Министерство образования Российской Федерации

ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра теоретической и общей электротехники

Н.И.Усенков
В.Н.Трубникова

Расчет электрических цепей однофазного синусоидального тока

Методические указания к выполнению РГЗ для студентов вечернего факультета

Оренбург 2000

ББК 31.211(Я7)
У 74
УДК621.3.01.(07)

Введение

Целью расчета цепей синусоидального тока является определение напряжений, токов и мощностей (активных и реактивных) в ветвях электрической цепи. Во многих случаях требуется найти не только значения токов и напряжений, но и сдвиги фаз между ними.

Для анализа и расчета цепей синусоидального тока наиболее удобен символический метод, основанный на использовании алгебры комплексных чисел.

1 Основные сведения о символическом методе

При использовании символического метода действия с синусоидальными функциями токов и напряжений в ветвях электрической цепи заменяются действиями с комплексными числами, изображающими эти функции. Используются следующие основные положения.

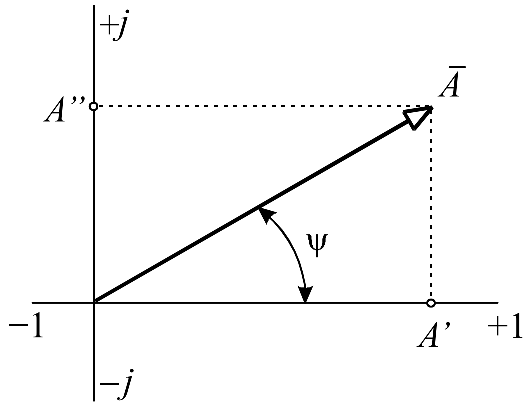


Рисунок 1

Любой вектор $\overline{A}$, изображённый на комплексной плоскости, независимо от его физического значения, можно разложить на составляющие A' и A'', направленные по двум осям прямоугольной системы координат (рисунок 1).

Ось абсцисс при символическом изображении векторов называют осью вещественных (действительных) величин, а ось ординат – осью мнимых величин, причем, составляющую вектора по мнимой оси выделяют посредством особого множителя (символа мнимой единицы j). Тогда вектор $\overline{A}$ можно аналитически выразить комплексным числом:

$$\overline{A} = A' + j \cdot A''. \tag{1}$$

Различают три формы записи комплексного числа. Рассмотрим рисунок 2, на котором изображены три одинаковых по абсолютной величине отрезка, но расположенных различным образом на комплексной плоскости. Отрезок 1 может быть описан с помощью комплексных выражений одним из следующих способов:

$$\overline{A} = A' + jA'' = A(\cos\alpha + j\sin\alpha), \tag{2}$$

первая форма записи называется алгебраической, вторая – тригонометрической. На основании формулы Эйлера: $\cos\alpha + j\sin\alpha = e^{j\alpha}$ получают показательную форму записи комплексного числа $\overline{A} = A \cdot e^{j\alpha}$.

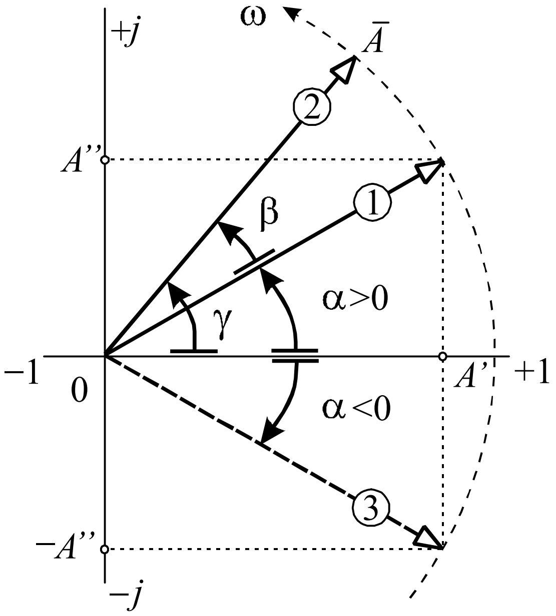


Рисунок 2

Здесь:

$A = \left|\overline{A}\right| = \sqrt{\left(A'\right)^2 + \left(A''\right)^2}$ – модуль комплексного числа $\overline{A}$;

$\alpha = arg\,\overline{A} = arctg\, {A''}/{A'}$ – аргумент комплексного числа $\overline{A}$;

$A' = \mathrm{Re}\left(\overline{A}\right)$ – действительная (реальная) часть комплексного числа $\overline{A}$;

$A'' = \mathrm{Im}\left(\overline{A}\right)$ – коэффициент при мнимой части комплексного числа $\overline{A}$.

Модуль комплексного числа определяет длину вектора, изображающего это число, а аргумент – положение вектора относительно оси действительных величин.

Два комплексных числа, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком, называются сопряженными (отрезки 1 и 3 на рисунке 2):

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A' + jA'' = A\left(cos\,\alpha + j\,sin\,\alpha\right) = A \cdot e^{j\alpha}, \\ \overset{*}{A} &= A' - jA'' = A\left(cos\,\alpha - j\,sin\,\alpha\right) = A \cdot e^{-j\alpha}. \end{aligned} \tag{3}$$

