

Федеральное агентство по образованию  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный проект «Образование»  
Инновационная образовательная программа ННГУ. Образовательно-научный центр  
«Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и  
математическое обеспечение»

В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман

Современные методы пространственной обработки  
сигналов в информационных системах  
с антенными решетками

*Учебно-методические материалы по программе повышения  
квалификации «Новые подходы к проблемам генерации, обработки,  
передачи, хранения, защиты информации и их применение»*

Нижний Новгород

2007

*Учебно-методические материалы подготовлены в рамках инновационной образовательной программы ННГУ: Образовательно-научный центр «Информационно-телекоммуникационные системы: физические основы и математическое обеспечение»*

Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Современные методы пространственной обработки сигналов в информационных системах с антенными решетками. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Новые подходы к проблемам генерации, обработки, передачи, хранения, защиты информации и их применение». Нижний Новгород, 2007, 99 с.

Аннотация. Рассматриваются статистические свойства основных пространственных моделей сигналов и помех, характерных для активных радиолокационных систем, а также для систем мобильной беспроводной связи. Анализируются основные критерии эффективности адаптивных антенных решеток (ААР) и методы синтеза оптимального весового вектора ААР при точно известной корреляционной матрице помехи. Изучаются адаптивные методы обработки сигналов в ААР, когда вместо точной КМ помехи используется ее максимально правдоподобная оценка по выборкам входного процесса при его произвольной длине. Значительное место уделяется регуляризованным методам построения весового вектора ААР в случае короткой выборки входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа приемных каналов ААР. Учебно-методические материалы сформированы на основе отечественной и зарубежной литературы, а также оригинальных исследований авторов.

© Ермолаев В.Т., Флакман А.Г.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время наблюдается интенсивное развитие теории адаптивной пространственной обработки сигналов в многоканальных антенных решетках [1-6], которые находят широкое применение в информационных системах различного назначения (радиосвязь, радиолокация, акустика, оптика, сейсмология и т.д.) [7-9].

Одной из главных проблем в быстро развивающейся области беспроводных систем связи является значительное увеличение скорости передачи данных и повышение качества обслуживания пользователей (уменьшение вероятности ошибки). Эта проблема особенно актуальна в мобильных (сотовых) системах связи, работающих в сложных и быстроменяющихся условиях распространения сигналов.

В системах радиолокации и акустики актуальной является проблема выделения полезных сигналов из аддитивной смеси с помехами при отсутствии априорной информации о помеховой обстановке. В этом случае пространственная обработка сигналов в адаптивных антенных решетках (ААР) заключается в определении весового вектора, обеспечивающего автоматическое формирование глубоких провалов в диаграмме направленности (ДН) в направлении на источники помехи.

Очевидно, что основные модели сигналов и помех, характерные для адаптивных радиолокационных систем и систем мобильной связи, существенно отличаются друг от друга. Для радиолокационных систем полезный сигнал – это сигнал, отраженный от цели, которую можно считать точечным объектом с практически нулевыми угловыми размерами. Источники активных шумовых помех располагаются в произвольных направлениях относительно ААР и также имеют нулевые угловые размеры. Сигналы и помехи распространяются в свободном пространстве. Только в области малых углов места необходимо наряду с прямым сигналом учитывать сигнал, отраженный от земной поверхности.

В системах мобильной связи канал распространения между базовой станцией (БС) и мобильной станцией (МС) (пользователем), особенно в городских условиях, характеризуется наличием большого числа рассеивателей. Это, в частности, приводит к угловой дисперсии в пространственном канале, когда источник сигнала воспринимается приемной антенной не как точечный, а как распределенный в пространстве. Более того, угловые размеры, наблюдаемые на БС и МС, обычно значительно отличаются друг от друга.

Для поиска весового вектора адаптивных антенных систем, в основном используются такие критерии эффективности, как: минимум среднеквадратической ошибки (СКО); максимум отношения средней мощности сигнала к средней мощности помехи (ОСШ); максимум функции правдоподобия и минимум дисперсии шума. При использовании любого из этих критериев основная сложность связана с обращением выборочной корреляционной матрицы (КМ) входного процесса в приемных антеннах. Эта матрица играет важную роль в теории ААР, являясь отображением помеховой обстановки в ААР и определяя, в конечном счете, все ее основные характеристики.

Для синтеза весового вектора часто используются итерационные асимптотически-оптимальные процедуры, которые осуществляются относительно всех комплексных весовых коэффициентов ААР независимо от вида помеховой обстановки и, в частности, независимо от числа источников помехи. Однако в практически наиболее важном случае число источников помехи является значительно меньшим числа приемных каналов радиолокационной системы. Физически очевидно, что при этом адаптация может быть обеспечена за счет автоматической регулировки меньшего числа параметров.

Число выборок входного процесса может быть различным в зависимости от времени стационарности входного процесса. Для многоэлементных ААР важное практическое значение имеет случай короткой выборки входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа приемных каналов ААР, а оценочная КМ становится вырожденной. Другими словами, короткая выборка не обладает достаточной информативностью для оценки весового вектора ААР и возникает необходимость использования априорных данных. При этом возникают вопросы выбора априорных данных.

Учебно-методические материалы сформированы на основе отечественной и зарубежной литературы, а также оригинальных исследований авторов.

В первой главе изучаются пространственные свойства основных моделей сигналов и помех для активных радиолокационных систем, а также для систем беспроводной связи. Рассматривается модель Кларка для сигналов, принимаемых МС, а также круговая и гауссовская модели многолучевого канала для сигналов, принимаемых БС. Оригинальной в этой главе является гауссовская модель многолучевого канала, которая дает достаточно хорошее совпадение с известными экспериментальными данными.

Вторая глава посвящена анализу основных критериев эффективности и синтезу оптимального весового вектора адаптивной антенной системы при точно известной КМ помехи. Рассматривается метод собственных векторов КМ помехи и метод степенных

векторов. В отдельном подразделе исследуется эффективность квазиоптимальной обработки при ограничении степенного базиса (частичная адаптация). Оригинальным является метод разложения весового вектора по степенным векторам, образованным циклическим воздействием КМ помехи на вектор полезного сигнала.

В третьей главе рассматриваются адаптивные методы обработки сигналов в антенных решетках, когда вместо точной КМ помехи используется ее максимально правдоподобная (МП) оценка (так называемая выборочная КМ). Приводится вывод МП оценки КМ при произвольной длине входного процесса. Исследуется эффективность метода непосредственного обращения выборочной КМ, метода рекуррентного обращения выборочной КМ, а также метода степенных векторов.

В последней, четвертой главе, изучаются так называемые регуляризованные методы построения весового вектора ААР при короткой выборке входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа приемных каналов ААР. Анализируется метод собственных векторов КМ помехи. Рассматривается регуляризация решения на основе стабилизирующего функционала или обращения регуляризованной КМ помехи, а также оригинальная пороговая техника для адаптивной оценки размерности степенного базиса. Приводятся результаты компьютерного моделирования для эффективности адаптивной обработки с помощью данных методов в различных помеховых ситуациях. Оцениваются вычислительные затраты, необходимые для реализации соответствующих методов обработки сигналов.

## ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ПОМЕХ

### 1.1. Исходные соотношения

ААР наиболее часто используются в активных радио- и гидролокационных системах. В настоящее время ААР начинают применяться в перспективных радиосистемах мобильной связи. Очевидно, что основные модели сигналов и помех, характерные для адаптивных радиолокационных систем и систем мобильной связи, существенно отличаются друг от друга.

Для радиолокационных систем цели, от которых отражается полезный сигнал, можно считать «точечными» объектами с очень малыми (практически равными нулю) угловыми размерами. Источники активных шумовых помех располагаются в произвольных направлениях относительно ААР и также имеют нулевые угловые размеры. Сигналы и помехи распространяются в свободном пространстве. Только в области малых углов места необходимо наряду с прямым сигналом учитывать сигнал, отраженный от земной поверхности.

В системах мобильной связи канал распространения между БС и МС (пользователем), особенно в городских условиях, характеризуется наличием большого числа мелкомасштабных рассеивателей (переотражателей) сигнала. Это приводит к угловой дисперсии, когда «точечный» источник сигнала воспринимается приемной антенной как распределенный в пространстве источник. Другими словами, БС «видит» пользователя в некотором угловом секторе, размер которого является случайным из-за случайного числа рассеивателей и их случайного положения в пространстве. Аналогично, БС также является распределенным в пространстве источником для пользователя. Как правило, антенны БС расположены на высоких зданиях, а антенны пользователя – вблизи земной поверхности. Поэтому, мелкомасштабные рассеиватели находятся вблизи МС, окружая ее со всех сторон, и достаточно далеко от БС. Следовательно, угловые дисперсии, наблюдаемые на БС и МС, могут значительно отличаться друг от друга.

Рассмотрим основные модели сигналов и помех, используемых в ААР различного назначения. Структурная схема ААР приведена на рис. 1.1. ААР состоит из  $N$  первичных приемных антенных каналов, на выходе каждого из которых имеется смесь полезного сигнала, собственного шума и мешающих сигналов от внешних источников помехи. В дальнейшем собственный шум и внешние помеховые сигналы будем объединять, и называть помехой. Обозначим  $s_p$  и  $x_p$  – соответственно полезный сигнал и помеху на выходе  $p$ -го приемного канала. Коэффициенты передачи приемных каналов

$(w_1^*, w_2^*, \mathbf{K}, w_N^*)$  являются адаптивно регулируемыми комплексными числами, то есть обеспечивают регулировку амплитуды и фазы принятых сигналов и помех в соответствии с выбранным критерием качества.

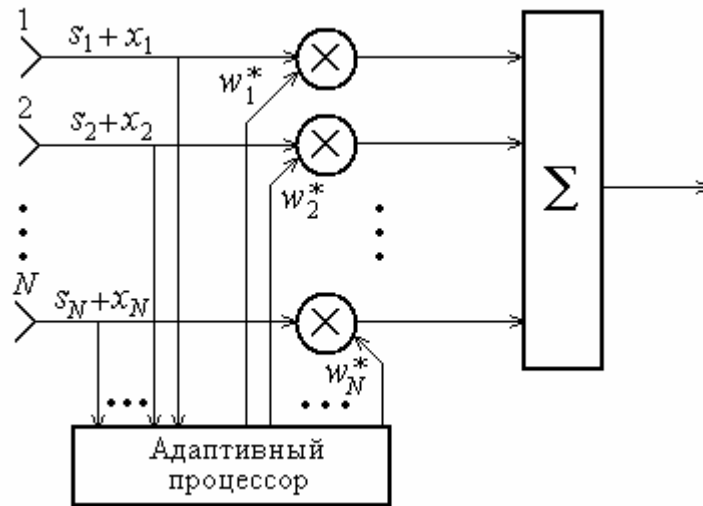


Рис. 1.1. Структурная схема ААР

Операция комплексного взвешивания узкополосных сигналов в ААР обычно осуществляется с помощью устройства с квадратурными каналами. Входной сигнал в  $p$ -ой приемной антенне разделяется на синфазную и квадратурную составляющие с помощью фазовращателя, осуществляющего сдвиг фазы на 90 град. Каждая из составляющих затем подвергается операции умножения на действительный весовой коэффициент  $w_p'$  и  $w_p''$ , после чего результаты умножения суммируются, и формируется выходной сигнал. Результирующий комплексный коэффициент передачи равен  $w_p^* = |w_p| e^{ij_p}$ , где  $|w_p|^2 = (w_p')^2 + (w_p'')^2$ ,  $tg j_p = -w_p''/w_p'$ .

После умножения и суммирования полезный сигнал и помеху можно записать в виде

$$s = \sum_{j=1}^N w_j^* s_j, \quad x = \sum_{j=1}^N w_j^* x_j. \quad (1.1.1)$$

Введем в рассмотрение  $N$ -элементные векторы-столбцы сигнала  $\mathbf{S}=(s_1, s_2, \dots, s_N)^T$ , помехи  $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$  и весовых коэффициентов  $\mathbf{W}=(w_1, w_2, \dots, w_N)^T$ , где  $(\cdot)^T$  обозначает операцию транспонирования. Тогда в векторной форме формулы (1.1.1) принимают следующий вид:

$$s = \mathbf{W}^H \mathbf{S}, \quad x = \mathbf{W}^H \mathbf{X}, \quad (1.1.2)$$

где  $(.)^H$  – знак эрмитового сопряжения (одновременного транспонирования и комплексного сопряжения).

Как мы увидим ниже, фундаментальную роль в теории и технике ААР играет корреляционная матрица (КМ) помехи в приемных каналах равная  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle$ , где  $\langle \dots \rangle$  обозначает статистическое среднее. Однако, в общем случае, мы можем найти КМ  $\mathbf{M}_\Sigma$  всего входного процесса, который является смесью полезного сигнала (вектор  $\mathbf{S}$ ) и помехи (вектор  $\mathbf{X}$ ). Эта матрица равна  $\mathbf{M}_\Sigma = \langle (\mathbf{S} + \mathbf{X})(\mathbf{S} + \mathbf{X})^H \rangle$ .

Учтем далее, что активные радиолокационные системы обычно формируют импульсные сигналы, распространяющиеся через среду и отражающиеся некоторой целью в обратном направлении. Длительность импульсов выбирается значительно меньше их периода повторения. Поэтому, полезный сигнал отсутствует в течение большей части времени приема. В то же время внешние активные помехи и собственные шумы являются непрерывными по времени. Заменяя усреднение по ансамблю реализаций усреднением по времени и пренебрегая вкладом сигнала, получим, что  $\mathbf{M}_\Sigma \approx \mathbf{M}$ . Таким образом, КМ помехи в таких системах можно оценить на основе усреднения входного процесса.

Для систем связи характерна непрерывная передача импульсов, при которой полезный сигнал, как и помехи всегда присутствует на входе системы. В таких системах нельзя выделить КМ  $\mathbf{M}$  помехи из КМ  $\mathbf{M}_\Sigma$  входного процесса. Естественно считать, что сигнал не коррелирован с внешней помехой и собственными шумами. Тогда КМ  $\mathbf{M}_\Sigma$  входного процесса равна сумме КМ сигнала  $\mathbf{M}_s = \langle \mathbf{S}\mathbf{S}^H \rangle$  и КМ помехи  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle$ , то есть  $\mathbf{M}_\Sigma = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}$ .

## 1.2. Модели источников помехи для активных радиолокационных адаптивных систем

КМ помехи описывает статистические свойства помехи в приемных каналах ААР. В развернутом виде КМ  $\mathbf{M}$  может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \langle x_1 x_1^* \rangle & \langle x_1 x_2^* \rangle & \dots & \langle x_1 x_N^* \rangle \\ \langle x_2 x_1^* \rangle & \langle x_2 x_2^* \rangle & \dots & \langle x_2 x_N^* \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle x_N x_1^* \rangle & \langle x_N x_2^* \rangle & \dots & \langle x_N x_N^* \rangle \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

Диагональные элементы  $\mathbf{M}_{ii}$  КМ дают средние мощности помехи в соответствующих приемных каналах ААР. Недиагональные элементы  $\mathbf{M}_{ij}$  являются корреляционными



моментами помехи в различных каналах. Из свойств корреляционных моментов имеем, что  $\langle x_p x_q^* \rangle = \langle x_q x_p^* \rangle$ . Следовательно, КМ  $\mathbf{M}$  обладает важным свойством эрмитовости, то есть  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^H$ , или в элементной записи  $M_{pq} = M_{qp}^*$ .

Учтем, что даже в отсутствии внешних помех в системе всегда имеются собственные шумы приемных устройств. Поэтому квадратичная форма, построенная с помощью КМ  $\mathbf{M}$ , является положительно определенной, то есть  $\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W} > 0$  для произвольного вектора  $\mathbf{W}$ . Следовательно, все собственные числа КМ  $\mathbf{M}$  – действительные и положительные числа.

Рассмотрим теперь некоторые помеховые ситуации и соответствующие им представления матрицы  $\mathbf{M}$ .

1. Помеха создается только собственными шумами приемных каналов ААР, которые являются статистически независимыми. Поэтому КМ  $\mathbf{M}$  будет иметь диагональный вид с элементами  $M_{pq} = s_p^2 d_{pq}$ , где  $s_p^2$  – мощность шума в  $p$ -ом канале,  $d_{pq}$  – символ Кронекера. Часто считают, что собственные шумы во всех каналах имеют одинаковую мощность ( $s_p^2 = s_0^2$ ). Тогда КМ  $\mathbf{M}$  принимает вид

$$\mathbf{M} = s_0^2 \mathbf{I}, \quad (1.2.2)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Все  $N$  собственных чисел такой КМ равны между собой ( $I_1 = I_2 = \dots = I_N = s_0^2$ ), а в качестве собственных векторов могут быть выбраны любые  $N$  ортогональных векторов.

2. Помеха создается собственным шумом и одним внешним источником. В этом случае вектор помехи можно записать в виде

$$\mathbf{X} = a_1 \mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{N}, \quad (1.2.3)$$

где  $a_1$  – случайная комплексная амплитуда помехи в некоторой заранее выбранной точке, например, в начале координат, которое можно выбрать в фазовом центре любой из  $N$  антенн;  $\mathbf{\Phi}_1$  – детерминированный вектор волнового фронта (так называемый вектор помехи), определяющий значения комплексных амплитуд внешней помехи в элементах ААР относительно начала координат;  $\mathbf{N}$  – вектор случайных комплексных амплитуд собственного шума в приемных каналах ААР.

Пусть начало координат совпадает с фазовым центром первой антенны. Тогда для линейной эквидистантной ААР, расположенной в свободном пространстве (случай плоских волн), вектор внешней помехи можно записать в виде:

$$\Phi_1 = \{1, \exp(ju_1), \exp(2ju_1), \mathbf{K}, \exp[(N-1)ju_1]\}^T, \quad (1.2.4)$$

где  $u_1 = 2pd_1 \sin q_1$  - обобщенная угловая координата источника помехи;  $d_1$  - период ААР, отнесенный к длине волны;  $q_1$  - угол в направлении на источник помехи относительно нормали к ААР.

Естественно предположить, что внешняя помеха и собственный шум ААР являются статистически независимыми между собой. Тогда, с помощью (1.2.2) и (1.2.3), для КМ помехи получим, что

$$\mathbf{M} = \langle (a_1 \Phi_1 + \mathbf{N})(a_1 \Phi_1 + \mathbf{N})^H \rangle = \langle |a_1|^2 \rangle \Phi_1 \Phi_1^H + s_0^2 \mathbf{I}. \quad (1.2.5)$$

Таким образом, КМ помехи представляет собой сумму КМ внешней помехи и собственного шума.

