1-v^2/c^2)^3} \tag{8.5}$$

Если же $\vec{a}-\vec{v}$ (пусть $\vec{v}\,\|z$, $\vec{a}\,\|x$)

$$-\frac{\mathrm{d}^2W}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\tau}\;=\;\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3}\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{8.6}$$

и полная мощность излучения в этом случае

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}\;=\;\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a^2}{c^3(1-v^2/c^2)^2} \tag{8.7}$$

(обратим внимание, что при том же ускорении a мощность излучения в этом случае в γ раз меньше!).

8.2 Излучение при движении в ускорителях и накопителях.

Ускорение частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле равно

$$\vec{a} \;=\; \frac{1}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\vec{F}^{\,e}-\frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{v}\vec{F}^{\,e}\right)\right\} \tag{8.8}$$

где

$$\vec{F}^{\,e}=e\left(\vec{E}^{\,e}+\left[\vec{v}\times\vec{B}^{\,e}\right]\right) \tag{8.9}$$

Подстановка ускорения в (7.34) дает полную мощность потерь на излучение

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{F}^{\,e2}-\frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\vec{F}^{\,e}\right)^2}{m^2c^3(1-v^2/c^2)}. \tag{8.10}$$

Удобно этот результат выразить через энергию и импульс частицы

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{m^4c^7}\left\{\vec{F}^{\,e2}W^2-c^2\left(\vec{p}\vec{F}^{\,e}\right)^2\right\} \tag{8.11}$$

Весьма важным является факт, что излучение быстро падает с ростом массы частицы: при той же самой энергии частиц потери электронов на излучение оказываются в $\sim 10^9$ раз больше[8.1], чем протонов!

8.2.1 Потери в линейных ускорителях.

В линейных ускорителях основным является ускоряющее электрическое поле:

$$\vec{E}^{\,e}\|\vec{p}\,,\quad \vec{B}^{\,e}=0. \tag{8.12}$$

Мощность потерь

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{E}^{e\,2}}{m^2c^3} \tag{8.13}$$

в этом случае *не зависит* от энергии частицы W. Максимальная энергия, приобретаемая частицей $W_{\max}\approx eE^eL$, где L – длина, на которой действует ускоряющее поле. Полная потеря энергии за все время ускорения $-\Delta W\sim-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{L}{c}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{E}^{e\,2}}{m^2c^3}\,\frac{L}{c}=\frac{2}{3}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{W_{\max}^2}{m^2c^4L}$. Ускорение становится неэффективным при $-\Delta W\sim W_{\max}$, откуда следует, что длина ускорителя, необходимая для ускорения частицы до энергии $W_{\max}$:

$$L\sim\frac{2}{3}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{W_{\max}}{m^2c^4} \tag{8.14}$$

растет с $W_{\max}$ линейно.

8.2.2 Потери в циклических ускорителях, синхротронное излучение.

В циклическом ускорителе (накопителе) электрическое поле отсутствует $\vec{E}^e=0$, и движение по замкнутой орбите обеспечивается постоянным по времени магнитным полем $\vec{B}^e{-}\vec{p}$. Соответствующая мощность потерь на излучение, называемое в этом случае *синхротронным*

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p^2B^{e\,2}}{m^2c^3} \tag{8.15}$$

в отличии от потерь в линейном ускорителе (8.13) растет пропорционально квадрату импульса частицы. В ультрарелятивистском случае $p^2\to W^2/c^2$, и

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{B^{e\,2}W^2}{m^2c^5}. \tag{8.16}$$

8.1. для циклических ускорителей.

Частота обращения и радиус орбиты связаны с магнитным полем как

$$\omega_{\text{обр}} = eB^e c^2/W\,, \quad R_{\text{обр}} = W/eB^e c; \tag{8.17}$$

а поле, отвечающее заданному радиусу

$$eB^e = W/cR_{\text{обр}}.$$

В результате при фиксированном радиусе накопительного кольца $R_{\text{обр}}$ мощность синхротронного излучения растет с энергией как

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{W^4}{m^4c^7R_{\text{обр}}^2} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2c}{4\pi\varepsilon_0 R_{\text{обр}}}\,\gamma^4 \tag{8.18}$$

Потери *за один оборот* составляют

$$-\Delta W = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 R_{\text{обр}}}\,\gamma^4 \tag{8.19}$$

Использование циклических ускорителей становится бессмысленным, если потери энергии за оборот сопоставимы с полной энергией частицы: $-\Delta W \sim W$, соответственно, требуемый минимальный радиус ускорителя

$$R_{\text{обр}} \gtrsim \frac{e^2}{3\varepsilon_0 mc^2}\,\gamma^3 = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 m^4c^8}W^3 \tag{8.20}$$

растет как куб энергии ускоряемых частиц!