Отрезок 2 (рисунок 2) может быть описан в комплексной форме следующим образом:

$$A \cdot e^{j\gamma} = A \cdot e^{j(\alpha+\beta)} = A \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\beta}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что умножение комплексного числа на множитель типа $e^{\pm j\beta}$ равнозначно повороту отрезка (вектора) на комплексной плоскости на угол $\pm\beta$. Поэтому множитель $e^{\pm j\beta}$ называется поворотным. В частном случае, когда $\beta = {\pi}/{2}$, т.е. когда поворот вектора осуществляется на угол $\pm{\pi}/{2}$, из формулы Эйлера следует:

$$e^{\pm j{\pi}/{2}} = cos\,{\pi}/{2} \pm j\,sin\,{\pi}/{2} = \pm j. \tag{5}$$

Таким образом, умножение комплексного числа на множитель $\pm j$ означает поворот соответствующего вектора на угол $\pm{\pi}/{2}$. Если аргумент поворотного множителя сделать функцией времени, например, $\beta = \omega \cdot t$, то вектор, будучи умноженным, на множитель вращения $e^{j\omega t}$, превратится во вращающийся с угловой скоростью ω радиус-вектор, а выражение

$$A \cdot e^{j(\omega t+\alpha)} = A \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t}$$

называется комплексной функцией времени или комплексным мгновенным значением и свидетельствует о том, что вектор $\overline{A}$ вращается вокруг начала координат, начиная от исходного положения 1 (см. рисунок 2).

Производная от комплексной функции времени

$$\frac{d}{dt}\left[A \cdot e^{j(\omega t+\alpha)}\right] = \frac{d}{dt}\left[A \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t}\right] = j\omega A \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} = j\omega A \cdot e^{j(\omega t+\alpha)}. \qquad (6)$$

Интеграл от комплексной функции времени

$$\int A \cdot e^{j(\omega t+\alpha)} dt = \int A \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} A \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} A \cdot e^{j(\omega t+\alpha)}. \qquad (7)$$

Следовательно, дифференцирование и интегрирование функцией времени в символической форме заменяют умножением или делением на $j\omega$ исходных комплексных функций. Это обстоятельство позволяет алгебраизировать интегро-дифференциальные уравнения и существенно упростить расчеты.

Если теперь изложенные математические основы символического метода перевести на “электротехнический язык”, то применительно к напряжению получим (рисунок 3):

– комплексное напряжение

$$\overline{U} = U_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}, \qquad (8)$$

где $\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\psi}$ – комплексная амплитуда напряжения (исходное положение вектора на комплексной плоскости).

– мгновенное значение напряжения

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{Im}\left[\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[U_m \cdot e^{j\psi} \cdot e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[U_m \cdot e^{j(\omega t+\psi)}\right] = \\ &= \mathrm{Im}\left[U_m\, cos(\omega t+\psi) + jU_m\, sin(\omega t+\psi)\right] = U_m\, sin(\omega t+\psi) \end{aligned} \qquad (9)$$

Таким образом, мгновенное синусоидальное напряжение (ток, ЭДС) являются мнимой частью Im комплексной функции времени (9). Следовательно, если имеем комплексное действующее напряжение (ток, ЭДС) и хотим получить выражение для мгновенного значения, то нужно предварительно заданный комплекс умножить на $\sqrt{2}$ (получим комплексную амплитуду), а затем умножить его на $e^{j\omega t}$ (получим комплексную функцию времени) и взять от полученного комплекса мнимую часть.

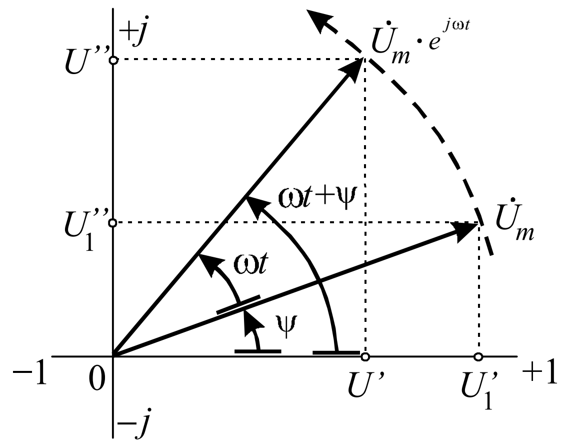


Рисунок 3

Замечание – В электротехнике принято над комплексными амплитудами и комплексами действующих значений синусоидальных величин ставить точку. Иногда точки не ставят, но символы этих величин набирают “жирным шрифтом”.

Пример 1.1

Дано: $\dot{U} = 100 \cdot e^{j\pi/2}$, тогда мгновенное значение напряжения:

$$u = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} \cdot \dot{U} \cdot e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[\sqrt{2} \cdot 100 \cdot e^{j\pi/2} \cdot e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[141 \cdot e^{j\left(\omega t + \pi/2\right)}\right] =$$

$$= 141 sin\left(\omega t + \pi/2\right)$$

Пример 1.2

Дано: $u = 100 sin\left(\omega t - 30^0\right)$, тогда комплексная амплитуда напряжения

$$\dot{U}_m = 100 \cdot e^{-j30^0}$$

и комплекс действующего значения напряжения

$$\dot{U} = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j30^0} = 70{,}7 \cdot e^{-j30^0}.$$

2 Закон Ома в комплексной форме

Рассмотрим участок цепи, содержащий: активное сопротивление R, индуктивное X_L и емкостное X_C, по которому протекает синусоидальный ток $\dot{I}$ (рисунок 4,а):