Обозначим  $n_1 = \langle |a_1|^2 \rangle / s_0^2$  - отношение мощности внешней помехи к мощности собственного шума в отдельном приемном канале ААР, которую без ограничения общности будем считать единичной ( $s_0^2 = 1$ ). Тогда выражение (1.2.5) принимает вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + n_1 \Phi_1 \Phi_1^H. \quad (1.2.6)$$

Максимальное собственное число КМ  $\mathbf{M}$  равно  $I_1 = 1 + n_1 \Phi_1^H \Phi_1$ , а остальные  $(N-1)$  собственных чисел одинаковые и равны мощности шума: ( $I_2 = I_3 = \mathbf{K} = I_N = 1$ ). Максимальному собственному числу  $I_1$  соответствует собственный вектор  $\mathbf{U}_1$ , который совпадает с вектором помехи  $\mathbf{U}_1 = (\Phi_1^H \Phi_1)^{-1/2} \Phi_1$ . В качестве остальных собственных векторов могут быть выбраны любые  $(N-1)$  векторов, ортогональных между собой и с вектором  $\mathbf{U}_1$ .

В случае линейной эквидистантной ААР и плоских волн из (1.2.4) следует, что  $\Phi_1^H \Phi_1 = N$ . Поэтому, максимальное собственное число  $I_1 = 1 + n_1 N$ , а собственный вектор  $\mathbf{U}_1 = \Phi_1 / \sqrt{N}$ .

**3.** Помеха создается несколькими взаимно некоррелированными внешними источниками и собственным шумом. В этом случае вектор помехи равен

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J a_j \Phi_j + \mathbf{N}, \quad (1.2.8)$$

где  $J$  - число источников помехи.

Некоррелированность помеховых сигналов отдельных источников приводит к тому, что КМ помехи будет равна сумме помеховых КМ отдельных источников, т.е.

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^J n_j \Phi_j \Phi_j^H. \quad (1.2.9)$$

Рассмотрим пример, когда помеха создается двумя некоррелированными источниками. Тогда, согласно (1.2.9), КМ  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + n_1 \Phi_1 \Phi_1^H + n_2 \Phi_2 \Phi_2^H. \quad (1.2.10)$$

Собственные числа этой матрицы равны [10]:

$$\begin{cases} I_{1,2} = 1 + \frac{N(n_1 + n_2)}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2(n_1 - n_2)^2}{4} + n_1 n_2 |\Phi_1^H \Phi_2|^2}; \\ I_3 = I_4 = \mathbf{K} = I_N = 1. \end{cases} \quad (1.2.11)$$

При произвольном расположении источников скалярное произведение  $\Phi_1^H \Phi_2$  векторов помехи отлично от нуля. Первые два собственных числа  $I_1$  и  $I_2$  в (1.2.11) имеют единичную кратность. Собственное число  $I_3$  имеет кратность, равную  $N-2$ . Собственные векторы  $\mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{U}_2$ , соответствующие собственным числам  $I_1$  и  $I_2$ , представляют собой линейную комбинацию векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ .

Если векторы помехи ортогональны ( $\Phi_1^H \Phi_2 = 0$ ), то максимальное (первое) собственное число равно  $I_1 = 1 + N(n_1 + n_2)$ , а второе собственное число становится равным шумовым собственным числам ( $I_2 = I_3 = \mathbf{K} = I_N = 1$ ).

**4.** Помеха создается несколькими произвольным образом коррелированными внешними источниками и собственным шумом. В этом наиболее общем случае КМ  $\mathbf{M}$  имеет следующий вид [2,3]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \Phi_\Sigma \mathbf{V} \Phi_\Sigma^H, \quad (1.2.12)$$

где  $\Phi_\Sigma = \{\Phi_1, \Phi_2, \mathbf{K}, \Phi_J\}$  - матрица размера  $N \times J$ , составленная из векторов-столбцов  $\Phi_j$ ;  $\mathbf{V}$  - квадратная матрица размера  $J \times J$ , элементы  $\mathbf{V}_{ij}$  которой представляют собой взаимную

мощность помех, создаваемых  $i$ -ым и  $j$ -ым источниками,  $\mathbf{V}_{ij}=(n_i n_j)^{0.5} r_{ij}$ , где  $r_{ij}$  - коэффициент корреляции этих источников.

Рассмотрим случай, когда помеха создается двумя коррелированными внешними источниками и собственным шумом. Такая ситуация имеет место в радиолокационных системах при воздействии одного источника активной помехи с малых углов места, когда наряду с прямым сигналом существенным является сигнал, отраженный от земной поверхности. Эти два сигнала можно считать образованными разными источниками, которые являются коррелированными между собой. Тогда матрица  $\mathbf{V}$  в (1.2.12) равна

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 v_2 & v_1 v_2 r_{12} \\ v_1 v_2 r_{12}^* & v_1 v_2 \end{pmatrix}. \quad (1.2.13)$$

Пусть также сигналы распространяются в виде плоских волн. Обозначим коэффициент корреляции  $r_{12} = |r_{12}| \cdot \exp(jj_{12})$ . Тогда собственные числа КМ  $\mathbf{M}$  равны [10]:

$$I_{1,2} = 1 + \frac{N(n_1 + n_2)}{2} + N\sqrt{n_1 n_2} g_{12} |r_{12}| \cos j_{12} \pm \sqrt{\left[ \frac{N(n_1 + n_2)}{2} + N\sqrt{n_1 n_2} g_{12} |r_{12}| \cos j_{12} \right]^2 - n_1 n_2 N^2 (1 - g_{12}^2) (1 - |r_{12}|^2)}, \quad (1.2.14)$$

где  $g_{12} = \frac{\sin[0.5N(u_1 - u_2)]}{N \sin[0.5(u_1 - u_2)]}$ .

При полной корреляции источников помехи ( $|r_{12}| = 1$ ) из (1.2.14) имеем, что

$$I_1 = 1 + (n_1 + n_2)N + 2\sqrt{n_1 n_2} N g_{12} \cos j_{12}, \quad I_2 = 1, \quad (1.2.15)$$

то есть второе собственное число совпадает с шумовыми собственными числами.

В общем случае, если число источников помехи больше числа степеней свободы ААР ( $J > N - 1$ ), то подпространство внешней помехи охватывает все  $N$ -мерное пространство, а все собственные числа КМ  $\mathbf{M}$  превышают мощность собственного шума ( $I_i > 1$ ) ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). При достаточно малом числе источников помехи, меньшем или равном числу степеней свободы ААР ( $J \leq N - 1$ ), собственные числа КМ  $\mathbf{M}$  разделяются на две группы. К первой – относятся собственные числа, превышающие мощность собственного шума и связанные с подпространством внешних источников помехи. Число таких собственных чисел зависит от параметров помеховой обстановки (взаимное угловое положение источников, их мощности и коэффициенты корреляции) и не может превышать числа источников  $J$ . Ко второй группе относятся остальные собственные числа, равные

мощности шума, и связанные с шумовым подпространством. Собственные векторы, соответствующие собственным числам первой группы образуют подпространство помехи, а остальные собственные векторы – шумовое подпространство.

Что касается источника полезного сигнала, то для активных радиолокационных систем обычно его можно считать «точечным» объектом с очень малыми (практически равными нулю) угловыми размерами. Угловое направление на источник задается вектором  $\Phi_0$ , а его комплексная амплитуда – величиной  $a_0$ , то есть вектор сигнала  $\mathbf{S}$  в (1.1.2) можно записать как  $\mathbf{S} = a_0 \Phi_0$ , а КМ полезного сигнала – как

$$\mathbf{M}_s = \langle |a_0|^2 \rangle \Phi_0 \Phi_0^H. \quad (1.2.16)$$

### **1.3. Модель Кларка для сигналов, принимаемых мобильной станцией системы связи**

Полезный сигнал, принимаемый МС (пользователем), представляет собой сумму сигналов, отраженных от различных рассеивателей, располагающихся вокруг пользователя случайным образом. Сигналы отдельных рассеивателей статистически независимы между собой. Поэтому, мощность излучения, падающего на антенную систему МС с некоторого углового сектора, будет пропорциональна числу рассеивателей, находящихся в этом секторе.

При построении пространственных моделей источника сигнала для беспроводных систем связи обычно делается несколько следующих предположений [11,12]:

а) считается, что высота БС и МС значительно меньше расстояния между ними, а высота БС значительно больше высоты МС. Поэтому часто трехмерную модель заменяют двумерной (горизонтальной) моделью, при которой все сигналы распространяются только в азимутальной плоскости. Влияние земной поверхности учитывается с помощью формулы Введенского [13], из которой следует, что мощность принятого сигнала пропорциональна произведению квадрата высот расположения передающей и приемной антенн и обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними. Эта формула является приближенной и справедлива для гладкой земной поверхности. Реальные поверхности всегда являются «шероховатыми» и на них имеются рассеиватели с различными размерами. Однако результаты многочисленных экспериментов показывают, что принимаемая мощность пропорциональна  $\sim r^{-a}$ , где параметр  $a$  изменяется в

пределах от 3,5 до 4,5. Следовательно, формула Введенского достаточно хорошо аппроксимирует среднюю принимаемую мощность в системах связи.

б) каждый рассеиватель имеет изотропную диаграмму рассеивания, а его коэффициент отражения имеет единичную амплитуду и случайную фазу;

в) многократные переотражения сигналов не учитываются;

г) вероятность местоположения рассеивателей не зависит от азимутального угла.

Наиболее известной и часто применяемой является классическая модель Кларка [11,12]. Она предполагает равномерное распределение рассеивателей в кольце радиусом  $r_0$  с центром в точке расположения антенны МС, то есть сигнал БС принимается пользователем со всех направлений (см. рис. 1.2). Таким образом, функция  $p(r,q)$  плотности вероятности расположения рассеивателей вокруг антенны МС имеет вид

$$p(r,q) = p(q) \cdot p(r) = \frac{1}{2\pi} d(r - r_0), \quad (1.3.1)$$

где  $(r,q)$  – полярная система координат с центром в месте расположения МС,  $r$  – расстояние от МС до рассеивателей. Отсюда следует, что для модели Кларка плотность вероятности попадания рассеивателя в кольцо радиусом  $r$  равна  $p(r) = d(r - r_0)$ , а плотность вероятности углового распределения рассеивателей является изотропной  $p(q) = \frac{1}{2\pi}$ .

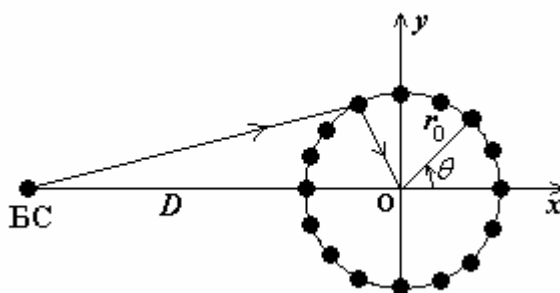


Рис. 1.2. Модель Кларка

Для отыскания КМ сигналов в приемных антеннах необходимо найти коэффициент корреляции сигналов в двух антеннах, разнесенных на произвольное расстояние  $d$ . Рассмотрим плоскую волну, падающую на антенную решетку под углом  $q$  к ее нормали. Нетрудно получить с помощью (1.2.4), что коэффициент корреляции равен

$$r_{cor}(d_1) = \exp(j2pd_1 \sin q), \quad (1.3.2)$$

Если источник является распределенным в пространстве и плотность вероятности углового распределения рассеивателей определяется функцией  $p(q)$ , то коэффициент корреляции может быть найден из следующего интеграла:

$$r_{cor}(d_1) = \int_{-p}^p \exp(j2pd_1 \sin q) p(q) dq. \quad (1.3.3)$$

Для модели Кларка имеем, что коэффициент корреляции замираний сигналов в двух антеннах пользователя, разнесенных на расстояние  $d$ , определяется функцией Бесселя  $J_0$  первого рода нулевого порядка и имеет вид

$$r_{cor}(d_1) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p \exp(j2pd_1 \sin q) p(q) dq = J_0(2pd_1). \quad (1.3.4)$$

Функция Бесселя  $J_0$  при увеличении аргумента уменьшается, имея осциллирующий характер. Она имеет первый ноль при  $2pd_1 = 2.4$ . Поэтому, пространственный интервал корреляции для антенн пользователя, определенный по нулевому уровню, составляет  $d_1 = 0.38$ , то есть меньше периода  $d$  ААР. Следовательно, сигналы в различных приемных антеннах пользователя практически всегда можно считать некоррелированными между собой. При этом КМ сигналов, принимаемых антеннами МС, будет диагональной.

#### **1.4. Основные модели сигналов, принимаемых базовой станцией системы связи**

**Круговая модель многолучевого канала.** Угловая дисперсия сигнала, наблюдаемого на БС, может значительно отличаться от угловой дисперсии сигнала, принимаемого МС. Классическая модель Кларка предполагает равномерное распределение рассеивателей в кольце с центром в точке расположения антенны МС, то есть сигнал БС принимается пользователем со всех направлений. В то же время антенна БС часто располагается над зданиями, и поэтому сигналы от МС принимаются антенной БС в некотором угловом секторе значительно меньшем  $2p$ . В [14] предложена круговая модель многолучевого канала, основанная на предположении, что рассеиватели равномерно распределены внутри окружности с центром в точке расположения МС.

Для этой модели остаются в силе предположения а), б) и с), сделанные выше для модели Кларка. Что касается последнего предположения относительно распределения рассеивателей, то считается, что они равновероятно распределены внутри окружности

радиуса  $r_0$  с центром в точке расположения антенны МС. Таким образом, антенна БС принимает рассеянные сигналы не со всех направлений, а в некотором азимутальном секторе (см. рис. 1.3 - слева).

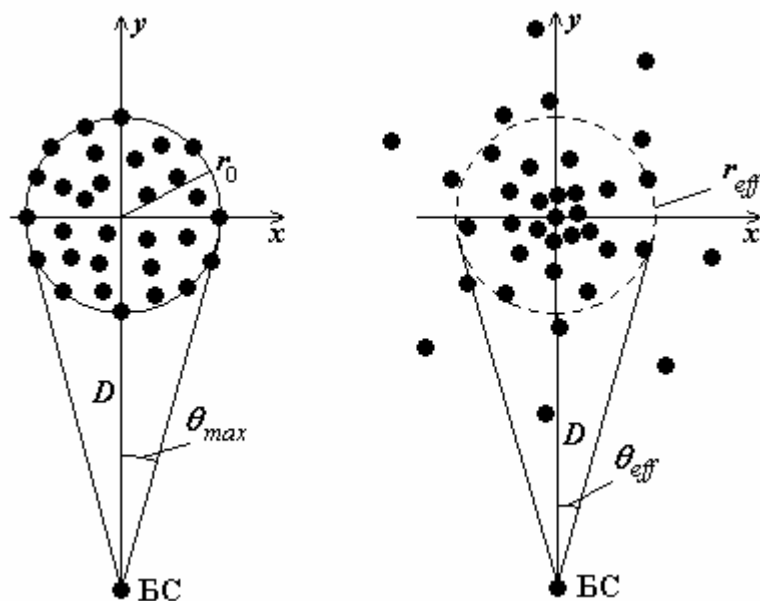


Рис. 1.3. Круговая модель (слева) и гауссовская модель многолучевого канала (справа)

Для определения угловой дисперсии в пространственном канале необходимо найти угловое распределение рассеивателей при приеме сигнала антенной БС. Функция плотности вероятности углового распределения рассеивателей для круговой модели многолучевого канала имеет вид [14]

$$p(q) = \frac{2 \cos q \sqrt{\sin^2 q_{\max} - \sin^2 q}}{p \sin^2 q_{\max}} \quad (-q_{\max} \leq q \leq q_{\max}), \quad (1.4.1)$$

где  $\sin q_{\max} = r_0/D$ ,  $D$  – расстояние между БС и МС. Величина  $2q_{\max}$  представляет собой угловой размер источника сигналов. Угловая ширина источника по половинному уровню функции  $p(q)$  составляет  $\approx 1.72\theta_{\max}$ . На рис. 1.4 представлены функции плотности вероятности  $p(q)$  углов прихода рассеянных сигналов для круговой модели при  $\theta_{\max} = 5, 10$  и  $20^\circ$ .



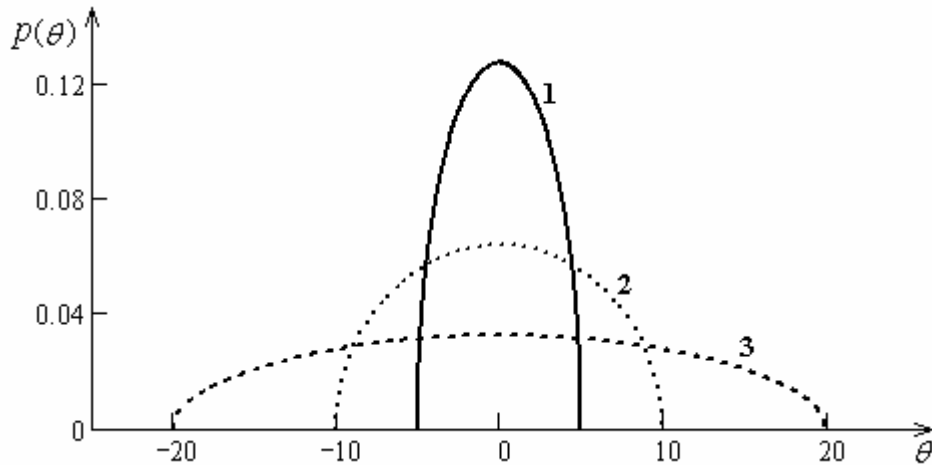


Рис. 1.4. Плотности вероятности углов прихода рассеянных сигналов для круговой модели при  $\theta_{max} = 5, 10$  и  $20^\circ$  (кривые 1,2,3, соответственно)

Пространственный коэффициент корреляции сигналов для круговой модели может быть найден из общего выражения (1.3.3), если в него подставить функции  $p(q)$  из (1.4.1). В результате будем иметь, что

$$r_{cor}(d_l) = \int_{-q_{max}}^{q_{max}} \exp(j2pd_l \sin q) \frac{2 \cos q \sqrt{\sin^2 q_{max} - \sin^2 q}}{p \sin^2 q_{max}} dq. \quad (1.4.2)$$

На рис. 1.5 показан коэффициент корреляции сигналов для  $\theta_{max} = 5, 10$  и  $20^\circ$ . Видно, что с увеличением угловых размеров источника пространственный размер корреляции рассеянных сигналов уменьшается. В частности, как следует из рис. 1.5, он составляет по половинному уровню  $d_l = 4, 2$  и  $1$ , соответственно.