8.3 Тормозное излучение при рассеянии.

Пусть частица рассеивается на некотором рассеивающем центре, расположенном в начале координат $\vec{r} = 0$. Предположим также, что размеры области рассеяния малы, и изменение импульса частицы $\vec{p}_1 \to \vec{p}_2$ происходит быстро. Для простоты мы будем считать это изменение мгновенным.

Ниже нас будет интересовать спектральный состав излучения. Энергия, излученная в телесный угол $\mathrm{d}\Omega$, может быть вычислена через электрическое поле $\vec{E}(t)$ движущегося заряда на больших расстояниях (*в волновой зоне*), как

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, c\varepsilon_0 E^2(t)\cdot R^2\mathrm{d}\Omega = c\varepsilon_0 R^2 \mathrm{d}\Omega\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\,|\vec{E}_\omega|^2 \tag{8.21}$$

Отсюда видно, что спектральная плотность тормозного излучения равна

$$\frac{\mathrm{d}^2W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}\cdot\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\,c\varepsilon_0|\vec{E}_\omega|^2R^2\,\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega \tag{8.22}$$

В волновой зоне поля выражаются (сравни с (6.12)) через вектор-потенциал $\vec{A}_\omega$ как

$$\begin{aligned} \vec{E}_\omega &= -i\,\frac{c^2}{\omega}\,[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{A}_\omega]], \\ \vec{B}_\omega &= i[\vec{k}\times\vec{A}_\omega], \end{aligned} \tag{8.23}$$

и задача сводится к вычислению вектор-потенциала $\vec{A}_\omega$. Используя (7.18), имеем

$$\begin{aligned} \vec{A}_\omega(\vec{r}\,) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V'\frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{e}^{i\frac{\omega}{c}R} \approx \\ &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR_0}}{R_0}\int \mathrm{d}V'\,\mathrm{e}^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'}\vec{j}_\omega(\vec{r}\,') = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{ikR_0}}{R_0}\,\vec{j}_\omega(\vec{k}\,). \end{aligned} \tag{8.24}$$

Здесь предполагается, что наблюдатель находится на расстояниях R очень больших по сравнению с $1/k$ – размером области, в которой формируется излучение с частотой ω. Вводя $R_0 = |\vec{r}\,|$ – расстояние от центра рассеяния (находящегося в начале координат) до наблюдателя $\vec{r}$, мы использовали разложение $Rk \approx (R_0 - \vec{n}\cdot\vec{r}\,')k = R_0 k - \vec{k}\cdot\vec{r}\,'$. Таким образом, спектральное и угловое распределение тормозного излучения (8.22) выражаются через фурье-образ $\vec{j}_\omega(\vec{k}\,)$ пространственно-временного распределение токов:

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega}\cdot\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_0 c}\Big|[\vec{k}\times\vec{j}_\omega(k)]\Big|^2\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,\mathrm{d}\omega \tag{8.25}$$

Вычисляя $\vec{j}_\omega(\vec{k}\,)$ для движущегося заданным образом точечного заряда, получим

$$\begin{aligned}
\vec{j}_\omega(\vec{k}\,) &= \int \mathrm{d}V\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\underbrace{e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))\cdot\vec{v}\,(t)}_{\vec{j}\,(t)}\cdot\mathrm{e}^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r}\,)} = \\
&= e\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}V\cdot\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))\cdot\vec{v}\,(t)\cdot\mathrm{e}^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r}\,)} = \\
&= e\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\;\vec{v}\,(t)\cdot\mathrm{e}^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r}_0(t))}
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Для малых частот $\omega \ll 1/\tau_c$, где τ_c – время соударения можно считать, что траектория частицы состоит из двух участков: до рассеяния $t<0$, и после рассеяния $t>0$:

$$\vec{r}_0(t) = \begin{cases}\vec{v}_1 t, & t<0;\\ \vec{v}_2 t, & t>0.\end{cases}$$