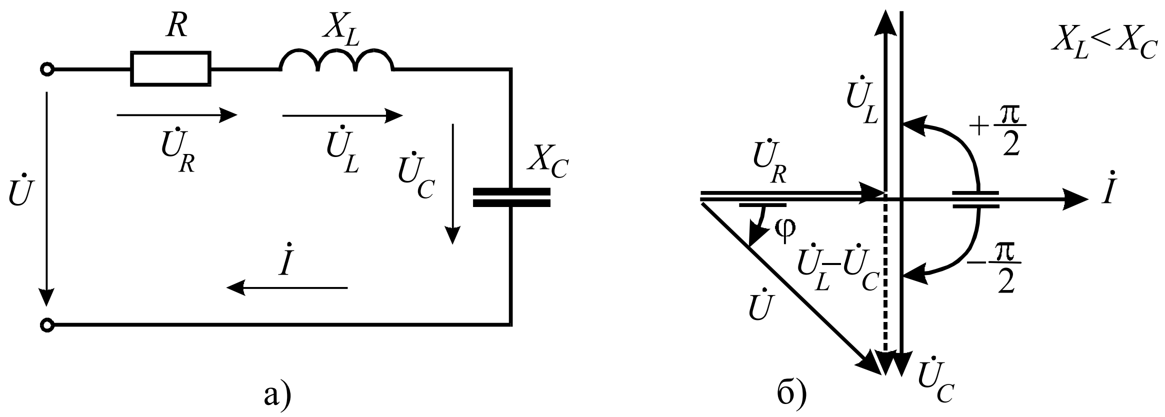


Рисунок 4

Вектор напряжения $\dot{U}$ на зажимах этого участка /1/ получается в результате сложения вектора $\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}$, совпадающего по направлению с вектором $\dot{I}$, вектора $\dot{U}_L = jX_L \cdot \dot{I}$, опережающего вектор $\dot{I}$ на $\pi/2$ и вектора $\dot{U}_C = -jX_C \cdot \dot{I}$, отстающего от вектора $\dot{I}$ на $\pi/2$ (рисунок 4,б):

$$\dot{U} = R \cdot \dot{I} + jX_L \cdot \dot{I} - jX_C \cdot \dot{I} = \left[R + j\left(X_L - X_C\right)\right] \cdot \dot{I}, \tag{10}$$

Откуда

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(X_L - X_C\right)} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}. \qquad (11)$$

Полученное выражение представляет собой закон Ома для участка цепи, записанный в символической форме.

Величина $\underline{Z} = R + j\left(X_L - X_C\right)$ – есть полное сопротивление участка цепи, выраженное в символической форме (здесь $X_L < X_C$). Как всякое комплексное число, полное сопротивление $\underline{Z}$ может быть представлено в показательной форме:

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{-j\varphi}, \qquad (12)$$

Модуль этого числа $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ определяет величину полного сопротивления участка.

Запишем полную проводимость участка цепи в комплексной форме:

$$\begin{aligned}\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R - jX} = \frac{\left(R + jX\right)}{\left(R - jX\right)\left(R + jX\right)} = \frac{\left(R + jX\right)}{R^2 + X^2} = \\ = \frac{R}{Z^2} + j\frac{X}{Z^2} = G + jB,\end{aligned} \qquad (13)$$

где $R/Z^2 = G$ – активная проводимость, См;

$X/Z^2 = B$ – реактивная проводимость, См.

3 Законы Кирхгофа в комплексной форме

В любой узловой точке электрической цепи для мгновенных значений тока выполняется условие /1, 2/:

$$\sum i_k = 0 \qquad (14)$$

В символическое форме этому соотношению, выражающему первый закон Кирхгофа, соответствует уравнение:

$$\sum \dot{I}_k = 0 \qquad (14^*)$$

В любом контуре электрической цепи для мгновенных значений ЭДС и напряжений соблюдается соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} e_k = \sum_{l=1}^{n} u_l, \qquad (15)$$

выражающее второй закон Кирхгофа. При синусоидальных ЭДС и символической форме записи, этому соотношению соответствует уравнение:

$$\sum_{k=1}^{m} \dot{E}_k = \sum_{l=1}^{n} \dot{U}_l = \sum_{l=1}^{n} \underline{Z}_l \cdot \dot{I}_l. \qquad (15^*)$$

Комплексные ЭДС $\dot{E}$, напряжения $\dot{U}$ и токи $\dot{I}$ должны входить в уравнение (15^*) со знаком “+”, если принятые положительные направления этих величин совпадают с произвольно выбранными направлениями обхода контура и со знаком “–”, когда эти направления противоположны.

4 Выражение мощности синусоидального тока в комплексной форме

При умножении напряжения на комплексное выражение тока получаем комплексное выражение полной мощности:

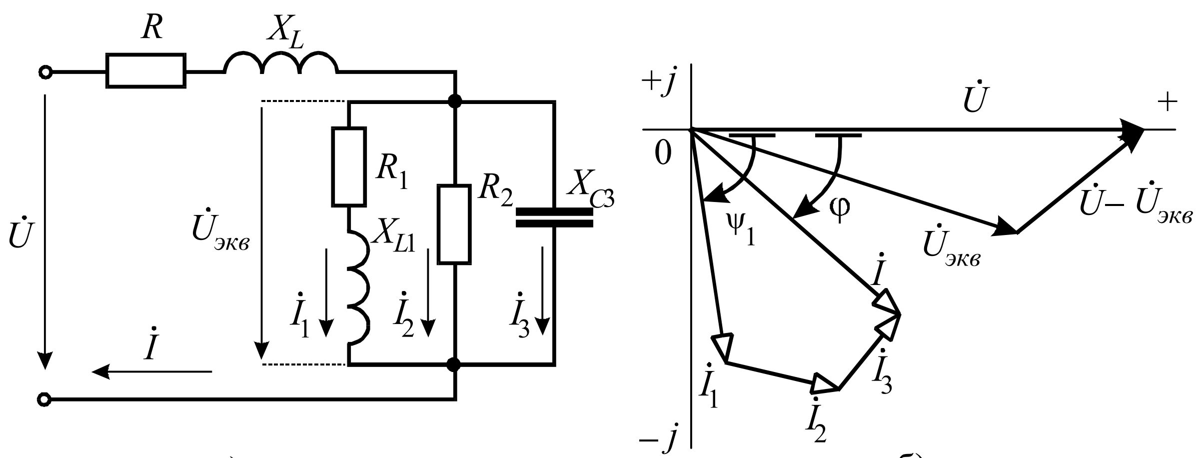
$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \overset{*}{I} = U \cdot e^{j\psi_u} \cdot I \cdot e^{-j\psi_i} = U \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = \\ = U \cdot I \cdot cos\,\varphi + jU \cdot I \cdot sin\,\varphi = P + jQ . \tag{16}$$

Действительная часть произведения $\dot{U} \cdot \overset{*}{I}$ определяет активную мощность P, а мнимая часть (без множителя j) – реактивную мощность Q. Знак мнимой части определяется характером нагрузки, при индуктивной нагрузке ($X_L > X_C$) мнимая часть получается со знаком “+”, при емкостной ($X_L < X_C$) – со знаком “-“ /2/.