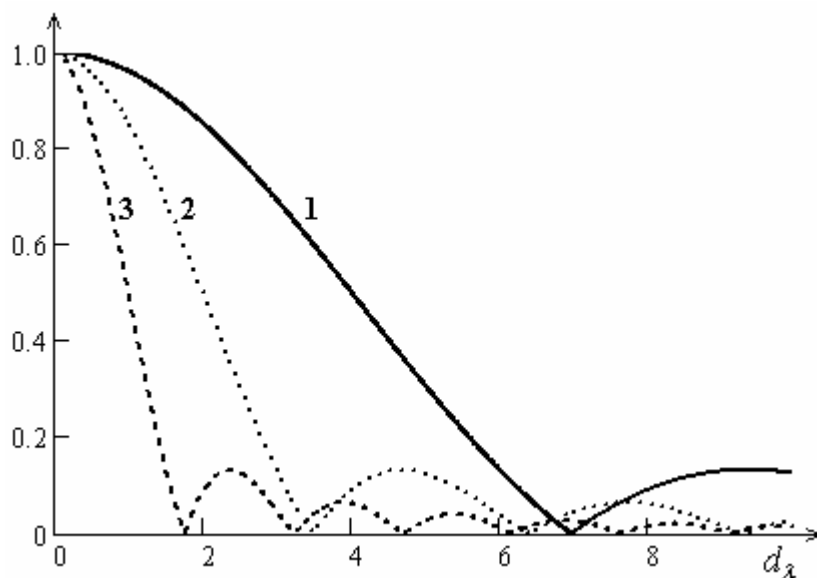


Рис. 1.5. Коэффициент корреляции сигналов в зависимости от относительного расстояния между

антеннами для круговой модели при  $\theta_{max}=5, 10$  и  $20^\circ$  (кривые 1,2,3, соответственно)

Выражение (1.4.2) получено в предположении, что центр протяженного источника находится в направлении нормали к линии, соединяющей два излучателя. Нетрудно видеть, что в общем случае расположения центра протяженного источника в произвольном направлении  $q_0$  выражение (1.4.2) должно быть умножено на осциллирующий множитель  $\exp(j2pd_l \sin q_0)$ .

**Гауссовская модель многолучевого канала.** Данная модель предложена и исследована в [15,16]. Ее отличие от круговой модели заключается в том, что рассеиватели могут находиться в любой точке горизонтальной плоскости. Однако вероятность их появления уменьшается по гауссовскому закону при удалении от МС. Все остальные предположения аналогичны сделанным для модели Кларка и круговой модели.

Таким образом, функция  $p(r, j)$  плотности вероятности расположения рассеивателей вокруг антенны МС имеет гауссовскую форму

$$p(r, j) = \frac{1}{\pi r_{eff}^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_{eff}^2}\right), \quad (1.4.3)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярная система координат с центром в месте расположения МС,  $r$  – расстояние от МС до рассеивателя,  $r_{eff}$  – эффективное расстояние, на котором функция  $p(r, \varphi)$  убывает в  $e$  раз (см. рис. 1.3 - справа).

Из (1.4.3) следует, что для гауссовской модели функция плотности вероятности попадания рассеивателя в кольцо радиусом  $r$  определяется релейевским распределением и равна

$$p(r) = \frac{2r}{r_{eff}^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_{eff}^2}\right). \quad (1.4.4)$$

Найдем функцию углового распределения рассеивателей, видимых из БС. Сначала перейдем в систему координат  $(x', y')$  с центром в точке нахождения БС, то есть  $x'=x$  и  $y'=y+D$ . Затем введем полярную систему координат  $(R, q)$ , такую, что  $x'=R\sin q$ ,  $y'=R\cos q$ , а угол  $q$  отсчитывается от линии соединяющей БС и МС. Нетрудно показать, что якобиан такого преобразования равен  $R$  и

$$r^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + (y' - D)^2 = R^2 - 2RD \cos q + D^2. \quad (1.4.5)$$

В результате такого преобразования из (1.4.3) получим, что

$$p(R, q) = \frac{R}{pr_{eff}^2} \cdot \exp\left(-\frac{D^2}{r_{eff}^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{R^2 - 2RD \cos q}{r_{eff}^2}\right). \quad (1.4.6)$$

Одномерная функция  $p(q)$  плотности вероятности распределения рассеивателей (угловая плотность мощности) может быть получена путем интегрирования функции  $p(R, q)$  в (1.4.6) по радиусу  $R$ . Следовательно

$$p(q) = \int_0^{\infty} p(R, q) dR = \frac{1}{pr_{eff}^2} \cdot \exp\left(-\frac{D^2}{r_{eff}^2}\right) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{R^2 - 2RD \cos q}{r_{eff}^2}\right) R dR. \quad (1.4.7)$$

Интеграл в (1.4.7) может быть вычислен аналитически. Учтем, что ([17], № 3.462.1)

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp(-bx^2 - gx) dx = (2b)^{-\nu/2} \Gamma(\nu) \exp\left(\frac{g^2}{8b}\right) C_{-\nu}\left(\frac{g}{\sqrt{2b}}\right), \quad (1.4.8)$$

где  $\text{Re}(\nu, b) > 0$ ,  $\Gamma(\nu)$  – гамма функция,  $C_p(z)$  – функция параболического цилиндра. В нашем случае  $\nu=2$ ,  $b = r_{eff}^{-2}$  и  $g = -2Dr_{eff}^{-2} \cos q$ . Однако, для  $\nu=2$ , то функция  $C_{-2}(z)$  может быть выражена через интеграл вероятности  $\Phi(z)$  ([17], № 9.254.2) в виде

$$C_{-2}(z) = -\exp\left(\frac{z^2}{4}\right) \sqrt{\frac{p}{2}} \left\{ z \left[ 1 - \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right] - \sqrt{\frac{2}{p}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \right\}, \quad (1.4.9)$$

где интеграл вероятности  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ .

Примем во внимание, что  $z = -\sqrt{2}Dr_{eff}^{-1} \cos q$ ,  $\Gamma(2)=1$  и  $\Phi(z)$  – нечетная функция аргумента  $z$ . В результате из (1.4.7) - (1.4.9) получим, что функция  $p(q)$  равна

$$p(q) = \frac{1}{2p} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sin^2 q_{eff}}\right) \left\{ 1 + \sqrt{p} \frac{\cos q}{\sin q_{eff}} \cdot \exp\left(\frac{\cos^2 q}{\sin^2 q_{eff}}\right) \cdot \left[ 1 + \Phi\left(\frac{\cos q}{\sin q_{eff}}\right) \right] \right\}, \quad (1.4.10)$$

где угол  $q_{eff}$  находится из условия  $\sin q_{eff} = r_{eff}/D$ .

Таким образом, функция плотности вероятности  $p(q)$  зависит только от  $\cos q$  и является четной функцией аргумента  $q$ .

Выражение (1.4.10) справедливо для произвольного углового размера источника. Однако для практических целей представляет интерес случай, когда рассеиватели расположены вблизи МС, так что угловое расширение является малым ( $\theta_{eff} \ll p$ ). Тогда (1.4.10) существенно упрощается и принимает вид:

$$p(q) \approx \frac{1}{\sqrt{pq_{eff}^2}} \cdot \exp\left(-\frac{q^2}{q_{eff}^2}\right), \quad (1.4.11)$$

то есть функция углового распределения рассеивателей представляет собой гауссовскую плотность вероятности с нулевым средним и дисперсией  $s^2 = 0.5q_{eff}^2$ .

На рис. 1.6 показана функция плотности вероятности  $p(q)$  для  $\theta_{eff}=10^\circ$ ;  $30^\circ$  и  $50^\circ$  (кривые 1, 2, 3, соответственно). Непрерывные кривые соответствуют точной формуле (1.4.10), а пунктирные – приближенной формуле (1.4.11). Видно, что точная и гауссовская функции плотности вероятности близки в достаточно большом интервале значений  $\theta_{eff}$  ( $0^\circ \leq \theta_{eff} \leq 30^\circ$ ).

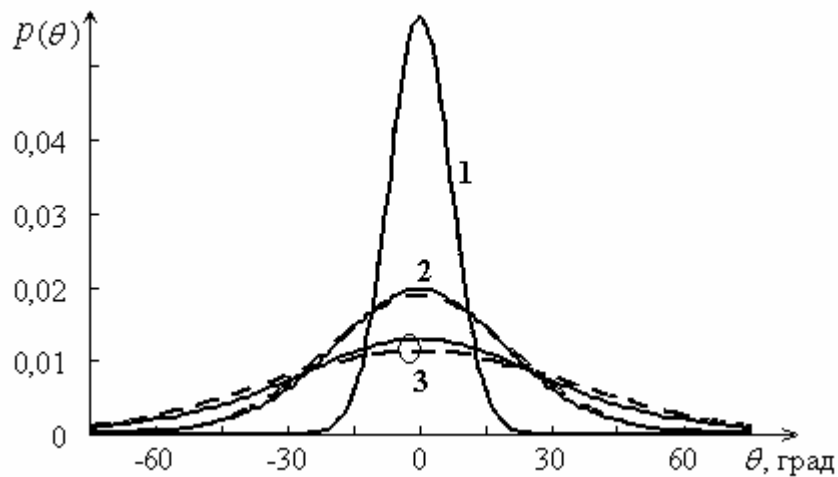


Рис. 1.6. Функция плотности вероятности для  $\theta_{eff}=10^\circ$ ;  $30^\circ$  и  $50^\circ$  (кривые 1, 2, 3) для точной (1.4.10) и приближенной (1.4.11) формул (непрерывные и пунктирные кривые, соответственно)

Пространственный коэффициент корреляции сигналов для гауссовской модели может быть найден из общего выражения (1.3.3), если в него подставить (1.4.10) или (1.4.11). В результате, используя (1.4.11), будем иметь, что

$$r_{cor}(d_1) = \int_{-p}^p \exp(j2pd_1 \sin q) \frac{1}{\sqrt{pq_{eff}^2}} \cdot \exp\left(-\frac{q^2}{q_{eff}^2}\right) dq. \quad (1.4.12)$$

Для источников с достаточно малым угловым расширением ( $\theta_{eff} \ll p$ ) пределы интегрирования в (1.4.12) можно расширить до бесконечности и учесть, что  $\sin q \approx q$ . В результате получим, что [17]

$$r_{cor}(d_1) \approx \exp\left(-p^2 d_1^2 q_{eff}^2\right). \quad (1.4.13)$$

Таким образом, зависимость коэффициента корреляции от расстояния между антеннами носит гауссовский характер. Коэффициент корреляции увеличивается при уменьшении угловой дисперсии в пространственном канале и, наоборот, уменьшается с ростом угловых размеров источника. Пространственный размер корреляции рассеянных сигналов по уровню  $1/e$  составляет  $d_1 = 1/pq_{eff}$ . На рис. 1.7 показан коэффициент корреляции сигналов для  $\theta_{max} = 5, 10$  и  $20^\circ$ , который составляет  $d_1 = 3.65, 1.83$  и  $0.91$ , соответственно.

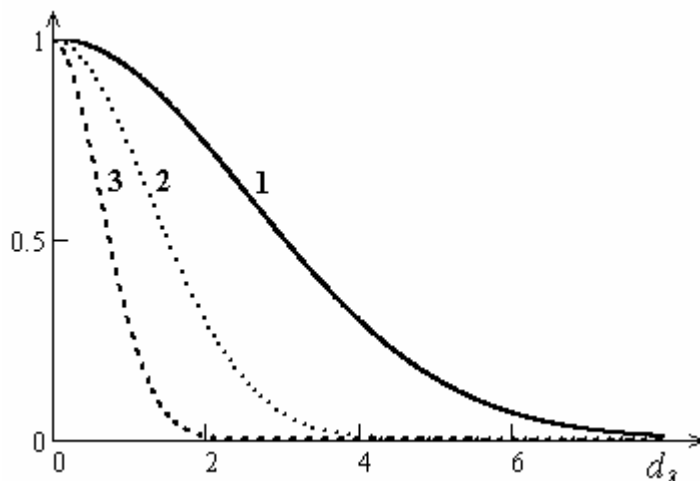


Рис. 1.7. Коэффициент корреляции сигналов в зависимости от относительного расстояния между антеннами для гауссовской модели при  $\theta_{eff} = 5, 10$  и  $20^\circ$  (кривые 1, 2, 3, соответственно)

Выражение (1.4.13) получено в предположении, что центр протяженного источника находится в направлении нормали к линии, соединяющей две антенны. В общем случае расположения центра протяженного источника в произвольном направлении  $q_0$  полученный результат необходимо умножить на осциллирующий множитель  $\exp(j2pd_1 \sin q_0)$ .

## ГЛАВА 2. КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ И МЕТОДЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО ВЕСОВОГО ВЕКТОРА АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗВЕСТНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЕ ПОМЕХИ

### 2.1. Основные критерии

Рассмотрим математическую формулировку четырех наиболее распространенных критериев эффективности пространственной обработки сигналов в адаптивных антенных системах. Такими критериями являются:

- минимум среднеквадратической ошибки (СКО);
- максимум отношения средней мощности сигнала к средней мощности помехи (ОСШ);
- максимум функции правдоподобия;
- минимум дисперсии шума.

Рассмотрим кратко каждый из этих критериев [3].

**Минимум СКО.** Предположим, что имеется достаточно информации о полезном сигнале и можно сформировать опорный сигнал  $d(t)$ . Разность между желательной реакцией ААР (опорным сигналом  $d(t)$ ) и выходным сигналом ААР называется сигналом ошибки  $e$  и, как видно из рис. 2.1, равна

$$e(t) = d(t) - \mathbf{W}^H [\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)]. \quad (2.1.1)$$

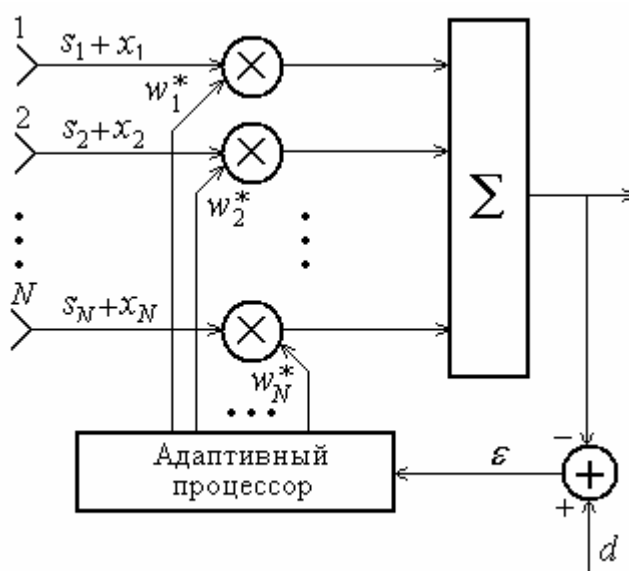


Рис. 2.1. Структурная схема ААР, работающей по критерию минимума СКО

Для квадрата этой ошибки будем иметь

$$|e(t)|^2 = |d(t)|^2 - \mathbf{W}^H [\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)] d^*(t) - [\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)]^H \mathbf{W} d(t) + \mathbf{W}^H [\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)] [\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)]^H \mathbf{W}. \quad (2.1.2)$$

Пусть  $\mathbf{M} = \langle [\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)][\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)]^H \rangle$  - КМ входного процесса, а  $\mathbf{R} = \langle [\mathbf{S} + \mathbf{X}(t)]d^*(t) \rangle$  - корреляционный вектор. В радиолокационных системах, обычно используются импульсы, длительность которых мала по сравнению с периодом повторения. Такие импульсы не оказывают влияния при усреднении входного процесса. Поэтому КМ и корреляционный вектор соответственно равны  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle$  и  $\mathbf{R} = \langle \mathbf{X}d^* \rangle$ . Элементы вектора  $\mathbf{R}$  определяют корреляционные моменты желаемого сигнала и помехи в соответствующих приемных каналах ААР ( $\mathbf{R}_p = \langle x_p d^* \rangle$ ).

В результате из (2.1.2) получим, что

$$\langle |e(t)|^2 \rangle = \langle |d(t)|^2 \rangle - \mathbf{W}^H \mathbf{R} - \mathbf{R}^H \mathbf{W} + \mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}. \quad (2.1.3)$$

Оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W}$  найдем из условия минимума СКО  $\langle |e(t)|^2 \rangle$ . СКО является квадратичной формой, образованной вектором  $\mathbf{W}$  и КМ  $\mathbf{M}$ . Учтем, что даже в отсутствии внешних помех в системе всегда имеются собственные шумы. Поэтому данная квадратичная форма является положительно определенной и имеет единственный экстремум – минимум. Следовательно, оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W}$  можно найти из условия равенства нулю градиента СКО по вектору  $\mathbf{W}^H$ :  $\nabla_{\mathbf{W}^H} (\langle |e|^2 \rangle) = 0$ . В результате дифференцирования в (2.1.3) получим систему линейных уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{M} \mathbf{W} = \mathbf{R}. \quad (2.1.4)$$

Полученное выражение называется уравнением Винера-Хопфа. Его решение дает оптимальный вектор весовых коэффициентов ААР

$$\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}. \quad (2.1.5)$$

Подставляя (2.1.5) в (2.1.3), найдем минимальную СКО. В результате получим, что

$$\langle |e|_{min}^2 \rangle = \langle |d|^2 \rangle - \mathbf{R}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}. \quad (2.1.6)$$

**Максимум ОСШ.** Рассмотрим адаптивные системы, действие которых основано на максимизации ОСШ. ОСШ на выходе ААР с помощью (1.1.2) можно записать в виде

$$h = \frac{\langle |\mathbf{W}^H \mathbf{S}|^2 \rangle}{\langle |\mathbf{W}^H \mathbf{X}|^2 \rangle}. \quad (2.1.7)$$

В соответствии с (1.2.16) КМ полезного сигнала  $\mathbf{M}_s = \langle |a_0|^2 \rangle \Phi_0 \Phi_0^H$ . Тогда ОСШ

$$h = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{M}_s \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}}, \quad (2.1.8)$$

представляет собой отношение двух квадратичных форм, каждая из которых является положительно определенной.

Для поиска максимума ОСШ удобно ввести вспомогательный вектор  $\mathbf{V} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{W}$ . Учтем, что КМ помехи  $\mathbf{M}$  является эрмитово сопряженной. Тогда (2.1.8) перепишем в виде

$$h = \frac{\mathbf{V}^H \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M}_s \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V}}{\mathbf{V}^H \mathbf{V}}. \quad (2.1.9)$$

Для поиска максимума ОСШ примем условие нормировки весового вектора  $\mathbf{V}$  в виде  $\mathbf{V}^H \mathbf{V} = 1$ . Тогда ОСШ в (2.1.9) будет равно  $h = \mathbf{V}^H \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M}_s \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V}$ . Таким образом, мы пришли к задаче поиска условного экстремума. Для ее решения сформируем функцию Лагранжа

$$L_{\text{ОСШ}}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}^H \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M}_s \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V} - c(\mathbf{V}^H \mathbf{V} - 1) \quad (2.1.10)$$

и продифференцируем ее по вектору  $\mathbf{V}^H$ . Приравнявая к нулю найденную производную, получим, что  $\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M}_s \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V} = c \mathbf{V}$ . При этом ОСШ  $h$  равно множителю Лагранжа ( $h = c$ ).