Подставляя в (8.25), получим

$$\begin{aligned}
\vec{j}_\omega(\vec{k}\,) &= e\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}t\;\vec{v}_1\cdot\mathrm{e}^{i(\omega-\vec{k}\vec{v}_1)t} + e\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\;\vec{v}_2\cdot\mathrm{e}^{i(\omega-\vec{k}\,\vec{v}_2)t} = \\
&= ie\left(\frac{\vec{v}_2}{\omega-\vec{k}\,\vec{v}_2}-\frac{\vec{v}_1}{\omega-\vec{k}\,\vec{v}_1}\right) = ie\left(\frac{m\vec{v}_2\gamma}{\frac{\omega}{c}mc\gamma-\vec{k}m\,\vec{v}_2\gamma}-\frac{m\vec{v}_1\gamma}{\frac{\omega}{c}mc\gamma-\vec{k}m\,\vec{v}_1\gamma}\right) = \\
&= ie\left(\frac{\vec{p}_2}{kp_2}-\frac{\vec{p}_1}{kp_1}\right)
\end{aligned} \tag{8.27}$$

Здесь $kp \equiv \frac{\omega}{c}mc\gamma - \vec{k}m\,\vec{v}\gamma$ обозначает скалярное произведение двух 4-векторов, $k = (\frac{\omega}{c},\vec{k}\,)$ и $p = (mc\gamma, m\,\vec{v}\gamma)$. В итоге

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{4\pi^2 c}\left|\frac{[\vec{k}\times\vec{p}_2]}{kp_2}-\frac{[\vec{k}\times\vec{p}_1]}{kp_1}\right|^2 \tag{8.28}$$

Число излученных квантов частоты ω равно

$$\mathrm{d}N = \frac{1}{\hbar\omega}\,\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{\alpha}{(2\pi)^2}\left|\frac{[\vec{k}\times\vec{p}_2]}{kp_2}-\frac{[\vec{k}\times\vec{p}_1]}{kp_1}\right|^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$$

Полное число излучаемых фотонов бесконечно, т.к. $\int\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}\to\infty$.

8.4 Реакция излучения.

Потери энергии частицы, связанные с излучением, можно связать с наличием силы радиационного трения $\vec{F}_r$, вызывающей торможение частицы

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -\vec{F}_r\vec{v}\,. \tag{8.29}$$

Выражение для мощности излучения (8.3)[8.2] можно преобразовать к такому виду следующим образом:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= I = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\ddot{\vec{d}}\,)^2}{c^3} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\;\ddot{\vec{d}}\;\dot{\vec{d}}\right) - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{\vec{v}}\right)}_{\vec{F}_r}\vec{v}
\end{aligned}
$$

Первое слагаемое представляет собой полную производную по времени и в случае периодического движения в результате усреднения по периоду обращается в нуль. Второе слагаемое дает

$$
\vec{F}_r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\vec{v}} \tag{8.30}
$$

Это выражение применимо лишь когда сила радиационного трения $\vec{F}_r$ мала по сравнению с остальными силами $\vec{F}^{\,e}$, определяющими движение частицы

$$
\left|\vec{F}_r\right| \ll \left|\vec{F}^{\,e}\right| \tag{8.31}
$$

В случае периодического движения, например, в переменном электрическом поле с частотой ω, это условие дает

$$
\omega \ll \frac{4\pi\varepsilon_0 m\,c^3}{e^2}, \tag{8.32}
$$

или $\lambda \gg r_e$ (r_e – классический радиус электрона).