Модуль $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, равный произведению $U \cdot I$ определяет полную мощность цепи.

Пример 4.1.

Рассчитать символическим методом цепь синусоидального тока, изображенную на рисунке 5,а.



а) б)

Рисунок 5

Параметры цепи: $U = 268$ В, $R = 0{,}8$ Ом, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 12{,}5$ Ом; $X_L = 1{,}6$ Ом, $X_{L_1} = 4$ Ом, $X_{C3} = 16{,}7$ Ом.

<u>Решение:</u>

Определяем эквивалентное сопротивление разветвленного участка цепи:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{экв}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{3 + j4} + \frac{1}{12{,}5} + \frac{1}{-j16{,}7} = \frac{1}{5 \cdot e^{j53{,}13^0}} + 0{,}08 +$$

$$+\frac{1}{16{,}7\cdot e^{-j90^0}}=0{,}2\cdot e^{-j53{,}13^0}+0{,}08+0{,}06\cdot e^{j90^0}=0{,}12-j0{,}16+0{,}08+j0{,}06=$$

$$=0{,}2-j0{,}1=0{,}22\cdot e^{-j26{,}59^0};$$

$$\underline{Z}_{экв}=\frac{1}{0{,}22\cdot e^{-j27^0}}=4{,}471\cdot e^{j26{,}59^0}=3{,}998+j2\,.$$

Находим общее сопротивление всей цепи:

$$\underline{Z}=R+jX_L+\underline{Z}_{экв}=0{,}8+j1{,}6+3{,}998+j2=4{,}798+j3{,}6=6\cdot e^{j36{,}89^0}\,.$$

Ток в неразветвленной части цепи по закону Ома:

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{\underline{\dot{Z}}}=\frac{268}{6\cdot e^{j36{,}89^0}}=44{,}672\cdot e^{-j36{,}89^0}=35{,}727-j26{,}817\ \text{А},$$

$$\left|\dot{I}\right|=44{,}672\ \text{А..}$$

Напряжение на зажимах разветвленной части схемы:

$$\dot{U}_{экв}=\underline{Z}_{экв}\cdot\dot{I}=4{,}471\cdot e^{j26{,}59^0}\cdot 44{,}672\cdot e^{-j36{,}89^0}=199{,}73\cdot e^{j\left(26{,}59^0-36{,}89^0\right)}=$$

$$=199{,}73\cdot e^{-j10{,}3^0}=196{,}517-j35{,}71\ \text{В},$$

$$\left|\dot{U}_{экв}\right|=199{,}73\ \text{В}.$$

Выражаем токи в параллельных ветвях схемы:

$$\dot{I}_1=\frac{\dot{U}_{экв}}{\underline{Z}_1}=\frac{199{,}73\cdot e^{-j10{,}3^0}}{5\cdot e^{j53{,}13^0}}=39{,}946\cdot e^{j(-10{,}3^0-53{,}13^0)}=39{,}946\cdot e^{-j63{,}43^0}=$$

$$=17{,}868-j35{,}727\ \text{А},$$

$$\left|\dot{I}_1\right|=39{,}946\ \text{А}.$$

$$\dot{I}_2=\frac{\dot{U}_{экв}}{\underline{Z}_2}=\frac{199{,}73\cdot e^{-j10{,}3^0}}{12{,}5}=15{,}978\cdot e^{-j10{,}3^0}=15{,}721-j2{,}857\ \text{А},$$

$$\left|\dot{I}_2\right|=15{,}978\ \text{А}.$$

$$\dot{I}_3=\frac{\dot{U}_{экв}}{\underline{Z}_3}=\frac{199{,}73\cdot e^{-j10{,}3^0}}{16{,}7\cdot e^{-j90^0}}=11{,}96\cdot e^{j(-10{,}3^0+90^0)}=12{,}2\cdot e^{j79{,}7^0}=$$

$$=2{,}138+j11{,}767\ \text{А},$$

$$\left|\dot{I}_3\right|=11{,}96\ \text{А}.$$

Проверяем правильность расчета: на основании 1-го закона Кирхгофа (14*):

$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2+\dot{I}_3=17{,}868-j35{,}727+15{,}721-j2{,}857+2{,}138+j11{,}767=$$

$$=35{,}727-j26{,}817=44{,}672\cdot e^{-j36{,}89^0}\ \text{А}$$

Полная мощность цепи:

$$\widetilde{S} = \dot{U} \cdot \overset{*}{I} = 268 \cdot 44{,}672 \cdot e^{j36{,}89} = 11972{,}096 \cdot e^{j36{,}89} = 9575 + j7186{,}6 \text{ ВА},$$

откуда: $P = 9{,}575$ кВт – активная мощность;

$Q = 7{,}1866$ квар – реактивная мощность.

Векторную диаграмму токов (рисунок 5,б) строят на основании первого закона Кирхгофа $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3$. В комплексной плоскости, в выбранном масштабе, строят вектор тока $\dot{I}_1$, начальная фаза которого $\psi_1 = -63{,}43^0$, длина вектора $\left|\dot{I}_1\right| = 39{,}946$, из конца вектора тока $\dot{I}_1$ строят вектора тока $\dot{I}_2$ с начальной фазой $\psi_2 = -10{,}3^0$ и длиной $\left|\dot{I}_2\right| = 15{,}978$, аналогично строят вектор тока $\dot{I}_3$. Соединив полученную точку с началом координат получают вектор тока $\dot{I}$.