Таким образом, вектор  $\mathbf{V}$  является собственным вектором матрицы  $\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M}_s \mathbf{M}^{-1/2}$ , а множитель Лагранжа представляет собой соответствующее собственное число. Для обеспечения максимума ОСШ необходимо выбрать в качестве вектора  $\mathbf{V}$  собственный вектор, отвечающий максимальному собственному числу этой матрицы.

Так как вектор  $\mathbf{V} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{W}$ , то искомый весовой вектор  $\mathbf{W}$  должен быть собственным вектором матрицы  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_s$ , то есть  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}_s \mathbf{W} = c_{\max} \mathbf{W}$ . Или  $c_{\max} \mathbf{M} \mathbf{W} = \mathbf{M}_s \mathbf{W}$ . Учитывая, что  $c_{\max} = h_{\max}$ , с помощью (2.1.8) и (1.2.16) получим, что

$$\frac{\mathbf{W}^H \Phi_0 \Phi_0^H \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}} \mathbf{M} \mathbf{W} = \Phi_0 \Phi_0^H \mathbf{W}. \quad (2.1.11)$$



Сокращая обе части этого уравнения на скаляр  $\Phi_0^H \mathbf{W}$ , получим с точностью до несущественной константы, не влияющей на ОСШ, что оптимальный весовой вектор ААР должен удовлетворять системе линейных уравнений вида

$$\mathbf{M}\mathbf{W} = \Phi_0. \quad (2.1.12)$$

Отсюда

$$\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{M}^{-1}\Phi_0. \quad (2.1.13)$$

Чтобы найти максимальное ОСШ  $h_{max}$  подставим (2.1.13) в (2.1.8). После несложных преобразований будем иметь, что

$$h_{max} = \nu_0 \Phi_0^H \mathbf{M}^{-1} \Phi_0, \quad (2.1.14)$$

где  $n_0 = (\langle |a_0|^2 \rangle) / s_0^2$  - отношение мощности полезного сигнала к мощности собственного шума в отдельном приемном канале ААР.

Как уже отмечалось выше, в случае импульсных радиолокационных систем длительность зондирующих импульсов обычно выбирается значительно меньше, чем период их повторения. Поэтому при усреднении входного процесса, в состав которого входит и полезный сигнал, можно выделить КМ  $\mathbf{M}$  помехи. Однако возможна и другая ситуация, характерная для систем связи и акустических систем, когда полезный сигнал является непрерывным во времени, и выделить КМ  $\mathbf{M}$  помехи из входного процесса не представляется возможным. Рассмотрим этот случай.

Будем считать, что сигнал не коррелирован с внешней помехой и собственными шумами. Тогда КМ  $\mathbf{M}_\Sigma$  входного процесса равна сумме КМ сигнала ( $\mathbf{M}_s$ ) и КМ ( $\mathbf{M}$ ), то есть  $\mathbf{M}_\Sigma = \mathbf{M}_s + \mathbf{M}$ , где матрица  $\mathbf{M}_s$  определена в (1.2.16).

Подставим матрицу  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\Sigma - \mathbf{M}_s$  в (2.1.12) и учтем, что  $\mathbf{M}_s \mathbf{W} = \langle |a_0|^2 \rangle (\Phi_0^H \mathbf{W}) \Phi_0$ . В результате получим уравнение, аналогичное (2.1.12):

$$\mathbf{M}_\Sigma \mathbf{W} = a \Phi_0, \quad (2.1.15)$$

где константа  $a = 1 + \langle |a_0|^2 \rangle (\Phi_0^H \mathbf{W})$ , не влияет на ОСШ и может быть опущена. Следует отметить, что к этому же результату можно прийти, если непосредственно обращать матрицу  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_\Sigma - \langle |a_0|^2 \rangle \Phi_0 \Phi_0^H$ , пользуясь известным матричным тождеством [1,3].

Таким образом, использование КМ  $\mathbf{M}_\Sigma$  входного процесса вместо КМ  $\mathbf{M}$  только помехи не изменяет оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W}$ , обеспечивающий максимум ОСШ.

**Максимум функции правдоподобия.** В том случае, когда полезный сигнал является полностью неизвестным (как, например, в системах мобильной связи) необходимо его оценить. Для этого можно использовать критерий максимального правдоподобия (МП).

Будем считать, что собственные шумы и внешняя помеха в приемных каналах ААР, описываемые вектором  $\mathbf{X}(t)$ , являются стационарным, гауссовским процессом с нулевым средним и КМ  $\mathbf{M}$ . При этом вектор  $\mathbf{X}$  имеет многомерное гауссовское распределение [18]:

$$p(\mathbf{X}) = [\det(p\mathbf{M})]^{-1} \exp\{-\mathbf{X}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}\}, \quad (2.1.16)$$

где  $\det(\cdot)$  – определитель матрицы.

Определим функцию правдоподобия входного сигнала как [3]

$$L(\mathbf{X}) = -\ln[p(\mathbf{Y}/\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{S})], \quad (2.1.17)$$

где  $p(\mathbf{Y}/\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{S})$  - условная плотность вероятности вектора  $\mathbf{Y}$  входного процесса при условии, что наряду с помехой был принят и полезный сигнал, то есть  $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{X}(t) = a_0(t)\Phi_0 + \mathbf{X}(t)$ , где  $a_0(t)$  - неизвестная величина.

Тогда для функции правдоподобия из (2.1.17) будем иметь

$$L(\mathbf{X}) = c \cdot (\mathbf{Y} - a_0\Phi_0)^H \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{Y} - a_0\Phi_0), \quad (2.1.18)$$

где  $c$  – скалярная величина не зависящая от  $\mathbf{Y}$  и  $a_0$ .

Процессор МП основан на получении оценки  $\hat{a}_0(t)$  комплексной амплитуды  $a_0(t)$  сигнала. Эта оценка максимизирует функцию правдоподобия (2.1.18). Вычислим производную от функции  $L(\mathbf{X})$  по  $a_0$  и приравняем ее к нулю. В результате получим следующее уравнение

$$a_0 \cdot \Phi_0^H \mathbf{M}^{-1} \Phi_0 = \Phi_0^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Y}. \quad (2.1.19)$$

Учитывая, что  $\Phi_0^H \mathbf{M}^{-1} \Phi_0$  - скалярная величина, запишем МП оценку в виде

$$\hat{a}_0(t) = \mathbf{W}^H \mathbf{Y}(t), \quad (2.1.20)$$

где оптимальный по критерию МП весовой вектор  $\mathbf{W}$  определяется выражением

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\Phi_0^H \mathbf{M}^{-1} \Phi_0} \mathbf{M}^{-1} \Phi_0. \quad (2.1.21)$$

**Минимум дисперсии шума.** Возможны ситуации, когда параметры полезного сигнала и направление его прихода известны. Они имеют место, например, в настроенных на сигнал ААР, в которых максимум диаграммы направленности (ДН) совпадает с направлением на источник сигнала. В таких случаях, минимизация дисперсии выходного шума приводит к улучшению условий приема сигнала на фоне внешних источников помехи.

Для определенности будем считать, что источник сигнала находится на нормали к ААР. Тогда выходной сигнал ААР, настроенной на этот источник, запишем в виде [3]

$$z(t) = \mathbf{W}^H \mathbf{Y}(t) = a_0(t) \sum_{p=1}^N w_p^* + \sum_{p=1}^N w_p^* x_p(t) = a_0(t) \mathbf{W}^H \mathbf{1} + \mathbf{W}^H \mathbf{X}(t), \quad (2.1.22)$$

где  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$  – вектор, состоящий из единиц.

Введем ограничение  $\mathbf{W}^H \mathbf{1} = 1$ , обеспечивающее настройку ААР на источник сигнала. Тогда

$$z(t) = a_0(t) + \mathbf{W}^H \mathbf{X}(t). \quad (2.1.23)$$

Так как  $\langle z \rangle = a_0(t)$ , то дисперсия выходного процесса  $z(t)$  будет равна

$$D_z = \mathbf{W}^H \langle \mathbf{X}\mathbf{X}^H \rangle \mathbf{W} = \mathbf{W}^H \mathbf{M}\mathbf{W}. \quad (2.1.24)$$

Теперь задача заключается в поиске весового вектора  $\mathbf{W}$ , который обеспечит минимум дисперсии  $D_z$  при ограничении  $\mathbf{W}^H \mathbf{1} = 1$ . Составим функцию Лагранжа

$$L_{\text{мдш}} = \mathbf{W}^H \mathbf{M}\mathbf{W} - c(\mathbf{W}^H \mathbf{1} - 1). \quad (2.1.25)$$

где  $c$  - множитель Лагранжа.

Так как функция  $L_{\text{мдш}}$  является квадратичной формой от  $\mathbf{W}$ , то оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W}$  можно найти из условия равенства нулю градиента этой функции по вектору  $\mathbf{W}^H$   $\nabla_{\mathbf{W}^H} (L_{\text{мдш}}) = 0$ . В результате дифференцирования в (2.1.25) получим систему линейных уравнений вида

$$\mathbf{M}\mathbf{W} = c\mathbf{1}. \quad (2.1.26)$$

Отсюда оптимальный весовой вектор равен

$$\mathbf{W} = c\mathbf{M}^{-1}\mathbf{1}. \quad (2.1.27)$$

Подставляя (2.1.27) в условие ограничения  $\mathbf{W}^H \mathbf{1} = 1$ , найдем множитель Лагранжа

$$c = \frac{1}{\mathbf{1}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}}. \quad (2.1.28)$$

Теперь нетрудно получить окончательное выражение для весового вектора в виде

$$\mathbf{W}_{opt} = \frac{1}{\mathbf{1}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}. \quad (2.1.29)$$

При этом минимальное значение дисперсии выходного шума будет равно

$$D_z = \frac{1}{\mathbf{1}^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{1}}. \quad (2.1.30)$$

## 2.2. Синтез оптимальной обработки сигналов на основе метода собственных векторов корреляционной матрицы помехи

КМ помехи  $\mathbf{M}$  является эрмитовой и, следовательно, имеет  $N$  положительных собственных чисел, которые будем нумеровать в порядке убывания ( $I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq \dots \geq I_N$ ). Собственные числа  $I_j$  и собственные векторы  $\mathbf{U}_j$  матрицы  $\mathbf{M}$  находятся соответственно из решения характеристического уравнения степени  $N$  и системы  $N$  линейных уравнений [19,20]:

$$\begin{aligned} y_N(I) &= \det(I \mathbf{E} - \mathbf{M}) = 0, \\ \mathbf{M} \mathbf{U}_j &= I_j \mathbf{U}_j \quad (j=1,2,\dots,N). \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

В  $N$ -мерном векторном пространстве сигналов собственные векторы  $\mathbf{U}_j$  ( $j=1 \div N$ ) образуют ортонормированный базис. Используя этот базис, матрицу  $\mathbf{M}$  можно представить в виде следующего разложения:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{U}^H = \sum_{j=1}^N I_j \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H, \quad (2.2.2)$$

где  $\mathbf{U}$  - унитарная матрица, столбцами которой являются собственные векторы  $\mathbf{U}_j$ , а  $\mathbf{L} = \text{diag}\{I_j\}$  - диагональная матрица, составленная из собственных чисел  $I_j$ .

Матрица  $\mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$  в (2.2.2) является проекционной матрицей. Ее также называют матрицей-проектором на собственное  $j$ -ое одномерное подпространство, соответствующее

вектору  $\mathbf{U}_j$ . Поэтому представление (2.2.2) можно назвать разложением КМ на сумму матриц-проекторов.

Некоторые собственные числа КМ могут быть кратными. Поэтому количество неравных между собой собственных чисел может быть меньше  $N$ . Тогда размерность собственного подпространства, соответствующего некоторому собственному числу, будет определяться кратностью этого числа. В частности, когда помеха создается только собственным шумом, КМ равна единичной ( $\mathbf{M}=\mathbf{I}$ ) и все ее собственные числа равны единице. В этом случае выражение (2.2.2) принимает вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} = \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H. \quad (2.2.3)$$

Для единичной матрицы любая система ортонормированных векторов является собственной. Поэтому выражение (2.2.3) справедливо для произвольной ортонормированной системы векторов  $\mathbf{U}_j$  ( $j=1 \div N$ ).

Собственные подпространства или их объединения называют часто инвариантными подпространствами. Такое название обусловлено тем, что сигналы, относящиеся к этим подпространствам, могут рассматриваться независимо друг от друга, а решение любой задачи представимо в виде суммы решений, относящихся к отдельным инвариантным подпространствам. В частности, решение векторной задачи может быть сведено к решению соответствующих скалярных задач. При этом вся сложность переносится на решение классической задачи на собственные значения и собственные вектора, то есть на решения уравнений (2.2.1). Например, необходимая для оптимальной обработки сигналов операция обращения КМ  $\mathbf{M}$  существенно упрощается при использовании разложения (2.2.2) КМ по матрицам-проекторам.

В самом деле, разложение для обратной матрицы имеет следующий вид:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^H = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H. \quad (2.2.4)$$

Теперь оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W}_{opt}$  для ААР, обеспечивающей максимум ОСШ, с учетом (2.1.13) и (2.2.4) можно записать в виде разложения по собственным векторам

$$\mathbf{W}_{opt} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} (\mathbf{U}_j^H \boldsymbol{\Phi}_0) \mathbf{U}_j. \quad (2.2.5)$$

Максимальное ОСШ (2.1.14), получаемое при таком весовом векторе, равно

$$h_{\max} = v_0 \sum_{j=1}^N \frac{1}{I_j} |\Phi_0^H \mathbf{U}_j|^2. \quad (2.2.6)$$

В этой формуле каждое слагаемое представляет собой ОСШ для соответствующего собственного подпространства (отношение мощности проекции полезного сигнала на  $j$ -ое собственное подпространство  $|\Phi_0^H \mathbf{U}_j|^2$  к мощности шума  $I_j$  в этом подпространстве). Поэтому формулу (2.2.6) для выходного ОСШ можно интерпретировать как сумму ОСШ в отдельных собственных подпространствах.

Для иллюстрации применения математического аппарата собственных векторов рассмотрим два примера.

1) Пусть помеха создается собственным шумом с единичной мощностью и одним внешним источником. Тогда КМ имеет вид (1.2.6). Для этой матрицы вектор  $\mathbf{F}_1$  внешней помехи является собственным вектором, соответствующим собственному числу  $I_1 = 1 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1$ . Любой другой вектор, ортогональный вектору  $\mathbf{F}_1$ , также является собственным вектором, но соответствует собственному числу  $I_2=1$ , которое имеет кратность  $N-1$ . Таким образом, векторное пространство входных сигналов разбивается на два инвариантных подпространства, одно из которых имеет размерность равную единице, а другое –  $(N-1)$ . Для первого подпространства (подпространство источника помехи) нормированный собственный вектор  $\mathbf{U}_1$  будет равен  $\mathbf{U}_1 = (\Phi_1^H \Phi_1)^{-1/2} \Phi_1$ .

С помощью (2.2.2) и (2.2.3) найдем разложение КМ помехи по собственным векторам в виде

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) + I_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H. \quad (2.2.7)$$

Здесь мы представили КМ  $\mathbf{M}$  в виде суммы двух матричных проекторов. Первое слагаемое есть проектор на  $(N-1)$ -мерное «подпространство собственного шума», а второе слагаемое является проектором на одномерное подпространство внешнего источника помехи. Название «подпространство собственного шума» мы используем вследствие того, что это  $(N-1)$ -мерное подпространство не содержит внешних помеховых сигналов. Однако надо иметь в виду, что собственный шум системы в силу статистической однородности (статистической независимости отдельных компонент) равномерно распределен по всем направлениям полного  $N$ -мерного пространства входных сигналов, и поэтому он присутствует и в подпространстве внешней помехи.

Обратная КМ и оптимальный весовой вектор равны

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) + \frac{1}{I_1} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H, \quad (2.2.8)$$

$$\mathbf{W}_{opt} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) \Phi_0 + \frac{1}{I_1} (\mathbf{U}_1^H \Phi_0) \mathbf{U}_1. \quad (2.2.9)$$

При увеличении мощности внешней помехи, когда  $\nu_1 \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $I_1 = 1 + \nu N \rightarrow \infty$ , в (2.2.8) и (2.2.9) сохраняются только первые слагаемые. Таким образом, обратная матрица  $\mathbf{M}^{-1}$  в пределе становится матрицей-проектором на подпространство собственного шума. В этом случае внешняя помеха оказываются полностью подавленной. Вместе с ней также подавляются часть полезного сигнала и часть собственного шума, которые содержатся в подпространстве внешней помехи.

Отметим, что выходное ОСШ при увеличении мощности внешней помехи ( $\nu_1 \rightarrow \infty$ ) не уменьшается до нуля. Из (2.1.14) и (2.2.8) следует, что ОСШ стремится к конечной величине равной

$$h_{max} = \nu_0 \Phi_0^H (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) \Phi_0 + \frac{1}{I_1} \nu_0 \Phi_0^H \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H \Phi_0 \rightarrow \nu_0 \Phi_0^H (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H) \Phi_0. \quad (2.2.10)$$

Сравнивая (2.2.10) и (2.2.6), можно увидеть, что выходное ОСШ даже при очень мощном источнике помехи уменьшается до величины, не меньшей, чем доля ОСШ, принадлежащая шумовому подпространству.

2) Пусть помеха создается двумя некоррелированными между собой внешними источниками и собственным шумом. Тогда, КМ помехи определяется формулой (1.2.10). Эту матрицу можно представить в виде разложения по собственным векторам в виде:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{E} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H) + I_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H + I_2 \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H, \quad (2.2.11)$$

где собственные числа  $I_1$  и  $I_2$  этой матрицы даны в (1.2.11).

Выражения для собственных векторов  $\mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{U}_2$ , соответствующих этим собственным числам, могут быть найдены из решения системы линейных уравнений (2.2.1). Для этого примера подпространство собственного шума имеет размерность  $N-2$ , а размерность подпространства внешних источников помехи равно числу источников  $J=2$ .