Действительно, предположим, что на частицу действует лишь сила радиационного трения, а остальные силы равны нулю. Тогда уравнение движения примет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{v}} &= \frac{\vec{F}_r}{m} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3 m}\ddot{\vec{v}} = \\
&= \frac{2}{3}\frac{r_e}{c}\ddot{\vec{v}}\,, \quad r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m\,c^2}
\end{aligned}
$$

Это уравнение кроме тривиального решения $\vec{v} = \mathrm{const}$, имеет абсурдное решение

$$
\dot{\vec{v}} \propto \vec{v} \propto \vec{r} \;\propto\; \exp\left\{\frac{3}{2}\frac{ct}{r_e}\right\}
$$

что демонстрирует, что пользоваться понятием силы радиационного трения надо с осторожностью.

8.5 Излучение гармонического осциллятора.

Рассмотрим излучение заряженного осциллятора, предполагая заряд точечным:

$$
\vec{r}_0(t) = \vec{r}_0\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{8.33}
$$

Воспользуемся дипольным приближением (8.2), применимым при условии

$$
k r_0 = 2\pi\frac{r_0}{\lambda} \ll 1, \text{ или } \frac{v_0}{c} \ll 1, \tag{8.34}
$$

тогда дипольный момент

$$
\vec{d}\,(t) = e\vec{r}_0(t) = e\vec{r}_0\cos(\omega_0 t + \alpha).
$$

Подставляя его в (8.1) получим интенсивность излучения

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 I(\theta,\varphi;t)}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}\,]|^2}{c^3}\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} = \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_0^4 e^2 r_0^2}{c^3}\cos^2\omega_0 t\sin^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi},
\end{aligned} \tag{8.35}
$$

8.2. Мы ограничиваемся нерелятивистским пределом – в противном случае определение и силы, и мощности, и формулы для мощности излучения становятся сложными для анализа.

усреднение по времени дает дополнительный множитель $\overline{\cos^2\omega_0 t} = 1/2$.

Спектральная интенсивность излучения

$$\frac{\mathrm{d}^2 I(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 e^2 r_0^2}{2c^3}\sin^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,\delta(\omega-\omega_0)\mathrm{d}\omega, \tag{8.36}$$

легко видеть. что она пропорциональна ω^4. Полная интенсивность дипольного излучения

$$I = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_0^4 r_0^2}{2c^3} \tag{8.37}$$

Учет силы радиационного трения приводит к затуханию колебаний осциллятора

$$\vec{d}\,(t) = e\vec{r}_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}, \tag{8.38}$$

где

$$\gamma = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega_0^2}{3mc^3} = \frac{1}{3}r_e\frac{\omega_0^2}{c} \tag{8.39}$$

В этом случае движение осциллятора уже не является монохроматичным:

$$\begin{aligned}\vec{d}_\omega &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{d}\,(t) = \\ &= \int_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{e}^{i\omega t} e\vec{r}_0\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\,\mathrm{e}^{-i\omega_0 t} = \frac{er_0}{\gamma - i(\omega-\omega_0)}\end{aligned}$$

а угловое и спектральное распределение излученной энергии в этом случае

$$\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4 e^2 r_0^2}{2c^3}\sin^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}\,\frac{\omega_0^4}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\,\mathrm{d}\omega. \tag{8.40}$$

Проинтегрировав по углам, имеем спектральное распределение излученной энергии

$$W(\omega) = W\cdot\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \tag{8.41}$$

где

$$\begin{aligned}W &= \int \mathrm{d}\Omega\frac{\mathrm{d}^2 W(\theta,\varphi;\omega)}{\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\omega} = \\ &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_0^2\omega_0^4}{6\gamma c^3} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_0^2\omega_0^4}{3c^3}\,\tau,\end{aligned}$$

где $\tau = 1/2\gamma$ – время жизни (высвечивания) возбужденного состояния осциллятора, а γ – естественная ширина линии излучения.

Глава 9
Рассеяние электромагнитных волн.

Рассеяние электромагнитных волн удобно характеризовать сечением рассеяния (переизлучения), определяемым как отношение интенсивности $\mathrm{d}I$ рассеянной волны к вектору Пойнтинга падающей волны

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}I}{\tilde{S}} \tag{9.1}$$

9.1 Рассеяние свободным зарядом.