Векторная диаграмма напряжений представляет собой разность векторов общего напряжения $\dot{U}$ схемы и вектора напряжения на зажимах разветвленной части схемы $\dot{U}_{экв}$. Из начала координат откладывают вектор напряжения $\dot{U}$, совпадающего с действительной осью комплексной плоскости, т.к. начальная фаза его равна нулю. Также из начала координат откладывают вектор напряжения $\dot{U}_{экв}$ начальная фаза которого $\psi_2 = -10{,}3^0$. Вектор, полученный в результате разности векторов, представляет собой вектор напряжения на неразветвленном участке схемы.

5 Пример выполнения задания

Исходные данные: $U = 120$ В; $f = 50$ Гц; $L_1 = 12{,}75$ мГн; $R_2 = 6$ Ом; $L_2 = 25{,}5$ мГн; $R_3 = 5$ Ом; $C_3 = 636$ мкФ.

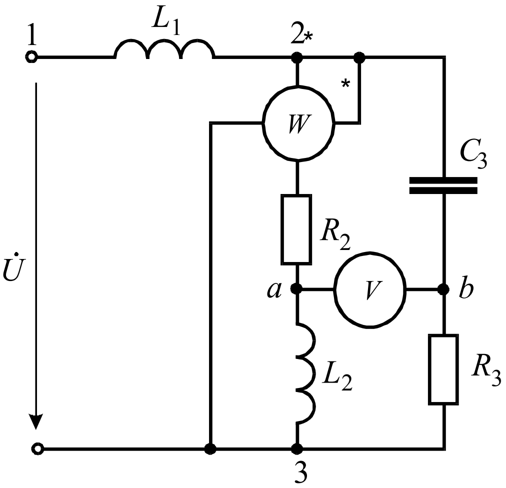


Рисунок 6

1 Определить неизвестные токи в ветвях заданной схемы (рисунок 6) и напряжения на ее элементах символическим методом.

2 Составить уравнение баланса мощностей для данной схемы и про-

верить его соблюдение.

3 Записать мгновенное значение токов в ветвях и напряжений на элементах цепи.

4 Построить векторную диаграмму токов и топографическую векторную диаграмму напряжений на одной комплексной плоскости.

5 Определить показание вольтметра и сравнить его с соответствующим вектором напряжения на топографической векторной диаграмме.

6 Определить показания ваттметра и указать мощность какого участка цепи он измеряет.

Выполнение задания

1 Исключив из исходной схемы измерительные приборы: вольтметр V и ваттметр W, заменим элементы схемы их комплексными сопротивлениями (рисунок 7).

Индуктивное и емкостное сопротивления схемы:

$$X_{L1} = \omega \cdot L_1 = 2\pi f L_1 = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 12{,}75 \cdot 10^{-3} = 4{,}006 \text{ Ом},$$

$$X_{L2} = \omega \cdot L_2 = 2\pi f L_2 = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 25{,}5 \cdot 10^{-3} = 8{,}011 \text{ Ом},$$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega \cdot C_3} = \frac{1}{2\pi f C_3} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 636 \cdot 10^{-6}} = 5{,}005 \text{ Ом}.$$

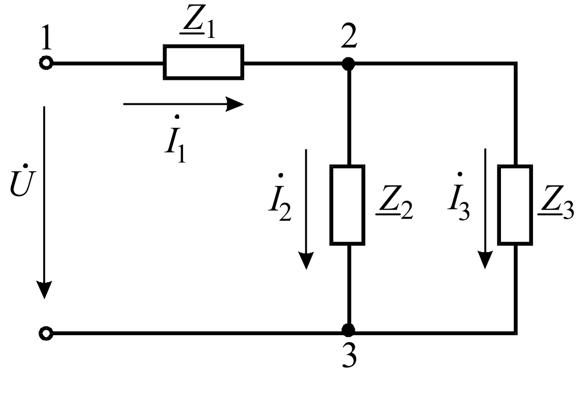


Рисунок 7

Комплекс полного электрического сопротивления ветвей схемы:

$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 0 + j4{,}006 = j4{,}006$ Ом, $\quad \underline{Z}_1 = 4{,}006 \cdot e^{j90^0}$ Ом;

$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 6 + j8{,}011$ Ом, $\quad \underline{Z}_2 = 10{,}009 \cdot e^{j53{,}168^0}$ Ом;

$\underline{Z}_3 = R_3 - jX_{C3} = 5 - j5{,}005$ Ом, $\quad \underline{Z}_3 = 7{,}075 \cdot e^{-j45{,}028^0}$ Ом.

Комплекс полного электрического сопротивления схемы (входное сопротивление):

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = jX_{L1} + \frac{(R_2 + jX_{L2}) \cdot (R_3 - jX_{C3})}{(R_2 + jX_{L2}) + (R_3 - jX_{C3})} =$$

$$= j4 + \frac{(6 + j8) \cdot (5 - j5)}{(6 + j8) + (5 - j5)} = 6{,}161 + j3{,}233 = 6{,}958 \cdot e^{j27{,}689^0} \text{ Ом}.$$