Обратную матрицу и оптимальный весовой вектор можно записать как:

$$\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H) + \frac{1}{I_1} \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H + \frac{1}{I_2} \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H, \quad (2.2.12)$$

$$\mathbf{W}_{opt} = (\mathbf{I} - \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H - \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_2^H) \Phi_0 + \frac{1}{I_1} (\mathbf{U}_1^H \Phi_0) \mathbf{U}_1 + \frac{1}{I_2} (\mathbf{U}_2^H \Phi_0) \mathbf{U}_2. \quad (2.2.13)$$

В формулах (2.2.9) и (2.2.13) первые слагаемые представляют собой проекции оптимального весового вектора на подпространство собственного шума. Легко увидеть, что эти проекции совпадают с проекциями вектора  $\mathbf{F}_0$  полезного сигнала на данное подпространство. Поэтому оптимальная обработка сигнала в подпространстве собственного шума совпадает с согласованной обработкой ( $\mathbf{W}_{согл} = \mathbf{F}_0$ ), при которой происходит только накопление полезного сигнала. Другие слагаемые в (2.2.9) и (2.2.13) являются компонентами оптимального весового вектора в подпространстве внешней помехи и обеспечивают ее полное подавление.

Приведенные примеры можно обобщить на случай произвольного числа  $J$  внешних источников коррелированных сигналов с линейно независимыми помеховыми векторами  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_J$ . Для КМ помехи в этом случае справедлива формула (1.2.12). Несложно увидеть, что подпространство собственного шума при такой помеховой обстановке имеет размерность  $N - J$ , а векторы, принадлежащие этому пространству, ортогональны всем помеховым векторам  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_J$ .

Знание базиса из собственных векторов КМ помех можно непосредственно использовать для синтеза оптимальной обработки сигналов в ААР. Если на входе ААР имеется смесь полезного сигнала и помехи  $\mathbf{Y}(t) = a_0(t) \Phi_0 + \mathbf{X}(t)$ , то на выходе ААР при оптимальном весовом векторе получим смесь сигнала и помехи в виде

$$z = \mathbf{W}^H \mathbf{Y} = \Phi_0^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Y}. \quad (2.2.14)$$

Оптимальная обработка (2.2.14) в ААР может осуществляться двумя способами: а) сначала формируется весовой вектор  $\mathbf{W} = \mathbf{M}^{-1} \Phi_0$  и затем определяется выходное колебание  $z = \mathbf{W}^H \mathbf{Y}$ ; б) предварительно входной вектор  $\mathbf{Y}$  преобразуется в обрабатываемом фильтре ( $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Y}$ ), а затем определяется выходное колебание  $z = \Phi_0^H \tilde{\mathbf{Y}}$ . Первый подход целесообразно применять в однолучевых ААР, а второй – в многолучевых ААР. В таких ААР формируется несколько лучей для приема полезных сигналов с различных направлений и необходимо обеспечить защиту каждого этих лучей от воздействия помех. Если лучей достаточно много, то может оказаться выгодным сделать один раз сложное матричное преобразование и найти вектор  $\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Y}$ , и затем несколько раз выполнить более простые вычисления скалярных произведений векторов  $\Phi_0$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}$ .



Подставим разложение (2.2.4) для обратной КМ помехи в (2.2.14). В результате выходной сигнал ААР при оптимальном весовом векторе запишем в виде:

$$z = \Phi_0^H \mathbf{U} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{Y} = \Phi_0^H \mathbf{U} \Lambda^{-0.5} \Lambda^{-0.5} \mathbf{U}^H \mathbf{Y} = \Phi_0^H \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^H \mathbf{Y}, \quad (2.2.15)$$

где матрица  $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \Lambda^{-0.5}$  определяет матричный преобразователь (фильтр).

Соответствующая схема обработки сигналов в ААР приведена на рис. 2.2. Согласно этой схеме, вначале вектор входного процесса преобразуется с помощью матричного фильтра  $\hat{\mathbf{U}}^H = \Lambda^{-0.5} \mathbf{U}^H$ , имеющего  $N$  входов и  $K$  выходов, где  $K$  равно числу собственных подпространств с неравными собственными числами.

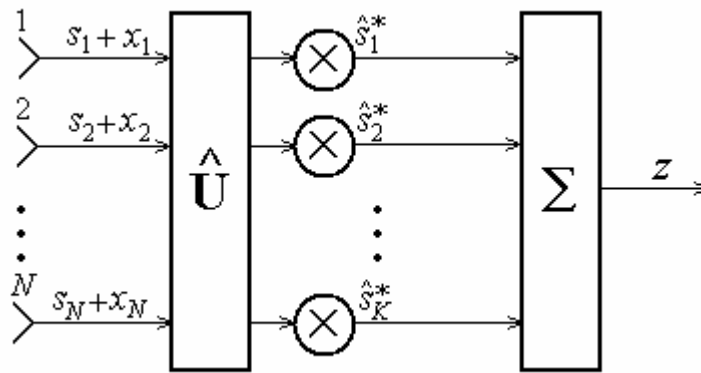


Рис. 2.2. Схема обработки сигналов на основе метода собственных векторов КМ помехи

Рассмотрим преобразование помехи. КМ помехи на входе преобразователя  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle = \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{U}^H$ . На выходе вектор помехи будет равен  $\mathbf{X}_1 = \Lambda^{-0.5} \mathbf{U}^H \mathbf{X}$ , а КМ помехи будет равна

$$\langle \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_1^H \rangle = \Lambda^{-0.5} \mathbf{U}^H \Phi_0^H \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle \mathbf{U} \Lambda^{-0.5} = \Lambda^{-0.5} \mathbf{U}^H \mathbf{U} \Lambda^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{U} \Lambda^{-0.5} = \mathbf{I}. \quad (2.2.16)$$

Таким образом, КМ выходной помехи является единичной. Это значит, что помехи в выходных каналах преобразователя будут не коррелированными между собой и иметь единичные мощности. Такое преобразование часто называют «отбеливанием» помехи по аналогии с понятием «отбеливания» шума.

Вектор полезного сигнала  $\mathbf{S} = a_0(t) \Phi_0$  также преобразуется в матричном фильтре  $\hat{\mathbf{U}}$ . На выходе этого фильтра вектор полезного сигнала будет равен  $\hat{\mathbf{S}} = \Lambda^{-0.5} \mathbf{U}^H \mathbf{S}$ .

После отбеливания помехи оптимальная обработка сигнала сводится к согласованной обработке, т.е. накоплению полезного сигнала. Поэтому в качестве весовых

коэффициентов на множители подаются компоненты комплексно сопряженного вектора  $\hat{S}^*$  преобразованного полезного сигнала (см. рис. 2.2).

### 2.3. Метод степенных векторов

Рассмотрим метод степенных векторов [21-23], заключающийся в представлении оптимального весового вектора  $\mathbf{W}$  ААР в виде конечного разложения по степенным векторам  $\mathbf{M}^i \mathbf{F}_0$ , образованным циклическим воздействием КМ  $\mathbf{M}$  на вектор сигнала  $\mathbf{F}_0$ . Этот метод основан на свойствах характеристического и минимального многочленов КМ помехи.

Собственные числа КМ  $\mathbf{M}$  являются корнями характеристического многочлена

$$y(l) = l^N - b_1 l^{N-1} - b_2 l^{N-2} - \dots - b_N. \quad (2.3.1)$$

Согласно теореме Гамильтона - Кэли [20] матрица  $\mathbf{M}$  удовлетворяет своему характеристическому многочлену, то есть  $y(\mathbf{M})=0$  или  $\mathbf{M}^N - b_1 \mathbf{M}^{N-1} - b_2 \mathbf{M}^{N-2} - \dots - b_N \mathbf{I} = \mathbf{0}$ . Поэтому многочлен  $y(l)$  называется многочленом, аннулирующим КМ  $\mathbf{M}$ . В общем случае КМ  $\mathbf{M}$  имеет множество таких многочленов, среди которых выделяют минимальный многочлен. Он имеет наименьшую степень, единичный коэффициент при старшем члене и является делителем характеристического многочлена. Покажем, что КМ  $\mathbf{M}$  имеет минимальный многочлен.

Вначале рассмотрим случай одного ( $J=1$ ) источника внешней помехи, когда КМ имеет вид (1.2.6). Сформируем бесконечный ряд степенных матриц  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}^2$ , ... и установим, что линейно независимыми являются только первые две матрицы  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{M}$ . Для этого достаточно показать, что

$$\mathbf{M}^2 = b_1 \mathbf{M} + b_2 \mathbf{I}. \quad (2.3.2)$$

Подставим КМ в виде (1.2.6) в (2.3.2) и приравняем коэффициенты при линейно независимых матрицах  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_1^H$ . В результате получим, что коэффициенты разложения в (2.3.2) равны

$$b_1 = 2 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1, \quad b_2 = -(1 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1), \quad (2.3.3)$$

и являются действительными знакопеременными величинами ( $b_1 > 0$ ,  $b_2 < 0$ ). Нетрудно видеть, что их сумма равна единице ( $b_1 + b_2 = 1$ ) и не зависит от мощности помехи  $v_1$  и ее углового положения (вектор  $\mathbf{F}_1$ ).

Из (2.3.2) следует, что многочлен второй степени  $y(l) = l^2 - b_1 l - b_2$  является минимальным многочленом КМ  $\mathbf{M}$ , а его корни совпадают с неравными между собой собственными числами КМ  $\mathbf{M}$ , равными  $l_1 = 1 + \nu \Phi_1^H \Phi_1$  и  $l_2 = 1$ .

В случае двух ( $J=2$ ) некоррелированных источников внешней помехи линейно независимыми являются первые три матрицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}^2$ , то есть

$$\mathbf{M}^3 = b_1 \mathbf{M}^2 + b_2 \mathbf{M} + b_3 \mathbf{I}. \quad (2.3.4)$$

Найдем коэффициенты разложения  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ . Подставим КМ  $\mathbf{M}$  в виде (1.2.10) и приравняем коэффициенты при линейно независимых матрицах  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{M}^2$ . В результате получим, что:

$$b_1 = 3 + n_1 \Phi_1^H \Phi_1 + n_2 \Phi_2^H \Phi_2, \quad (2.3.5)$$

$$b_2 = -[3 + 2n_1 \Phi_1^H \Phi_1 + n_2 \Phi_2^H \Phi_2 + n_1 n_2 \Phi_1^H \Phi_1 \Phi_2^H \Phi_2 (1 - |g_{12}|^2)], \quad (2.3.6)$$

$$b_3 = 1 + n_1 \Phi_1^H \Phi_1 + n_2 \Phi_2^H \Phi_2 + n_1 n_2 \Phi_1^H \Phi_1 \Phi_2^H \Phi_2 (1 - |g_{12}|^2), \quad (2.3.7)$$

где  $g_{12} = (\Phi_1^H \Phi_2)(\Phi_1^H \Phi_1)^{-1/2}(\Phi_2^H \Phi_2)^{-1/2}$  - коэффициент рассогласования волновых фронтов, определяемых векторами  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ . Из (2.3.5)-(2.3.7) видно, что коэффициенты  $b_i$  являются действительными знакопеременными величинами ( $b_1 > 0$ ,  $b_2 < 0$ ,  $b_3 > 0$ ), а их сумма равна единице ( $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ ).

Для линейной эквидистантой ААР, расположенной в свободном пространстве, с учетом (1.2.4) получим, что

$$g_{12} = g(u_2 - u_1), \quad g(u) = \sin[(N/2)u]/N \sin[(N/2)u], \quad (2.3.8)$$

При этом  $\Phi_1^H \Phi_1 = \Phi_2^H \Phi_2 = N$  и выражения (2.3.5)-(2.3.7) принимают более простой вид:

$$b_1 = 3 + (n_1 + n_2)N, \quad (2.3.9)$$

$$b_2 = -[3 + 2(n_1 + n_2)N + n_1 n_2 N^2 (1 - |g_{12}|^2)], \quad (2.3.10)$$

$$b_3 = 1 + (n_1 + n_2)N + n_1 n_2 N^2 (1 - |g_{12}|^2). \quad (2.3.11)$$

Из (2.3.4) следует, что многочлен третьей степени  $y(l) = l^3 - b_1 l^2 - b_2 l - b_3$  является минимальным многочленом КМ  $\mathbf{M}$ . Корни этого многочлена совпадают с неравными между собой собственными  $l_1$  и  $l_2$  числами КМ  $\mathbf{M}$ , представленными в (1.2.11).

Рассмотрим теперь общий случай произвольного числа  $J$  источников помехи. Отметим, что при общем числе источников помехи (с учетом собственного шума) большем или равном числу приемных каналов ААР ( $J+1 \geq N$ ) минимальный многочлен совпадает с характеристическим многочленом степени  $N$ .

Покажем, что при меньшем числе источников ( $J+1 < N$ ) минимальный многочлен существует, и его степень не превышает  $J+1$ . Подставим КМ  $\mathbf{M}$  из (2.2.2) в качестве аргумента в произвольный матричный полином  $y(I)$ . В результате получим

$$y(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^N j(I_i) \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H. \quad (2.3.12)$$

Многочлен  $y(I)$  будет аннулирующим для КМ  $\mathbf{M}$ , если все коэффициенты  $y(I_i)$  при линейно независимых матрицах  $\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H$  будут равны нулю. Когда  $N$  собственных чисел КМ  $\mathbf{M}$  отличаются друг от друга, многочлен  $y(I)$  имеет степень  $N$ , то есть является характеристическим многочленом. Однако, если число источников помехи меньше числа приемных каналов ( $J+1 < N$ ), то  $(N-J)$  собственных чисел КМ равны мощности собственного шума. Некоторые из остальных  $J$  собственных чисел, связанных с подпространством внешних источников помехи, могут совпадать друг с другом. Поэтому число  $N\zeta$  неравных между собой собственных чисел удовлетворяет условию  $N\zeta \leq J+1$ . Это означает, что матричный многочлен  $y(\mathbf{M})$  будет аннулировать матрицу  $\mathbf{M}$ , если многочлен  $y(I)$  имеет степень не ниже  $N\zeta$  и его корни совпадают с неравными между собой собственными числами КМ  $\mathbf{M}$ . Следовательно, степень минимального многочлена КМ  $\mathbf{M}$  не превышает общее число  $J+1$  источников помехи.

Таким образом, КМ  $\mathbf{M}$  имеет минимальный многочлен

$$y(I) = I^{N\zeta} - b_1 I^{N\zeta-1} - b_2 I^{N\zeta-2} - \mathbf{K} - b_{N\zeta-1} I - b_{N\zeta}, \quad (2.3.13)$$

степень которого  $N\zeta$  не превышает общее число источников помехи ( $N\zeta \leq J+1$ ), если число источников помехи меньше числа приемных каналов ААР ( $J+1 < N$ ). В противоположном случае ( $J+1 > N$ ) минимальный многочлен совпадает с характеристическим многочленом, а его степень совпадает с числом приемных каналов ААР ( $N\zeta = N$ ).

Отметим частный случай, когда степень минимального многочлена КМ  $\mathbf{M}$  равна двум ( $N\zeta = 2$ ) и не зависит от числа  $J$  источников помехи. Он соответствует ортогональному расположению источников, имеющих одинаковую мощность, то есть  $\mathbf{F}_i^H \mathbf{F}_j = 0$  ( $i \neq j$ ),  $v_i = v$  ( $i=1, 2, \dots, J$ ). КМ  $\mathbf{M}$  в (1.2.9) может быть представлена в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \nu \mathbf{\Pi}; \quad \mathbf{\Pi} = \sum_{j=1}^J \mathbf{\Phi}_j \mathbf{\Phi}_j^H. \quad (2.3.14)$$

Матрица  $\mathbf{P}$  представляет собой проектор на подпространство помехи. Учитывая свойство ортогональности векторов  $\mathbf{F}_i$  для КМ  $\mathbf{M}$  можно получить выражения (2.3.2) и (2.3.3). Это означает, что степень минимального многочлена КМ  $\mathbf{M}$  равна двум.

Так как минимальный многочлен степени  $N\zeta$  является аннулирующим для КМ  $\mathbf{M}$ , то матрица  $\mathbf{M}^{N\zeta}$  выражается в виде линейной комбинации степенных матриц  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}^2$ , ...,  $\mathbf{M}^{N\zeta-1}$ . Следовательно, матрица  $\mathbf{M}^{N\zeta p}$  ( $p$  - любое целое положительное число) и многочлен от матрицы  $\mathbf{M}$  степени выше  $N\zeta$  также могут быть сведены к многочлену от матрицы  $\mathbf{M}$  степени не выше  $(N\zeta-1)$ . Отсюда следует, что обратная КМ может быть представлена в виде конечного разложения

$$\mathbf{M}^{-1} = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{M} + b_2 \mathbf{M}^2 + \dots + b_{N\zeta-1} \mathbf{M}^{N\zeta-1}, \quad (2.3.15)$$

то есть является многочленом от КМ  $\mathbf{M}$  степени  $(N\zeta-1)$ .

Чтобы установить связь коэффициентов разложения  $b_i$  с коэффициентами  $b_i$  минимального многочлена КМ  $\mathbf{M}$ , воспользуемся тождеством  $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}=\mathbf{I}$ . В результате получим следующие выражения:

$$b_0 = -\frac{b_{N\zeta-1}}{b_{N\zeta}}, b_1 = -\frac{b_{N\zeta-2}}{b_{N\zeta}}, \mathbf{K}, b_{N\zeta-2} = -\frac{b_1}{b_{N\zeta}}, b_{N\zeta-1} = \frac{1}{b_{N\zeta}}. \quad (2.3.16)$$

Кроме минимального многочлена  $y(l)$  КМ  $\mathbf{M}$ , аннулирующего матрицу  $\mathbf{M}$ , введем в рассмотрение минимальный многочлен  $y_0(l)$  матрицы  $\mathbf{M}$ , аннулирующий вектор сигнала  $\mathbf{F}_0$ , то есть  $y_0(\mathbf{M})\mathbf{F}_0=0$ . Подставим сюда вместо матрицы  $\mathbf{M}$  ее разложение (2.2.2) по собственным векторам. В результате получим, что

$$y_0(\mathbf{M})\mathbf{\Phi}_0 = \sum_{i=1}^N y_0(l_i)(\mathbf{U}_i^H \mathbf{\Phi}_0) \mathbf{U}_i. \quad (2.3.17)$$

Вектор  $y_0(\mathbf{M})\mathbf{F}_0=0$  будет нулевым, если коэффициенты при всех собственных векторах  $\mathbf{U}_i$  равны нулю, то есть  $y_0(l_i)(\mathbf{U}_i^H \mathbf{\Phi}_0) = 0$ , где  $i=1,2,\dots,N$ . Это условие будет выполняться для минимального многочлена  $y(l)$  КМ  $\mathbf{M}$  степени  $N\zeta$  так как  $y(l_i)=0$ . Однако если вектор  $\mathbf{F}_0$  имеет нулевые проекции на некоторые собственные векторы  $\mathbf{U}_i$ , то существуют многочлены меньшей степени, для которых коэффициенты при всех собственных векторах  $\mathbf{U}_i$  в (5.1.31) будут равны нулю. Пусть имеется  $(N\zeta N^2)$  собственных векторов  $\mathbf{U}_i$

ортогональных вектору  $F_0$ . Тогда условие  $y_0(\mathbf{M})F_0=0$  будет выполняться для многочлена  $y_0(l)$  степени  $N^2$  ( $N^2 < N\phi$ , если его корни совпадают с теми собственными числами, для которых  $\mathbf{U}_i^H \Phi_0 \neq 0$ ). Нормируя многочлен  $y_0(l)$  так, чтобы коэффициент при старшем члене был равен единице, получим минимальный многочлен КМ  $\mathbf{M}$ , аннулирующий вектор сигнала  $F_0$ , в виде

$$y_0(l) = l^{N^2} - b_1 l^{N^2-1} - b_2 l^{N^2-2} - \dots - b_{N^2-1} l - b_{N^2}. \quad (2.3.18)$$

Таким образом, КМ  $\mathbf{M}$  имеет минимальный многочлен  $y_0(l)$  степени  $N^2 \leq N\phi \leq J+1$ , для которого  $y_0(\mathbf{M})F_0=0$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{M}^{N^2} \Phi_0 = b_1 \mathbf{M}^{N^2-1} \Phi_0 + b_2 \mathbf{M}^{N^2-2} \Phi_0 + \dots + b_{N^2-1} \mathbf{M} \Phi_0 + b_{N^2} \Phi_0, \quad (2.3.19)$$

то есть из бесконечного ряда степенных векторов  $\mathbf{M}^q F_0$  ( $q=0,1,2,\dots$ ) линейно-независимыми являются  $N^2$  векторов  $F_0, \mathbf{M}F_0, \mathbf{M}^2F_0, \dots, \mathbf{M}^{N^2-1}F_0$ .

Оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W}$  можно представить в виде конечного разложения по степенному базису:

$$\mathbf{W} = b_0 \Phi_0 + b_1 \mathbf{M} \Phi_0 + b_2 \mathbf{M}^2 \Phi_0 + \dots + b_{N^2-1} \mathbf{M}^{N^2-1} \Phi_0. \quad (2.3.20)$$

Умножим (2.3.20) слева на матрицу  $\mathbf{M}$  и учтем, что весовой вектор  $\mathbf{W}$  удовлетворяет уравнению (2.1.12). В результате получим, что коэффициенты разложения  $b_i$  удовлетворяют равенствам (2.3.16), если в них заменить  $N\phi$  на  $N^2$ .

Рассмотрим случай одного источника помехи ( $J=1$ ). С помощью (2.3.3), (2.3.15), (2.3.16) и (2.3.20) получим, что обратная КМ помехи и весовой вектор  $\mathbf{W}$  равны

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{2 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1}{1 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1} \mathbf{I} - \frac{1}{1 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1} \mathbf{M}, \quad (2.3.21)$$

$$\mathbf{W} = \frac{2 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1}{1 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1} \Phi_0 - \frac{1}{1 + v_1 \Phi_1^H \Phi_1} \mathbf{M} \Phi_0. \quad (2.3.22)$$

Коэффициенты  $b_i$  минимального многочлена КМ  $\mathbf{M}$  и коэффициенты разложения  $b_i$  удовлетворяют следующим свойствам [21-23]:

- они являются действительными знакопеременными числами;
- их сумма равна единице, и не зависит от вида помеховой обстановки (числа источников помехи, их мощностей и углового расположения);

- они инвариантны по отношению к любому унитарному преобразованию помехи в ААР, так как собственные числа и векторы КМ  $\mathbf{M}$  инвариантны по отношению к такому преобразованию.

Отметим, что число слагаемых в разложении (2.3.15) для обратной КМ  $\mathbf{M}^{-1}$  и в разложении (2.3.20) для оптимального весового вектора  $\mathbf{W}$  одинаково, если вектор сигнала  $\mathbf{F}_0$  имеет отличные от нуля проекции на все собственные векторы КМ  $\mathbf{M}$ . Если это не так, то вектор  $\mathbf{W}$  имеет разложение с меньшим числом членов.

Например, в случае одного источника помехи ( $J=1$ ) линейно независимыми являются два вектора  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{M}\mathbf{F}_0$ . Собственный вектор КМ  $\mathbf{M}$ , соответствующий помеховому подпространству, равен  $\mathbf{U}_1 = (\mathbf{\Phi}_1^H \mathbf{\Phi}_1)^{-1/2} \mathbf{\Phi}_1$ . При произвольном векторе сигнала  $\mathbf{F}_0$  весовой вектор  $\mathbf{W} = b_0 \mathbf{\Phi}_0 + b_1 \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_0$ . Однако, если вектор помехи  $\mathbf{F}_1$  ортогонален вектору сигнала  $\mathbf{F}_0$  ( $\mathbf{\Phi}_0^H \mathbf{\Phi}_1 = 0$ ), то степенной базис будет состоять только из одного вектора  $\mathbf{F}_0$ , а оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W} = \mathbf{F}_0$ . В то время как разложение для обратной КМ имеет два члена:  $\mathbf{M}^{-1} = b_0 \mathbf{I} + b_1 \mathbf{M}$ .

#### **2.4. Синтез оптимальной обработки сигналов на основе метода степенных векторов**

В соответствии с разложением (2.3.20) для весового вектора оптимальная пространственная обработка в ААР может быть разделена на два этапа, первый из которых заключается в формировании ряда параллельных каналов с характеристиками, зависящими от КМ  $\mathbf{M}$  и управляющего вектора сигнала  $\mathbf{F}_0$ , а второй - в суммировании выходных сигналов этих каналов с действительными коэффициентами  $b_i$ . Первый из параллельных каналов обеспечивает когерентное суммирование полезного сигнала и является основным. Остальные каналы служат для подавления внешней помехи и могут считаться вспомогательными.

Коэффициенты разложения  $b_i$  связаны с коэффициентами  $b_i$  минимального многочлена КМ помехи выражениями (2.3.16). Существуют различные способы определения коэффициентов  $b_i$  характеристического и минимального многочленов КМ  $\mathbf{M}$  [20], которые являются в общем случае достаточно сложными. Поэтому рассмотрим синтез оптимальной обработки сигналов в ААР, не требующий нахождения этих коэффициентов [22,23].

Образуем матрицу  $\mathbf{A} = (\Phi_0, \mathbf{M}\Phi_0, \mathbf{M}^2\Phi_0, \dots, \mathbf{M}^{N^*-1}\Phi_0)$ , столбцами которой являются независимые степенные векторы, и вектор коэффициентов  $\mathbf{B} = (b_0, b_1, \dots, b_{N^*-1})^T$ . Тогда разложение (2.3.20) весового вектора  $\mathbf{W}$  по степенному базису имеет вид

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}\mathbf{B}. \quad (2.4.1)$$

Матрица  $\mathbf{A}$  может рассматриваться как характеристика диаграммо-образующей схемы (ДОС). Эта характеристика определяется КМ  $\mathbf{M}$  и, следовательно, зависит от помеховой обстановки. Поэтому данная ДОС является адаптивной. Структурная схема двух этапной обработки сигналов в ААР показана на рис. 2.3.

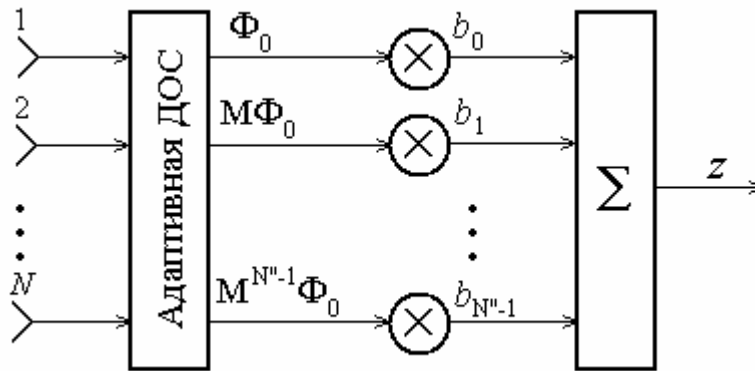


Рис. 2.3. Структурная схема двух этапной обработки сигналов в ААР

Обозначим  $y_0 = \mathbf{F}_0^H \mathbf{X}$  и  $y_{i-1} = (\mathbf{M}^{(i-1)} \mathbf{F}_0)^H \mathbf{X}$  – смесь помехи и собственного шума на выходе основного и  $(i-1)$ -го вспомогательного каналов, соответственно. Тогда весовой вектор  $i$ -го вспомогательного канала равен

$$\mathbf{M}^i \Phi_0 = \langle \mathbf{X} \mathbf{X}^H \rangle \mathbf{M}^{i-1} \Phi_0 = \langle \mathbf{X} y_{i-1}^H \rangle. \quad (2.4.2)$$

Таким образом, степенные векторы  $\mathbf{M}^i \mathbf{F}_0$  адаптивной ДОС могут быть сформированы последовательно путем использования корреляционных связей между элементами ААР.

Умножим (2.1.12) слева на матрицу  $\mathbf{A}^H$  и учтем (2.4.1). В результате для вектора  $\mathbf{B}$  получим следующее уравнение:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A}^H \Phi_0. \quad (2.4.3)$$

Матрица  $\mathbf{A}^H \mathbf{M} \mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{A}^H \Phi_0$  представляют собой соответственно КМ помехи и вектор сигнала на выходе ДОС. Следовательно, уравнение (2.4.3) имеет тот же физический смысл, что и уравнение (2.1.12), и теперь задача заключается в определении весового вектора  $\mathbf{B}$  для оптимального суммирования выходных сигналов ДОС.



Рассмотрим матрицу  $\mathbf{MA}$  в (2.4.3), состоящую из векторов  $\mathbf{MF}_0, \mathbf{M}^2\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{M}^{N^2}\mathbf{F}_0$ . Последний из них в соответствии с (2.3.19) может быть разложен по векторам степенной последовательности:  $\mathbf{M}^{N^2}\mathbf{F}_0 = \mathbf{AB}^{(b)}$ , где  $\mathbf{B}^{(b)} = (b_{N^2}, b_{N^2-1}, b_{N^2-2}, \dots, b_1)^T$  – вектор-столбец, составленный из коэффициентов минимального многочлена  $y_0(\lambda)$  КМ  $\mathbf{M}$ , аннулирующего вектор сигнала  $\mathbf{F}_0$ .

Введем в рассмотрение систему  $N^2$ -мерных векторов  $\mathbf{1}_i$  ( $i=1, 2, \dots, N^2$ ) с  $i$ -ой компонентой, равной единице, и нулевыми другими компонентами. Нетрудно видеть, что  $\mathbf{M}^{i-1}\mathbf{F}_0 = \mathbf{A}\mathbf{1}_i$ . Используя эти равенства, найдем, что матрица  $\mathbf{MA} = \mathbf{AR}^{(F)}$ , где  $\mathbf{R}^{(F)}$  – матрица Фробениуса [22,23]:

$$\mathbf{R}^{(F)} = (\mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3, \dots, \mathbf{1}_{N^2}, \mathbf{B}^{(b)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & b_{N^2} \\ 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 & b_{N^2-1} \\ 0 & 1 & \mathbf{K} & 0 & b_{N^2-2} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & 1 & b_1 \end{pmatrix}. \quad (2.4.4)$$

Учтем, что матрица  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$  состоит из линейно независимых степенных векторов и является невырожденной, а вектор  $\mathbf{F}_0$  можно записать, как  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{A}\mathbf{1}_1$ . Тогда из (2.4.3) получим для вектора  $\mathbf{B}$  уравнение вида:

$$\mathbf{R}^{(F)}\mathbf{B} = \mathbf{1}_1. \quad (2.4.5)$$

Выражение (2.4.3) можно представить как

$$\mathbf{A}^H\mathbf{MA}\mathbf{B} = \mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{1}_1. \quad (2.4.6)$$

Сопоставляя (2.4.6) с (2.4.5), найдем, что матрица

$$\mathbf{R}^{(F)} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{MA}. \quad (2.4.7)$$

Матрица  $\mathbf{R}^{(F)}$  имеет вполне определенный физический смысл. Как отмечалось выше, матрица  $\mathbf{A}^H\mathbf{MA}$  представляют собой КМ помехи на выходе ДОС. Поэтому, если внешние помехи отсутствуют, то  $\mathbf{M}=\mathbf{I}$  и матрица  $\mathbf{A}^H\mathbf{MA} = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$ . Следовательно, матрица  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$  является КМ собственного шума в выходных каналах ДОС. Поэтому матрицу  $\mathbf{R}^{(F)}$  можно рассматривать как КМ помехи на выходе ДОС, нормированную с помощью корреляционной матрицы выходного собственного шума.

Элементы матриц  $\mathbf{A}^H\mathbf{MA}$  и  $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$  могут быть оценены с помощью корреляционных устройств различными способами, например, путем последовательного «включения» и

«выключения» (излучатели ААР подключаются к согласованным нагрузкам) внешней помехи. При этом следует иметь в виду, что, поскольку характеристики ДОС зависят от КМ  $\mathbf{M}$ , они должны быть зафиксированы на время «отключения» внешней помехи. Аналогичный результат можно получить с помощью дополнительной, параллельно включенной, идентичной ДОС, на вход которой необходимо подать независимые шумовые колебания с единичной КМ  $\mathbf{I}$ . Поэтому выражение (2.4.7) можно использовать для непрерывной оценки коэффициентов  $b_i$ ,  $a$ , следовательно, и  $b_i$ .

Уравнение (2.4.5) имеет тот же физический смысл, что и уравнения (2.1.12) и (2.4.3). Можно также показать совпадение собственных чисел матрицы Фробениуса  $\mathbf{R}^{(F)}$  и КМ  $\mathbf{M}$  помехи в ААР.

Выше предполагалось что матрица  $\mathbf{A}$  содержит максимальное число  $N^2$  линейно-независимых степенных векторов. Если используется меньшее число каналов ДОС, то с помощью (2.3.20) можно определить только проекцию оптимального весового вектора  $\mathbf{W}$  на подпространство меньшей, чем  $N^2$ , размерности. При этом оптимальная обработка в ААР полностью не реализуется. Возможна и обратная ситуация, когда матрица  $\mathbf{A}$  содержит большее, чем  $N^2$ , число векторов, часть из которых будет линейно-зависимыми. Это приведет к неоднозначному определению оптимального весового вектора  $\mathbf{B}$  на выходе адаптивной ДОС.

Число независимых степенных векторов зависит как от числа источников помехи, так и от взаимного расположения источников сигнала и помехи. Пусть, например, все источники помехи попадают в нули ДН  $g_0$  основного канала АР. Тогда можно получить, что все степенные векторы вырождаются в вектор сигнала ( $\mathbf{M}^i \mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_0$ ). При этом, очевидно, ДН  $f_0$  уже является оптимальной и необходимость в использовании вспомогательных каналов ДОС отпадает. Однако если в нули ДН  $g_0$  попадает только часть помех, то такая ситуация не приводит к уменьшению числа независимых векторов.

Таким образом, в ДОС необходимо использовать только независимые каналы, предварительно определив их число. С этой целью можно анализировать на невырожденность матрицу  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ , которая является матрицей Грама системы степенных векторов  $\mathbf{F}_0, \mathbf{M}\mathbf{F}_0, \mathbf{M}^2\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{M}^{N^2-1}\mathbf{F}_0$ .

Возможен и другой путь. Известно, что ортогональная система векторов всегда линейно независима. Поэтому, ортогонализируя степенную последовательность векторов, получим другую последовательность, свободную от указанных выше недостатков. Этой системе векторов также будет соответствовать некоторая ДОС.

В общем случае процедура перехода от произвольной системы векторов  $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{N^*-1}$  к ортонормированной системе векторов  $\tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-1}$  имеет вид [19]

$$\tilde{\mathbf{F}}_k = \mathbf{Q}_k - \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k} \tilde{\mathbf{F}}_i, \quad a_{i,k} = \mathbf{Q}_k^H \tilde{\mathbf{F}}_i \quad (2.4.8)$$

Следовательно,  $k$ -ый вектор  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  формируется с помощью всех ранее найденных векторов  $\tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{k-1}$ , а соответствующая матрица преобразования координат имеет треугольный вид. Однако в случае, когда исходный базис состоит из степенных векторов  $\mathbf{F}_0, \mathbf{M}\mathbf{F}_0, \mathbf{M}^2\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{M}^{N^*-1}\mathbf{F}_0$ , процесс ортогонализации значительно упрощается и может быть осуществлен по следующей схеме [19]:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{F}}_0 = \mathbf{F}_0 / \|\mathbf{F}_0\|, \\ \tilde{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{F}_1 / \|\mathbf{F}_1\|, \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{F}_2 / \|\mathbf{F}_2\|, \\ \mathbf{K} \\ \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-1} = \mathbf{F}_{N^*-1} / \|\mathbf{F}_{N^*-1}\|, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{F}_0 = \Phi_0, \\ \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_0 - a'_0 \tilde{\mathbf{F}}_0, \\ \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_2 - a'_1 \tilde{\mathbf{F}}_1 - a''_0 \tilde{\mathbf{F}}_0, \\ \mathbf{K} \\ \mathbf{F}_{N^*-1} = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_{N^*-2} - a'_{N^*-2} \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-2} - a''_{N^*-3} \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-3}, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

где  $\|\mathbf{F}_i\|$  - норма вектора  $\mathbf{F}_i$ , а коэффициенты  $a'_k$  и  $a''_k$  определяются выражениями вида

$$a'_{k-1} = \tilde{\mathbf{F}}_{k-1}^H \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_{k-1}, \quad a''_{k-2} = \tilde{\mathbf{F}}_{k-2}^H \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_{k-1}. \quad (2.4.10)$$

Таким образом,  $k$ -ый вектор  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  формируется на основе только двух ранее найденных векторов  $\tilde{\mathbf{F}}_{k-1}$  и  $\tilde{\mathbf{F}}_{k-2}$ .

Объединим полученные ортонормированные векторы в матрицу  $\mathbf{A}_\perp = (\tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-1})$ , элементами  $i$ -го столбца которой являются компоненты вектора  $\tilde{\mathbf{F}}_{i-1}$ . Ее можно рассматривать как характеристику адаптивной ДОС, формирующей столько ортогональных вторичных каналов, сколько независимых векторов имеется в степенной последовательности.