В нерелятивистском приближении сила, действующая на заряд в поле электромагнитной волны $\vec{E} = \vec{E}_0\,\mathrm{e}^{i(\vec{k}\vec{r}\,-\omega t)}$ равна

$$\vec{F} = e\vec{E} = e\vec{E}_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

в дипольном приближении $kr \ll 1$, тогда из уравнения движения $m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E}$ имеем для дипольного момента $\ddot{\vec{d}} = e^2\vec{E}/m$. Используя дипольное приближение

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{|[\vec{n}\times\ddot{\vec{d}}\,]|^2}{c^3}\,\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}$$

с учетом потока энергии падающей волны $\tilde{S} = c\varepsilon_0 E_0^2$ получим

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m\,c^2}\right)^2 \sin^2\psi\,\mathrm{d}\Omega = r_e^2 \sin^2\psi\,\mathrm{d}\Omega \tag{9.2}$$

Здесь ψ – угол между направлением вектора $\vec{E}_0$ в падающей волне и направлением $\vec{n}$ рассеянной волны. В частности, $\cos\psi = \sin\theta\cos\varphi$, где θ угол рассеяния, φ угол поляризации падающей волны. Если падающая волна неполяризована, то после усреднения по поляризациям

$$\mathrm{d}\sigma_T = \frac{1}{2}\,r_e^2\,(1+\cos^2\theta)\mathrm{d}\Omega \tag{9.3}$$

Полное сечение

$$\sigma_T = \frac{8}{3}\pi r_e^2, \tag{9.4}$$

известное как ***томпсоновское сечение рассеяния***, *не зависит* от частоты.

9.2 Рассеяние осциллятором.

Уравнение движения осциллятора в поле волны имееr вид

$$\ddot{\vec{r}} + 2\delta\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E} = \frac{e}{m}\vec{E}_0\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{9.5}$$

где $\delta = \frac{1}{3}r_e\frac{\omega_0^2}{c}$ (оценка радиационного трения). Решая уравнение, имеем

$$\vec{d} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\delta}\,\frac{e^2}{m}\,\vec{E}.$$

Далее, для амплитуды и фазы второй производной дипольного момента

$$\ddot{\vec{d}} \;=\; \mathrm{Re}\left\{\frac{-\,\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2-2i\omega\delta}\,\frac{e^2}{m}\,\vec{E}\right\} = -\,\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\delta^2}}\frac{e^2}{m}\,\vec{E}_0\cos(\omega t-\beta),$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2-\omega^2},$$

а сечение рассеяния

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\delta^2}\,\mathrm{d}\sigma_T. \tag{9.6}$$

Интегрируя по углам, для полного сечения получим аналогично

$$\sigma = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2\delta^2}\,\sigma_T \approx \frac{1}{4}\frac{\omega^2}{(\omega_0-\omega)^2+\delta^2}\cdot\sigma_T. \tag{9.7}$$

Здесь $\mathrm{d}\sigma_T,\,\sigma_T$ дифференциальное и полное томсоновское сечение рассеяния на свободной частице. Сечение рассеяния на осцилляторе $\mathrm{d}\sigma$, σ носит резонансный характер. В резонансе ($\omega=\omega_0$) сечение велико и не зависит от свойств осциллятора

$$\sigma(\omega=\omega_0) = \frac{\omega_0^2}{(2\pi\delta)^2}\cdot\sigma_T = \frac{3}{2\pi}\lambda^2 \gg r_e^2,$$

где λ –длина волны.

В пределе малых частот $\omega \ll \omega_0$ (рэлеевское рассеяние) сечение рассеяния

$$\sigma = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4\cdot\sigma_T \tag{9.8}$$

быстро растет с частотой. Это, в частности, обеспечивает голубой цвет неба – коротковолновая (голубая) часть спектра рассеивается сильнее, чем длинноволновая (красная) и приводит к красному оттенку заходящего солнца.

Глава 10
Электромагнитное поле в веществе.

10.1 Строение вещества, микроскопические поля в веществе и уравнения Максвелла-Лоренца.