Общий комплексный ток в цепи:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{120}{6{,}161 + j3{,}233} = \frac{120 \cdot (6{,}161 - j3{,}233)}{(6{,}161 + j3{,}233) \cdot (6{,}161 - j3{,}233)} =$$

$$= 15{,}271 - j8{,}014 = 17{,}246 \cdot e^{-j27{,}689^0} \text{ А.}$$

Комплексное напряжение $\dot{U}_{23}$

Комплекс полного напряжения $\dot{U}$ есть сумма комплексных напряжений на элементах схемы $\dot{U}_1 + \dot{U}_{23}$, тогда:

$$\dot{U}_{23} = \dot{U} - \dot{U}_1 = \dot{U} - \dot{I}_1 \cdot jX_{L1} = 120 - 17{,}246 \cdot j4{,}006 =$$

$$= 87{,}9 - j61{,}17 = 107{,}089 \cdot e^{-j34{,}834^0} \text{ В.}$$

Комплексные токи в параллельных ветвях:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{107{,}089 \cdot e^{-j34{,}834^0}}{10{,}009 \cdot e^{j53{,}168^0}} = \frac{107{,}089}{10{,}009} \cdot e^{j(-34{,}834^0 - 53{,}168)} =$$

$$= 10{,}699 \cdot e^{-j88{,}002} = 0{,}373 - j10{,}693 \text{ А.}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{107{,}089 \cdot e^{-j34{,}834^0}}{7{,}075 \cdot e^{-j45{,}028^0}} = \frac{107{,}089}{7{,}075} \cdot e^{j(-34{,}834^0 + 45{,}028)} =$$

$$= 15{,}137 \cdot e^{j10{,}194} = 14{,}898 + j2{,}679 \text{ А.}$$

Комплексные напряжения на отдельных участках

$$\dot{U}_{L1} = jX_{L1} \cdot I_1 = 4{,}006 \cdot e^{j90^0} \cdot 17{,}246 \cdot e^{-j27{,}689^0} =$$

$$= 69{,}081 \cdot e^{j62{,}311^0} = 32{,}1 + j61{,}17 \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{R2} = R_2 \cdot I_2 = 6 \cdot 10{,}699 \cdot e^{-j88{,}002^0} = 64{,}197 \cdot e^{-j88{,}002^0} = 2{,}238 - j64{,}158 \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{L2} = jX_{L2} \cdot I_2 = 8{,}011 \cdot e^{j90^0} \cdot 10{,}699 \cdot e^{-j88{,}002^0} =$$

$$= 85{,}714 \cdot e^{j1{,}998^0} = 85{,}662 + j2{,}988 \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{C3} = jX_{C3} \cdot I_3 = 5{,}005 \cdot e^{-j90^0} \cdot 15{,}137 \cdot e^{j10{,}194^0} =$$

$$= 75{,}76 \cdot e^{-j79{,}806^0} = 13{,}408 - j74{,}565 \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{R3} = R_3 \cdot I_3 = 5 \cdot 15{,}137 \cdot e^{j10{,}194^0} = 75{,}687 \cdot e^{j10{,}194^0} = 74{,}492 + j13{,}395 \text{ В.}$$

2 Составить уравнение баланса мощностей для данной схемы и проверить его соблюдение

Комплексная полная мощность цепи:

$$\tilde{S} = \dot{U}_{13} \cdot \overset{*}{I}_1 = 120 \cdot 17{,}246 \cdot e^{-j27{,}689} = 1{,}833 \cdot 10^3 + j961{,}682,$$

откуда: активная мощность источника $P_{ист} = 1{,}833 \cdot 10^3$ Вт;

реактивная мощность источника $Q_{ист} = j961{,}682$ вар.

Активная мощность потребителей цепи:

$$P_{пот} = |I_2|^2 \cdot R_2 + |I_3|^2 \cdot R_3 = 10{,}699^2 \cdot 6 + 15{,}137^2 \cdot 5 = 1{,}833 \cdot 10^3 \text{ Вт}$$

Реактивная мощность потребителей цепи:

$$Q_{пот} = |I_1|^2 \cdot jX_{L1} + |I_2|^2 \cdot jX_{L2} + |I_3|^2 \cdot (-jX_{C3}) = 17{,}246^2 \cdot 4{,}006 \cdot e^{j90^0} +$$
$$+10{,}699^2 \cdot 8{,}011 \cdot e^{j90^0} + 15{,}137^2 \cdot 5{,}005 \cdot e^{-j90^0} = j1{,}191 \cdot 10^3 +$$
$$+ j917{,}092 - j1{,}147 \cdot 10^3 = j961{,}682$$

3 Записать мгновенные значения токов в ветвях и напряжений на элементах цепи.

Мгновенные значения токов в ветвях схемы

$$i_1 = |I_1| \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega t + \psi_{i_1}) = 24{,}39\, sin(314t - 27{,}689) \text{ А;}$$

$$i_2 = |I_2| \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega t + \psi_{i_2}) = 15{,}131\, sin(314t - 88{,}002) \text{ А;}$$

$$i_3 = |I_3| \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega t + \psi_{i_1}) = 21{,}407\, sin(314t + 10{,}194) \text{ А.}$$

Мгновенные значения напряжений на участках схемы

Комплексное напряжение на участке 1-2 соответствует комплексному напряжению на катушке индуктивности: $\dot{U}_{12} = \dot{U}_{L1}$.

$$u_{12} = |U_{L1}| \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_{U_{L1}}) = 97{,}695 \sin(314t + 62{,}311) \text{ В;}$$

$$u_{23} = |U_{23}| \cdot \sqrt{2}\, sin(\omega t + \psi_{U_{23}}) = 151{,}447\, sin(314t - 34{,}834) \text{ В.}$$

4 Построить векторную диаграмму токов и потенциальную диаграмму напряжений на одной комплексной плоскости.

Построение векторной диаграммы токов рассмотрено выше в примере 4.1.