Вектор  $\mathbf{W}$  оптимальных весовых коэффициентов можно представить в виде разложения по векторам  $\tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-1}$ :

$$\mathbf{W} = b_{\perp 0} \tilde{\mathbf{F}}_0 + b_{\perp 1} \tilde{\mathbf{F}}_1 + b_{\perp 2} \tilde{\mathbf{F}}_2 + \mathbf{K} + b_{\perp(N^*-1)} \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-1}, \quad (2.4.11)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}_\perp \mathbf{B}_\perp, \quad (2.4.12)$$

где вектор коэффициентов разложения  $\mathbf{B}_\perp = (b_{\perp 0}, b_{\perp 1}, \dots, b_{\perp(N^*-1)})^T$ .

Подставим (2.4.12) в (2.1.12), умножим полученный результат на матрицу  $\mathbf{A}_\perp^H$  и учтем, что  $\mathbf{A}_\perp^H \tilde{\mathbf{F}}_0 = \mathbf{A}_\perp^H \mathbf{A}_\perp \mathbf{1}_1$ . Примем также во внимание, что для ортонормированных векторов матрица  $\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{A}_\perp$  является единичной ( $\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{A}_\perp = \mathbf{I}$ ). В результате получим уравнение для искомого вектора  $\mathbf{B}_\perp$ :

$$\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp \mathbf{B}_\perp = \mathbf{1}_1. \quad (2.4.13)$$

Матрица  $\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp$  является КМ внешней помехи и внутренних шумов на выходе ортогональной адаптивной ДОС. Особенностью базиса  $\tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-1}$  является то, что помеха  $y_0 = \tilde{\mathbf{F}}_0^H \mathbf{X}$  в основном канале коррелирована только с помехой  $y_1 = \tilde{\mathbf{F}}_1^H \mathbf{X}$  в первом канале вспомогательном канале и некоррелирована с помехой в остальных каналах. Помеха в  $i$ -ом канале коррелирована с помехой только в соседних  $(i-1)$ -ом и  $(i+1)$ -ом каналах. В самом деле, функция корреляции помехи  $i$ -ом и  $j$ -ом каналах равна

$$\langle y_i y_j^H \rangle = \langle \tilde{\mathbf{F}}_i^H \mathbf{X} \mathbf{X}^H \tilde{\mathbf{F}}_j \rangle = \tilde{\mathbf{F}}_i^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_j = \tilde{\mathbf{F}}_i^H (\tilde{\mathbf{F}}_{j+1} + a'_j \tilde{\mathbf{F}}_j + a''_{j-1} \tilde{\mathbf{F}}_{j-1}). \quad (2.4.14)$$

Теперь с помощью (2.4.9) и (2.4.10) можно получить, что  $\langle y_i y_j^H \rangle = 0$ , если  $i \neq (j-1, j, j+1)$ . Поэтому матрица  $\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp$  имеет трех диагональный вид, состоит из действительных чисел, является симметричной и равна

$$\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp = \begin{pmatrix} a'_1 & a''_1 & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ a''_1 & a'_2 & a''_2 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & a''_2 & a'_3 & a''_3 & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & a'_{N^*-1} \end{pmatrix}. \quad (2.4.15)$$

Отметим, что в силу положительной определенности эрмитовой матрицы  $\mathbf{M}$  коэффициенты  $\alpha_k$  и  $a''_k$  в (2.4.10), а, следовательно, и компоненты вектора  $\mathbf{B}_\perp$  являются действительными числами.

Рассмотрим некоторые свойства адаптивных ДОС, описываемых матрицами  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_\perp$ . При этом будем предполагать, что ААР является линейной, эквидистантой и расположена в свободном пространстве.

Оптимальную ДН  $g_{opt}(u)$  ААР в соответствии с разложением (2.3.20) для весового вектора можно представить в виде линейной комбинации парциальных ДН  $g_i(u)$  отдельных независимых приемных каналов:

$$g_{opt}(u) = \sum_{k=1}^J b_k g_k(u), \quad g_k(u) = \mathbf{\Phi}^H(u) \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_0. \quad (2.4.16)$$

Здесь  $\mathbf{F}(u)$  - вектор сигнала, проходящего с произвольного направления,  $p$ -я компонента которого в случае плоских волн определяется аналогично (1.2.4) и равна  $\exp[j(p-1)u]$ . При наличии  $J$  дискретных некогерентных источников помехи КМ задается выражением (1.2.9). Из (2.4.9) и (1.2.9) при  $N'' = J + 1$  можно получить для парциальных ДН  $g_i(u)$  следующие выражения:

$$g_0(u) = N g(u - u_0), \quad (2.4.17)$$

$$g_i(u) = N \left[ g(u - u_0) + \sum_{k=1}^J k_{ik} g(u - u_k) \right], \quad (2.4.18)$$

где коэффициенты  $k_{ik}$  зависят от углового положения источников полезного сигнала ( $q_0$ ) и помехи ( $q_i$ ) и от их мощностей ( $v_i$ ), а функция  $g(u)$  определена в (2.3.8). Отсюда видно, что ДН  $g_0(u)$  основного канала не зависит от помеховой обстановки и обеспечивает максимальную выходную мощность полезного сигнала.

С помощью выражения (2.4.11) оптимальную ДН АР можно представить также в виде разложения по парциальным ДН ортогональных вспомогательных каналов:

$$g_{opt}(u) = \sum_{i=0}^{N''-1} b_{\perp i} g_{\perp i}(u), \quad g_{\perp i}(u) = \mathbf{\Phi}^H(u) \tilde{\mathbf{F}}_i. \quad (2.4.19)$$

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим случаи одного ( $J=1$ ) и двух ( $J=2$ ) некоррелированных источников помехи.

Если  $J=1$ , то адаптивная ДОС формирует два приемных канала: основной и вспомогательный. Подставляя (2.4.11) в (2.4.16), получим для ДН вспомогательного неортогонального канала следующее выражение:

$$g_1(u) = N [g(u - u_0) + N n_1 g_{10} g(u - u_1)], \quad (2.4.20)$$

где  $g_{10} = g(u_1 - u_0)$ , а функция  $g(u)$  - определена в (2.3.8). Отсюда следует, что при достаточно мощной помехе, когда  $|N n_1 f_{10}| \gg 1$ , ДН  $g_1(u)$  имеет максимум в направлении на источник помехи.

Пространственные характеристики ортогональной ДОС можно найти с помощью (2.4.11), (2.4.9) и (2.4.19). В результате получим, что ДН основного канала определяется выражением (2.4.17), а для ДН  $g_{\perp}(u)$  вспомогательного ортогонального канала будем иметь

$$g_{\perp}(u) = N^2 n_1 g_{10} [g(u - u_1) - g_{10} g(u - u_0)]. \quad (2.4.21)$$

Если размерность подпространства решений для оптимального вектора  $\mathbf{W}$  уменьшается, что при  $J=1$  имеет место, когда источник помехи попадает в нули ДН основного канала ( $g_{10}=0$ ) или совпадает с источником сигнала ( $u_1=u_0$ ), то ДН  $g_{\perp}(u)$  вспомогательного ортогонального канала в (2.4.21) обращается в нуль.

В случае двух помех ( $J=2$ ) адаптивная ДОС формирует три независимых канала приема: основной и два вспомогательных. ДН основного канала определяется выражением (2.4.17), а для ДН неортогональных каналов с помощью (2.4.16) и (1.2.9) можно получить следующие выражения [22,23]:

$$g_1(u) = N[g(u - u_0) + Nn_1 g_{10} g(u - u_1) + Nn_2 g_{20} g(u - u_2)], \quad (2.4.22)$$

$$g_2(u) = N\{g(u - u_0) + Nn_1 [(Nn_1 + 2)g_{10} + Nn_2 g_{12} g_{20}]g(u - u_1) + Nn_2 [(Nn_2 + 2)g_{20} + Nn_1 g_{21} g_{10}]g(u - u_2)\}. \quad (2.4.23)$$

На рис. 2.4 представлены ДН первого вспомогательного неортогонального (сплошные кривые) и ортогонального (пунктирные кривые) каналов адаптивной ДОС для 16-элементной линейной эквидистантной ААР ( $N=16$ ) с периодом равным половине длины волны ( $d_l = 0.5$ ). ДН рассчитывались для одинаковых мощностей двух источников помехи  $v_1=v_2=100$ , имеющих следующие угловые положения:  $\theta_1=5^\circ$ ,  $\theta_2=20^\circ$ . Источник сигнала находится на нормали к ААР ( $\theta_0=0^\circ$ ). Отметим, что первый источник помехи воздействует по главному лепестку ДН основного канала. ДН второго вспомогательного неортогонального (сплошная кривая) и ортогонального (пунктирная кривая) каналов для аналогичных параметров показаны на рис. 2.5. Из рисунков видно, что ДН ортогональных и неортогональных каналов могут существенно отличаться друг от друга.

На рис. 2.6 представлена адаптированная ДН ААР, когда  $v_1=v_2=100$ ,  $\theta_1=5^\circ$ ,  $\theta_2=20^\circ$ . Пунктирной кривой изображена ДН основного канала ААР.

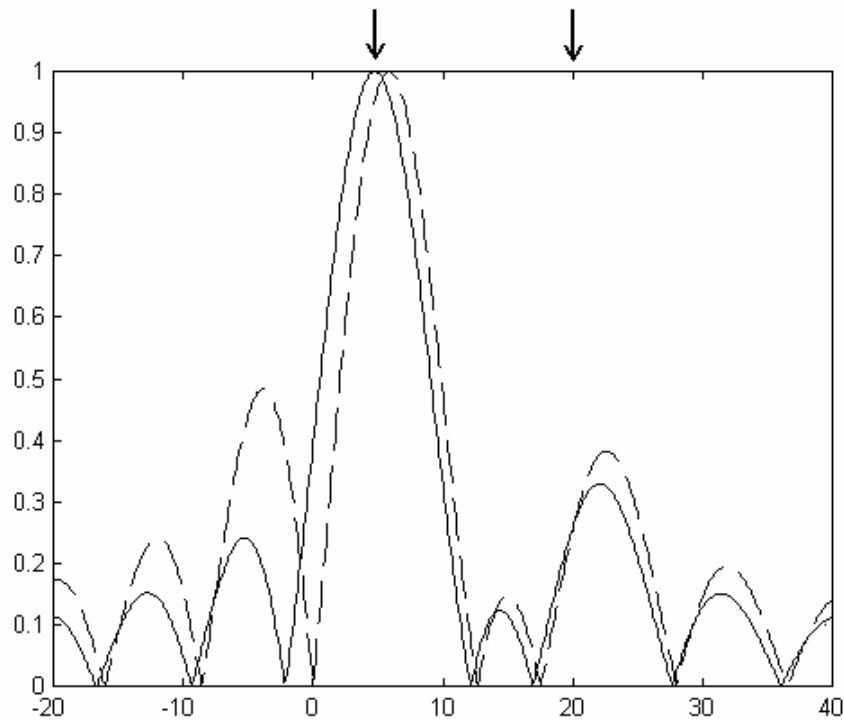


Рис. 2.4. ДН первого вспомогательного неортогонального и ортогонального каналов (сплошная и пунктирная кривые, соответственно) для  $N=16$ ,  $d_1 = 0.5$ ,  $v_1=v_2=100$ . Угловые положения источников помехи показаны стрелками, источник сигнала находится на нормали к ААР ( $\theta_0=0^\circ$ )

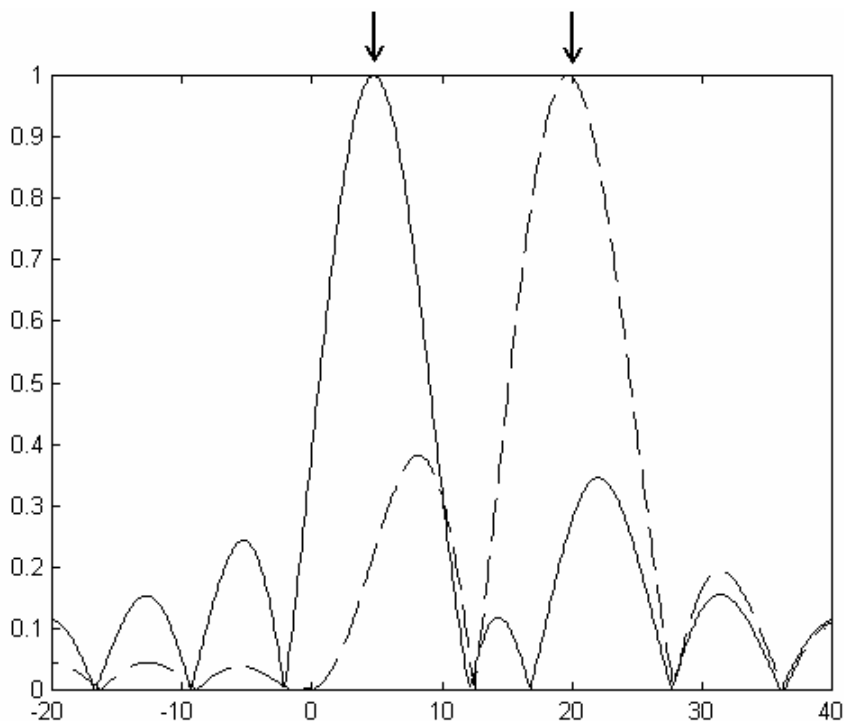


Рис. 2.5. ДН второго вспомогательного неортогонального и ортогонального каналов (сплошная и пунктирная кривые, соответственно) для  $N=16$ ,  $d_1 = 0.5$ ,  $v_1=v_2=100$ . Угловые положения источников помехи показаны стрелками, источник сигнала находится на нормали к ААР ( $\theta_0=0^\circ$ )

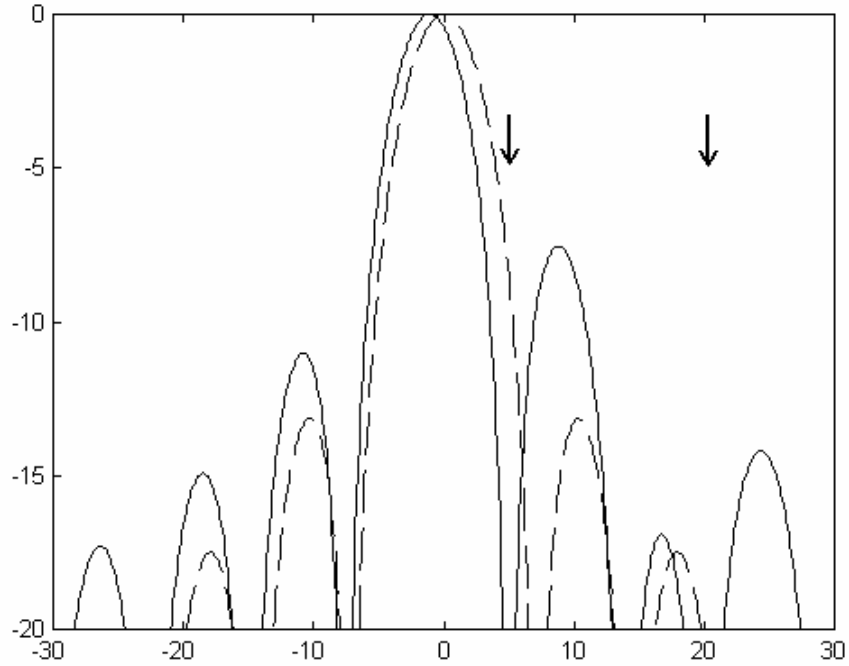


Рис. 2.6. Адаптированная ДН и ДН основного канала (сплошная и пунктирная кривые, соответственно) при  $J=2$ ,  $\nu_1=\nu_2=100$ ,  $\theta_1=5^\circ$ ,  $\theta_2=20^\circ$ ,  $N=16$ ,  $d_1 = 0.5$

Выше в данном подразделе предполагалось, что известна КМ помехи. Однако полученные результаты допускают обобщение на случай, когда известна только КМ  $\mathbf{M}_\Sigma$  смеси сигнала и помехи. В самом деле, теперь адаптивная ДОС будет определяться матрицей  $\mathbf{A}' = (\Phi_0, \mathbf{M}_\Sigma \Phi_0, \dots, \mathbf{M}_\Sigma^{N'-1} \Phi_0)$ , содержащей все независимые степенные векторы, или матрицей  $\mathbf{A}'_\perp$ , состоящей из ортонормированных векторов, полученных путем ортогонализации степенных векторов. Для векторов  $\mathbf{V}' = (b'_0, b'_1, \mathbf{K}, b'_{N'-1})^T$  и  $\mathbf{V}'_\perp = (b'_{\perp 0}, b'_{\perp 1}, \mathbf{K}, b'_{\perp(N'-1)})^T$  коэффициентов разложения можно получить уравнения, аналогичные уравнениям (2.4.3) и (2.4.13):

$$(\mathbf{A}')^H \mathbf{M}_0 \mathbf{A}' \mathbf{V}' = (\mathbf{A}')^H \Phi_0, \quad (2.4.24)$$

$$(\mathbf{A}'_\perp)^H \mathbf{M}_0 \mathbf{A}'_\perp \mathbf{V}'_\perp = (\mathbf{A}'_\perp)^H \mathbf{1}_1. \quad (2.4.25)$$

## 2.5. Эффективность квазиоптимальной обработки при ограничении степенного базиса

Для реализации оптимальной обработки сигналов в ААР необходимо использовать полный степенной базис. С целью упрощения пространственной обработки в ААР



рассмотрим эффективность квазиоптимальной обработки с сокращенным числом независимых степенных векторов [24].

Если в качестве базиса выбрать систему векторов  $\{\mathbf{1}_1=(1, 0, \dots, 0)^T; \mathbf{1}_2=(0, 1, 0, \dots, 0)^T; \dots; \mathbf{1}_N=(0, 0, \dots, 0, 1)^T\}$ , то этому базису будет соответствовать ДОС, определяемая единичной матрицей  $\mathbf{I}$ , что эквивалентно отсутствию ДОС. Включение ДОС означает преобразование базиса  $\{\mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \dots, \mathbf{1}_N\}$  в некоторый другой базис  $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N^2}\}$ . Если оно взаимно однозначное ( $N^2=N$ ), то оба базиса охватывают все пространство. Соответственно потерь степеней свободы в ААР нет и возможна оптимальная обработка без потерь в ОСШ. При сокращении числа выходных каналов ДОС ( $N^2 < N$ ) ограниченный базис  $\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_{N^2}\}$  будет охватывать некоторое подпространство  $\Pi_1$  размерности  $N^2$ .