Внутри вещества электромагнитное поле есть сумма поля, создаваемого внешними зарядами и токами, и поля, создаваемого зарядами среды. Точные микроскопические уравнения Максвелла-Лоренца

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{e} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_t, \\
\operatorname{rot} \vec{e} &= -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}, \\
\operatorname{div} \vec{b} &= 0, \\
\operatorname{rot} \vec{b} &= \mu_0 \vec{j}_t + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{e}}{\partial t},
\end{aligned}$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_t = 0.$$

связывают микроскопические поля $\vec{e}, \vec{b}$ – электрическое и магнитное, соответственно, с ρ_t – полной плотностью всех зарядов (включая заряды среды) и с $\vec{j}_t$ – полной плотностью всех соответствующих токов.

10.2 Усредненные уравнения Максвелла-Лоренца, макроскопические поля.

Микроскопические поля испытывают большие флуктуации на расстояниях порядка атомных. На практике представляют интерес сглаженные – *макроскопические* поля, усредненные по размеру много больше атомного, но малому по сравнению с масштабом изменения макроскопического поля

$$\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle, \quad \vec{B} = \left\langle \vec{b} \right\rangle \tag{10.1}$$

для напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, соответственно. Уравнения Максвелла для макроскопических полей в среде

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0}\langle \rho_t \rangle, \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\
\operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \left\langle \vec{j}_t \right\rangle + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},
\end{aligned}$$

а усредненные заряды и токи среды удовлетворяют уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial \langle \rho_t \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \left\langle \vec{j}_t \right\rangle = 0. \tag{10.2}$$

Среда может относиться либо к *проводникам*, заряды в которых обладают подвижностью и могут перетекать из одной части в другую, либо к *диэлектрикам*, в которых заряды "связаны" и могут лишь смещаться на расстояния порядка атомных размеров. Ниже мы ограничимся лишь рассмотрением диэлектриков.

Полная плотность заряда складывается из плотности "внешних" заданных зарядов ρ и плотности связанных зарядов диэлектрика $\rho_{\text{связ}}$:

$$\langle\rho_t\rangle = \rho + \rho_{\text{связ}}, \tag{10.3}$$

$$\left\langle\vec{j}_t\right\rangle = \vec{j} + \vec{j}_{\text{связ}} \tag{10.4}$$

Вычисление наведенных плотностей связанных зарядов и токов в диэлектрике задача достаточно нетривиальная, и ниже мы рассмотрим величины, связанные с наведенными зарядами и токами, но более удобные для описания.

Смещение зарядов диэлектрика под воздействием электрического поля приводит к появлению плотности дипольного момента $\vec{P}$ в диэлектрике, называемому также *вектором поляризации среды*. Дипольный момент диэлектрического тела создается как объемной, так и поверхностной плотностью зарядов

$$\int \mathrm{d}V\vec{P} = \int \mathrm{d}V\,(\rho_{\text{связ}}\vec{r}\,) + \oint_S \mathrm{d}S\,(\sigma_{\text{связ}}\,\vec{r}\,) \tag{10.5}$$

В свою очередь, и объемная, и поверхностная плотность зарядов может быть выражена через вектор поляризации

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div}\vec{P}\,,\ \sigma_{\text{связ}} = P_n, \tag{10.6}$$

что, как мы увидим ниже, значительно удобнее для описания. Тем самым, вместо плотности наведенных зарядов мы используем вектор поляризации среды $\vec{P}$.

Аналогично вместо токов связанных зарядов, складывающихся из поляризационных токов $\vec{j}_P$ и токов намагничивания $\vec{j}_M$:

$$\vec{j}_{\text{связ}} = \vec{j}_P + \vec{j}_M, \tag{10.7}$$

удобно использовать вектор поляризации $\vec{P}$

$$\vec{j}_P = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \tag{10.8}$$

и вектор намагниченности $\vec{M}$:

$$\vec{j}_M = \operatorname{rot}\vec{M} \tag{10.9}$$

имеющий смысл магнитного момента единицы объема вещества). Поверхностная плотность токов намагниченности также может быть выражена через вектор намагниченности $\vec{M}$ как $\vec{i}_M = [\vec{M}\times\vec{n}]$, где $\vec{n}$ – вектор нормали к поверхности тела.