Построения топографической диаграммы напряжений для данной схемы начинают с построения вектора напряжения на катушке индуктивности U_{L1} в соответствии с взаимным положением вектора тока и напряжения на этом участке. Из полученной точки откладывают два вектора напряжения U_{R2} и U_{C3}. Из конца вектора напряжения U_{R2} откладывают вектор напряжения U_{L2}, а из конца вектора U_{C3} – вектор напряжения U_{R3}. Два последних вектора сходятся в одной точке плоскости, соединив полученную точку с началом координат получают вектор напряжения, приложенного к зажимам схемы (рисунок 8).

5 Определить показания вольтметра, включенного между точками “*a*” и “*b*” цепи

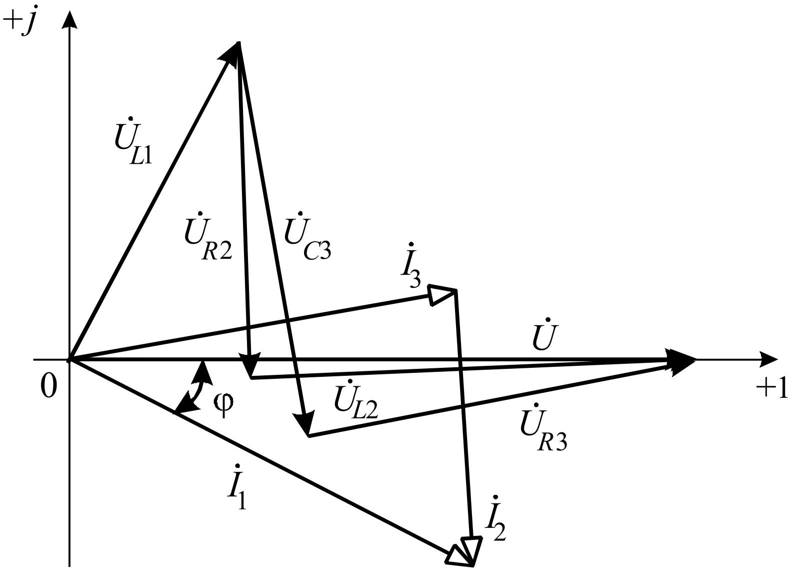


Рисунок 8

Выделим на заданной схеме контур *a*–3–*b*–*a* (рисунок 9). На основании второго закона Кирхгофа для выбранного контура запишем уравнение:

$$\dot{U}_{ab} + R_3\dot{I}_3 - jX_{L2}\dot{I}_2 = 0,$$

откуда

$$\dot{U}_{ab} = -R_3\dot{I}_3 + jX_{L2}\dot{I}_2 = -5 \cdot 15{,}137 \cdot e^{j10{,}194^0} + 8{,}011 \cdot e^{j90^0} \cdot 10{,}699 \cdot e^{-j88{,}002^0} =$$

$$= -75{,}687 \cdot e^{j10{,}194^0} + 85{,}714 \cdot e^{j1{,}998^0} = -74{,}492 - j13{,}395 + 85{,}662 + j2{,}998 =$$

$$= 11{,}17 - j10{,}407 = 15{,}267 \cdot e^{-j42{,}974^0} \text{ В.}$$

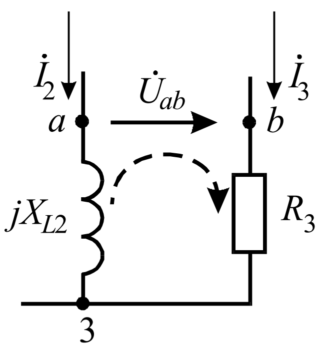


Рисунок 9

Вольтметр показывает действующее значение комплексного напряжения U_{ab}, которое равно его модулю, т.е. 15,267 В.

6 Определить показания ваттметра

Ваттметр имеет две обмотки: токовую (последовательную) и обмотку напряжения (параллельную). Начала обмоток обозначены звездочками и называются «генераторными зажимами». Положительное показание ваттметра соответствует протеканию потока мощности со стороны его генераторных зажимов. Для схемы (рисунок 6) ваттметр показывает активную мощность равную произведению модуля комплексного тока во второй ветви $\dot{I}_2$, модуля комплексного напряжения на зажимах U_{23} и косинуса угла сдвига фаз между током и напряжением:

$$P_w = \left|\dot{U}_{23}\right| \cdot \left|\dot{I}_2\right| \cdot cos\,\varphi = 107{,}089 \cdot 10{,}699 \cdot cos(-34{,}834 + 88{,}002) = 686{,}869 \text{ Вт.}$$

Список использованных источников

1 Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 247 с.

2 Сборник задач по электротехнике и основам электроники /Под ред. В.С.Пантюшина. – М.: Высшая школа, 1979. – 183 с.

3 Общая электротехника /Под ред. А.Т.Блажкина. – М.: Высшая школа, 1983. – 365 с

4 Дьяконов В.П. Справочник по MathCAD PLUS 6.0 PRO. – М.: «СК Пресс», 1997. – 336 с.

Приложение А

Задание начального индекса первого элемента массива

Производится набором с клавиатуры слова ORIGIN. Знак присвоения «:=» набирается «мышью» с наборной панели арифметических операторов на экране монитора или клавишей «:» (двоеточие) с клавиатуры.

ORIGIN:=1

Задание параметров элементов цепи

Задание параметров начинают с буквенного обозначения параметра. Затем следует присвоение числового значения. При наборе десятичных дробей знак, разделяющий целую и дробную части набирается с наборной панели на экране монитора клавишей «.» (точка). Показатель степени (верхний индекс) набирается также с наборной панели, в зависимости от показателя степени, либо клавишей «x^y», либо клавишей «x^2».

$U:=120 \qquad L1:=12.75\cdot10^{-3} \qquad R2:=6$

$f:=50 \qquad L2:=25.5\cdot10^{-3} \qquad R3:=5 \qquad C3:=636\cdot10^{-6}$

Определение реактивных сопротивлений элементов цепи

Используя формулу ω=2πf задаем формулы для определения реактивных сопротивлений. Число π задается с наборной панели на экране монитора. Для вывода результатов вычислений необходимо, чуть ниже расчетной формулы, набрать буквенное обозначение определяемой величины и поставить знак равенства с наборной панели или клавиатуры.

$$XL1:=2\cdot\pi\cdot f\cdot L1 \qquad XL2:=2\cdot\pi\cdot f\cdot L2 \qquad XC3:=\frac{1}{2\cdot p\cdot f\cdot C3}$$

$XL=4.006 \qquad XL2=8.011 \qquad XC3=5.005$

Определение полных электрических сопротивлений ветвей цепи

Полное электрическое сопротивление ветви задается как сумма активных и реактивных сопротивлений элементов ветви. Причем операция умножения величины реактивного сопротивления на мнимую единицу производится с оператора на экране монитора клавишей «i».

$Z1:=i\cdot XL1 \qquad Z2:=R2+i\cdot XL2 \qquad Z3:=R3-i\cdot XC3$

$Z1=4.006i \qquad Z2=6+8.011i \qquad Z3=5-5.005i$

Определение полного электрического сопротивления цепи (входное сопротивление)

$$Z\text{вх}:=Z1+\frac{Z2\cdot Z3}{Z2+Z3} \qquad Z\text{вх}=6.161+3.233i$$

Определение комплексного тока в неразветвленной части цепи

$I1 := \frac{U}{Zвх}$ I1=15.271-8.014i

Определение комплексного напряжения на зажимах 2-3

U23:=U-Z1·I1 U23=87.9-61.17i

Определение токов в параллельных ветвях цепи

$I2 := \frac{U23}{Z2}$ I2=0.373-10.693i

$I3 := \frac{U23}{Z3}$ I3=14.898+2.679i

Определение комплексных напряжений на отдельных элементах схемы

UL1:=I1·i·XL1 UL1=32.1+61.17i
UR2:=I2·R2 UR2=2.238-64.158i
UL2:=I2·i·XL2 UL2=85.662+2.988i
UC3:=I3·(-i·XC3) UC3=13.408-74.565i
UR3:=I3·R3 UR3=74.492+13.395i

Определение максимальных (амплитудных) значений синусоидально изменяющихся величин

При определении амплитудных значений используются модули определяемых величин, знак модуля, как и знак квадратного корня, набирают с панели арифметических операторов клавишами «| |» и «$\sqrt{\ }$».

I1max:=|I1|·$\sqrt{2}$ I1max=24.39
I2max:=|I2|·$\sqrt{2}$ I2max=15.131
I3max:=|I3|·$\sqrt{2}$ I3max=21.407
UL1max:=|UL1|·$\sqrt{2}$ UL1max=97.695
UR2max:=|UR2|·$\sqrt{2}$ UR2max=90.788
UL2max:=|UL2|·$\sqrt{2}$ UL2max=121.218
UC3max:=|UC3|·$\sqrt{2}$ UC3max=107.141
UR3max:=|UR3|·$\sqrt{2}$ UR3max=107.037

Определение начальных фаз синусоидально изменяющихся величин

Обозначать начальные фазы можно как латинскими (с клавиатуры), так и греческими (с оператора греческих букв и символов) буквами. Начальная фаза является аргументом комплексного числа, поэтому формула ее определения имеет вид шI:= arg(I). Необходимо знать, что для получения результата вычисления начальной фазы в градусах, в формулу вводят множитель 180/π (для перевода из радианой меры измерения угла).

$шI1 := arg(I1) \cdot \frac{180}{p}$ $шI1 = -27.689$

$шI2 := arg(I2) \cdot \frac{180}{p}$ $шI2 = -88.002$

$шI3 := arg(I3) \cdot \frac{180}{p}$ $шI3 = 10.194$

$шUL1 := arg(UL1) \cdot \frac{180}{p}$ $шUL1 = 62.311$

$шUR2 := arg(UR2) \cdot \frac{180}{p}$ $шUR2 = -88.002$

$шUL2 := arg(UL2) \cdot \frac{180}{p}$ $шUL2 = 1.998$

$шUC3 := arg(UC3) \cdot \frac{180}{p}$ $шUC3 = -79.806$

$шUR3 := arg(UR3) \cdot \frac{180}{p}$ $шUR3 = 10.194$

Баланс мощностей

Для проверки правильности расчета схемы составляют уравнения, определяющие мощность источников энергии и приемников схемы. В уравнении мощности источников сопряженный комплекс тока задается комбинацией клавиш «Shift»+«Э».

$Sist := U \cdot \overline{I1}$ $Sist = 1.833 \cdot 10^3 + 961.682i$

$P := (|I2|)^2 \cdot R2 + (|I3|)^2 \cdot R3$ $P = 1.833 \cdot 10^3$

$Q := (|I1|)^2 \cdot i \cdot XL1 + (|I2|)^2 \cdot i \cdot XL2 + (|I3|)^2 \cdot (-i \cdot XC3)$ $Q = 961.682i$

Определение показаний вольтметра

$Uab := I2 \cdot i \cdot XL2 - I3 \cdot R3$ $Uab = 11.17 - 10.407i$ $|Uab| = 15.267$

$шUab := arg(Uab) \cdot \frac{180}{p}$ $шUab = -42.974$

Определение показания ваттметра

$U23 := I2 \cdot Z2$ $U23 = 87.9 - 61.17i$ $шU23 := arg(U23) \cdot \frac{180}{p}$

$\varphi := шU23 - шI2$ $\varphi = 53.168$

$Pw := |U23| \cdot |I2| \cdot \cos\left(\varphi \cdot \frac{p}{180}\right)$ $Pw = 686.869$

$Pw1 := Re(U23 \cdot \overline{I2})$ $Pw1 = 686.869$