Рассмотрим теперь вектор электрической индукции $\vec{D}$ определенный как

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{10.10}$$

и вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{10.11}$$

Определенные таким образом величины удовлетворяют уравнениям Максвелла в среде:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \tag{10.12}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{10.13}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{10.14}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \tag{10.15}$$

и уравнению непрерывности
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}=0,$$
из которых наведенные в среде плотности зарядов $\rho_{\text{связ}}$ и токов $\vec{j}_{\text{связ}}$ выпали полностью, правда ценой введения векторных полей $\vec{P}$ и $\vec{M}$, определить которые еще предстоит. Поскольку каждое из этих полей характеризует локальную электрическую и магнитную поляризацию среды, естественно предположить, что электрическая поляризация вещества определяется электрическим полем: $\vec{P}=\vec{P}(\vec{E})$, а намагниченность – магнитным: $\vec{M}=\vec{M}(\vec{H})$. Для достаточно слабых полей эта связь должна быть линейной:
$$P^i = \varepsilon_0\kappa_e^{ij}E^j, \tag{10.16}$$
$$M^i = \varepsilon_0\kappa_m^{ij}H^j \tag{10.17}$$
а величины κ_e^{ij} и κ_m^{ij} называются тензорами соответственно *диэлектрической* и *магнитной* восприимчивости. В случае изотропной среды $\vec{P}\,\|\vec{E}$ и $\vec{M}\,\|\vec{H}$, и эти тензора сводятся к скалярным функциям $\kappa_e(\vec{E})$ и $\kappa_m(\vec{H})$:
$$\kappa_e^{ij}=\kappa_e\delta^{ij},\qquad \kappa_m^{ij}=\kappa_m\delta^{ij}.$$
Заряды *всегда* смещаются по направлению поля, поэтому для всех диэлектриков $\kappa_e>0$. В случае магнитного поля наведенный магнитный момент может быть направлен как по полю: $\kappa_m>0$ (парамагнетизм), так и против поля: $\kappa_m>0$ (диамагнетизм).

Поля $\vec{P}$ и $\vec{M}$ можно исключить вовсе, вводя диэлектрическую и магнитную проницаемость
$$\begin{aligned}\varepsilon &= (1+\kappa_e),\quad \varepsilon\geqslant 1;\\ \mu &= (1+\kappa_m),\ \ \mu\geqslant 0;\\ \vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},\ \ \vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}.\end{aligned}$$
Вместе с уравнениями Максвелла в среде это дает замкнутуюю систему уравнений.

10.3 Условия на границе раздела двух сред.

В случае, когда среда состоит из нескольких областей, разделенных границами, уравнения электродинамики можно решать в каждой из этих областей, на на границе между областами необходимо эти решения “сшить”. Условия сшивки для нормальной компоненты электрической индукции имеют вид имеют вид
$$\vec{D}_{2n}-\vec{D}_{2n}=\sigma \tag{10.18}$$
где σ – поверхностная плотность *внешних* (не путать с наведенными!) зарядов на границе раздела. Ввиду отсутствия магнитных зарядов соответствующие условия для магнитной индукции
$$\vec{B}_{2n}-\vec{B}_{2n}=0. \tag{10.19}$$
Для тангенциальной компоненты электрического поля условие
$$\vec{E}_{2t}-\vec{E}_{2t}=0 \tag{10.20}$$
следует из потенциальности электрического поля $\vec{E}$. Наконец, для тангенциальной компоненты напряженности магнитного поля имеем условие
$$\vec{H}_{2t}-\vec{H}_{2t}=i, \tag{10.21}$$
где i – поверхностная плотность *внешних* токов на границе раздела, следует из уравнения Максвелла (10.15).

10.4 Потенциалы в среде. Плотность энергии и потока энергии в среде.

В среде связь потенциалов с полями E, B остается неизменной

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A}. \end{aligned}$$

В однородной изотропной среде уравнения для потенциалов имеют вид ($v^2 \equiv 1/(\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0)$):

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho, \\ \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mu_0\vec{j}, \\ \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение представляет собою условие лоренцевской калибровки для потенциалов в среду.

Плотность энергии и импульса в среде определена как

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}\right), \\ \vec{g} &= \frac{1}{c^2}\vec{S}, \end{aligned}$$

где $\vec{S} = [\vec{E}\times\vec{H}]$ –вектор Пойнтинга, описывающий поток энергии в среде.

Оглавление