При наличии  $J < N-1$  источников помехи оптимальный весовой вектор  $\mathbf{W}$  принадлежит подпространству  $\Pi_2$ , размерность которого  $N^2 \leq J+1$ . Если  $\Pi_1$  совпадает с  $\Pi_2$ , то возможна оптимальная обработка даже при уменьшенном числе выходных каналов ДОС. При несовпадении подпространств  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  возможна только квазиоптимальная обработка сигналов, эффективность которой будет зависеть от степени пересечения этих подпространств. Причем, вероятность совпадения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  тем меньше, чем меньше их размерности. Так как априорная информация об угловом положении источников помехи и их числе отсутствует, то положение подпространства  $\Pi_2$  является неизвестным и меняется при изменении помеховой обстановки. Поэтому обеспечить совпадение  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с помощью некоторой «жесткой» (неадаптивной) ДОС невозможно. Следовательно, уменьшение числа выходных каналов такой ДОС приведет к снижению эффективности адаптации. Поэтому для реализации оптимальной обработки необходимо формировать полное число  $N$  выходов «жесткой» ДОС.

Выше было показано, что при представлении оптимального весового вектора ААР в виде разложения по векторам степенной последовательности размерность  $N^2$  степенного базиса определяется либо числом  $J$  внешних источников помехи, либо числом  $N$  элементов ААР. Характеристики приемных каналов адаптивных ДОС, определяемых матрицами  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{A}_\perp$ , зависят от КМ  $\mathbf{M}$  помехи и изменяются при изменении помеховой обстановки. Поэтому использование адаптивной ДОС позволяет получить такое «нежесткое» преобразование базиса, при котором подпространства  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  совпадают при любой помеховой обстановке.

При сокращении числа каналов ДОС, то есть при использовании неполной системы степенных векторов, можно говорить о квазиоптимальной обработке. Однако теперь

квазиоптимальность обусловлена только уменьшением размерности подпространства  $\mathcal{V}_1$  по сравнению с подпространством  $\mathcal{V}_2$ . Поскольку  $\mathcal{V}_1$  всегда принадлежит  $\mathcal{V}_2$ , то эффективность частичной адаптации с «нежесткой» ДОС будет выше, чем при использовании «жесткой» ДОС.

Рассмотрим эффективность ААР с сокращенным числом выходов ДОС, построенной на степенных векторах [24]. При этом выходное ОСШ не будет зависеть от того, какая (неортогональная или ортогональная) ДОС используется, если формируется одинаковое число вспомогательных каналов. Пусть ДОС состоит из ортогональных векторов, полученных из векторов степенной последовательности с помощью (2.4.9) и (2.4.10), то есть преобразующая матрица  $\mathbf{A}_\perp = (\tilde{\mathbf{F}}_0, \tilde{\mathbf{F}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{N^*-1})$ . Так как в матрице  $\mathbf{A}_\perp$  все векторы, начиная со второго, ортогональны вектору  $\mathbf{F}_0$ , то из (2.4.1) несложно получить, что

$$\mathbf{h}_{\max} = (\Phi_0^H \Phi_0) b_{\perp 0}. \quad (2.5.1)$$

С помощью (2.4.13) найдем, что весовой коэффициент  $b_{\perp 0}$  на выходе основного канала ДОС с весовым вектором  $\tilde{\mathbf{F}}_0$  равен

$$b_{\perp 0} = [(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)^{-1}]_{11}. \quad (2.5.2)$$

В соответствии с (2.4.15) действительная  $(N^2 \times N^2)$ -размерная матрица  $\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp$  является трех диагональной и симметричной. Чтобы подчеркнуть размерность этой матрицы введем обозначение  $(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*}$  и представим ее в блочном виде:

$$(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_0^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_0 & \tilde{\mathbf{X}}_{N^*-1}^T \\ \tilde{\mathbf{X}}_{N^*-1} & (\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*-1} \end{pmatrix}, \quad (2.5.3)$$

где  $\tilde{\mathbf{X}}_{N^*-1} = (\tilde{\mathbf{F}}_0^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_1, 0, \dots, 0)^T$  -  $(N^2-1)$ -мерный корреляционный вектор, первая компонента которого представляет собой функцию корреляции помехи в основном и первом вспомогательных каналах ДОС, а  $(N^2-1) \times (N^2-1)$ -размерная матрица  $(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*-1}$  получена из матрицы  $(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*}$  зачеркиванием элементов первой строки и первого столбца и представляет собой КМ помехи во вспомогательных каналах ДОС. Теперь для первого элемента обратной матрицы  $(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*}^{-1}$  будем иметь, что

$$[(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*}^{-1}]_{11} = \{\tilde{\mathbf{F}}_0^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_0 - (\tilde{\mathbf{F}}_0^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_1)^2 [(\mathbf{A}_\perp^H \mathbf{M} \mathbf{A}_\perp)_{N^*-1}^{-1}]_{11}\}^{-1}. \quad (2.5.4)$$

Матрица  $(\mathbf{A}_{\perp}^H \mathbf{M} \mathbf{A}_{\perp})_{N''-1}$  обладает такими же свойствами как и исходная матрица  $(\mathbf{A}_{\perp}^H \mathbf{M} \mathbf{A}_{\perp})_{N''}$  - является симметричной и имеет трех диагональный вид. Поэтому первый элемент обратной матрицы  $[(\mathbf{A}_{\perp}^H \mathbf{M} \mathbf{A}_{\perp})_{N''-1}^{-1}]_{11}$  может быть выражен, аналогично (2.5.4), через первый диагональный элемент матрицы  $[(\mathbf{A}_{\perp}^H \mathbf{M} \mathbf{A}_{\perp})_{N''-2}^{-1}]_{11}$  меньшей размерности, равной  $(N^2-2) \times (N^2-2)$ .

Продолжая эту рекуррентную процедуру вычислений, можно найти коэффициент  $b_{\perp 0}$  и, следовательно, ОСШ в (2.5.1). В результате для  $N^2 \geq 2$  будем иметь, что

$$\mathbf{h}_{N''-1} = \mathbf{h}_0 \mathbf{g}_{N''-1}, \quad \mathbf{g}_{N''-1} = \frac{1}{1 - \frac{r_{01}^2}{1 - \frac{r_{12}^2}{1 - \frac{\dots}{1 - r_{N''-2, N''-1}^2}}}}, \quad (2.5.5)$$

где  $r_{i, i+1} = \tilde{\mathbf{F}}_i^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_{i+1} (\tilde{\mathbf{F}}_i^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_i)^{-1/2} (\tilde{\mathbf{F}}_{i+1}^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{F}}_{i+1})^{-1/2}$  - коэффициент корреляции помехи на выходах  $i$ -го и  $(i+1)$ -го каналов ортогональной ДОС и  $\mathbf{h}_0 = (\mathbf{S}_0^H \mathbf{S}_0)^2 (\mathbf{S}_0^H \mathbf{M} \mathbf{S}_0)^{-1}$  - ОСШ на выходе основного канала ДОС, обеспечивающего согласованный прием полезного сигнала. Фактор  $\gamma_{N''-1}$  в (2.5.5) характеризует эффективность обработки при использовании  $(N''-1)$  вспомогательных каналов ДОС.

Рассмотрим случай одного вспомогательного канала, когда фактор  $\gamma_1$  равен  $\mathbf{g}_1 = (1 - r_{01}^2)^{-1}$  и называется коэффициентом подавления помехи. КМ  $\mathbf{M}$  определяется выражением (1.2.9). С помощью (1.2.9) и (2.4.9) можно получить, что коэффициент корреляции помехи в основном и вспомогательном каналах ДОС равен

$$r_{01}^2 = \left[ 1 + \frac{(1 + n_1 N)}{n_1^2 N^2 |g_{10}|^2 (1 - |g_{10}|^2)} \right]^{-1}, \quad (2.5.6)$$

где  $|g_{10}|^2$  - уровень ДН по мощности основного канала ДОС в направлении на источник помехи (см.(2.4.20)). Если источник попадает в нули ДН ( $|g_{10}|^2 = 0$ ) или совпадает с источником сигнала ( $|g_{10}|^2 = 1$ ), то коэффициент  $r_{01}^2$  принимает минимальное значение ( $r_{01}^2 = 0$ ). При этом в (2.5.6) фактор  $\mathbf{g}_1 = 1$  и эффект адаптации отсутствует. Нетрудно найти из (2.5.6), что при  $|g_{10}|^2 = 0,5$  коэффициент корреляции  $r_{01}^2$  и, соответственно, фактор  $\mathbf{g}_1$

принимают максимальное значение. При достаточно мощной помехе ( $nN \gg 1$ ),  $g_1 \approx 1 + nN |g_{10}|^2 (1 - |g_{10}|^2)$ , а если помеха слабая ( $nN \ll 1$ ), то  $g_1 \approx 1 + n^2 N^2 |g_{10}|^2 (1 - |g_{10}|^2)$ .

Приведем результаты численного статистического анализа эффективности квазиоптимальной обработки с сокращенным степенным базисом на основе выражения (2.5.5).

Рассмотрим 16-элементную ( $N=16$ ) и 27-элементную ( $N=27$ ) линейные эквидистантные ААР с относительным периодом  $d_l = 0,5$ . Отдельную помеховую ситуацию зададим «вбрасывая» в область вне главного луча ДН основного канала ДОС заданное число  $J$  источников помехи. Угловое положение каждого из них, будем считать случайной величиной, равномерно распределенной в указанной области углов. Полное число вспомогательных каналов ДОС должно быть равным числу  $J$  источников помехи. Учитывая, что источники воздействуют по случайному уровню ДН основного канала ДОС, их мощности  $v_i$  можно задавать одинаковыми. Пусть  $v_i = v = 100$ . Для каждой ситуации определим с помощью (2.5.5) эффективность  $g_{N^2-1}$  квазиоптимальной обработки с сокращенным числом  $N^2 < J$  вспомогательных каналов ортогональной адаптивной ДОС. Усредняя  $g_{N^2-1}$  по ансамблю помеховых ситуаций, получим статистическую оценку  $\langle g_{N^2-1} \rangle$ , характеризующую эффективность квазиоптимальной обработки с сокращенным степенным базисом.

Среднее ОСШ, обеспечиваемое с помощью оптимальной обработки при полном степенном базисе приведены в табл. 2.1. Так как мощность собственных шумов является единичной, то при отсутствии помехи ОСШ равно числу элементов  $N$ . Поэтому из таблицы следует, что эффективность подавления помехи является достаточно высокой, когда число источников помехи не превышает числа степеней свободы ААР ( $J < N-1$ ).

Таблица 2.1.

Число элементов ААР	Число источников помехи				
	2	4	8	15	32
16	15,85	15,37	13,68	10,13	2,1
27	26,9	26,0	23,7	22,24	15,8

Зависимость фактора  $\langle g_{N^2-1} \rangle$  от числа вспомогательных каналов ДОС показана на рис. 2.7 ( $N=16$ ) и рис. 2.8 ( $N=27$ ) для различного числа источников помехи  $J=2,4,8,15$  и 32. Каждая из кривых получена путем усреднения по 20 отдельным помеховым ситуациям. Видно, что при достаточно малом числе источников  $J < 4$  использование только одного

вспомогательного канала уменьшает ОСШ не более, чем на 3 дБ. Это уменьшение при  $N=16$  составляет 0,75 дБ ( $J=2$ ) и 2,8 дБ ( $J=4$ ). Аналогичные потери в ОСШ для  $N=27$  равны 0,46 дБ ( $J=2$ ) и 1,7 дБ ( $J=4$ ). Для большего числа источников ( $J>4$ ) видно, что сокращение числа каналов ДОС в два раза не приводит к уменьшению ОСШ более чем на 3 дБ, то есть средняя эффективность квазиоптимальной обработки остается достаточно высокой.

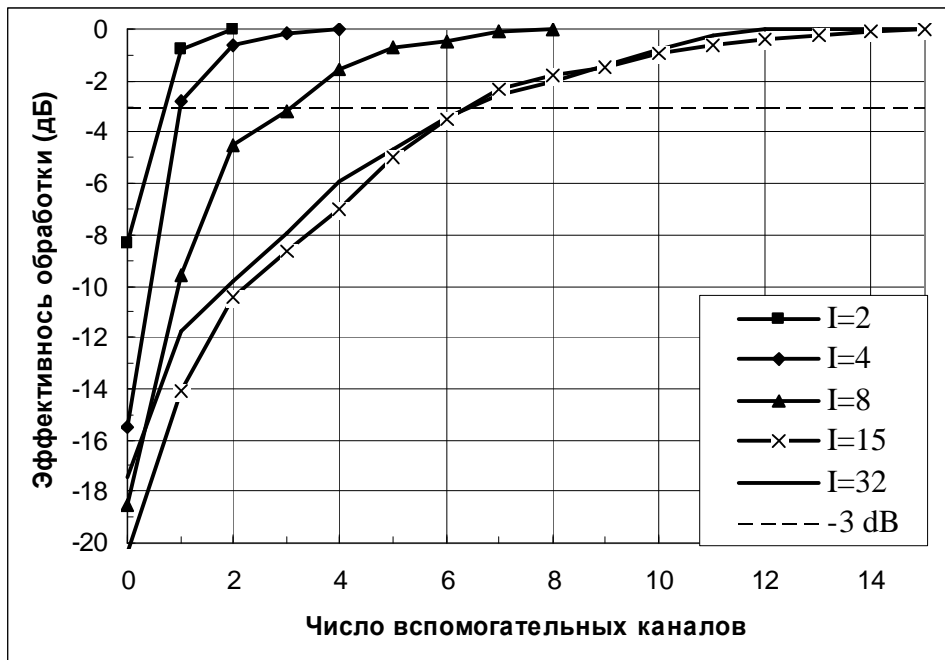


Рис. 2.7. Увеличение ОСШ (дБ) в зависимости от числа вспомогательных каналов ДОС при различном числе источников помехи  $J= 2, 4, 8, 15, 32$  для 16-элементной АР с периодом  $d_1=0,5$ .

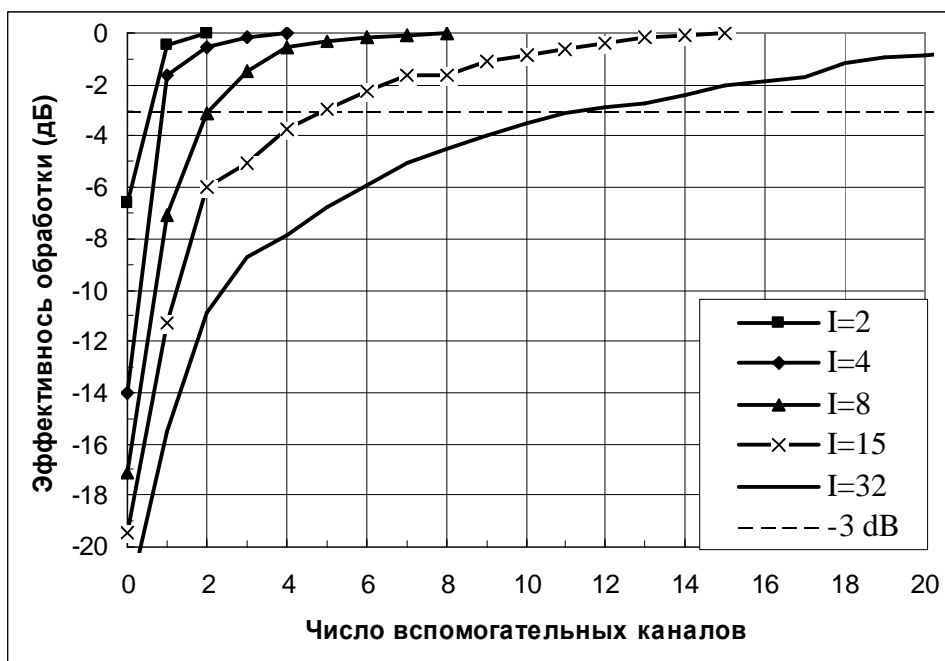


Рис. 2.8. Увеличение ОСШ (дБ) в зависимости от числа вспомогательных каналов ДОС при

различном числе источников помехи  $J= 2, 4, 8, 15, 32$  для 27-элементной ААР с периодом  $d_1=0.5$

Представляет интерес сравнение эффективности квазиоптимальной обработки в ААР при использовании адаптивной («нежесткой») ДОС, построенной на основе степенного базиса, или «жесткой» ДОС. Естественно провести такое сравнение при одинаковом числе выходных каналов ДОС (каналов адаптации). Одним из достаточно распространенных «жестких» способов уменьшения числа каналов адаптации является секционирование ААР, когда она разбивается на отдельные подрешетки путем объединения смежных элементов.

Предположим, что  $N$ -элементная ААР разделена на  $N/N_{sec}$  секций (подрешеток) по  $N_{sec}$  смежных излучателей в каждой. Для такой ААР проведем численный статистический анализ эффективности обработки, аналогичный описанному выше. Будем считать, что подрешетки состоят из  $N_{sec}=2, 4$  или  $8$  элементов. Тогда при общем числе излучателей  $N=16$ , число каналов адаптации составит  $N/N_{sec}=8, 4$  или  $2$ , соответственно. В табл. 2.2 приведены коэффициенты, показывающие, во сколько раз средняя эффективность секционированной ААР ниже средней эффективности ААР с ДОС, построенной на степенных векторах. Более высокая эффективность ААР со степенной ДОС объясняется тем, что все вспомогательные каналы такой ДОС обладают лучшей чувствительностью к источникам, вносящим наибольший вклад в мощность помехи на выходе основного канала ДОС. Из табл. 2.2 также видно, что при двух выходных каналах преимущества ААР со степенной ДОС наиболее существенны, хотя с ростом числа источников ( $J=8$ ) эти преимущества уменьшаются в силу снижения эффективности обоих видов ААР.

Таблица 2.2.

Число каналов адаптации	Число источников помехи		
	2	4	6
8	1.02	1.08	2.44
4	1.32	2.78	5.26
2	3.57	10.0	6.0

### ГЛАВА 3. АДАПТИВНЫЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ НА ОСНОВЕ МАКСИМАЛЬНО ПРАВДОПОДОБНОЙ ОЦЕНКИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПОМЕХИ

#### 3.1. Максимально правдоподобная оценка корреляционной матрицы помехи

Как показано выше, нахождение весового вектора ААР в соответствии с любым из основных критериев эффективности, связано с обращением КМ помехи в приемных каналах ААР. Эта матрица играет фундаментальную роль в теории ААР, так как в ней отображена вся информация о помеховой обстановке. Очевидно, что на практике приходится иметь дело не с точной КМ помехи, а с ее оценкой  $\hat{\mathbf{M}}$ , полученной на основе конечного числа выборок входного процесса в приемных каналах ААР. Как правило, используется максимально правдоподобная (МП) оценка КМ помехи в приемных каналах ААР. Поэтому приведем вывод выражения для МП оценки этой матрицы.

Пусть на  $N$  входах ААР имеются помеховые колебания, каждое из которых является гауссовским стационарным случайным процессом с нулевым средним значением. Совокупность комплексных амплитуд помехи в отдельных приемных каналах ААР в произвольный момент времени  $t$  можно представить в виде  $N$ -мерного вектора–столбца

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]^T. \quad (3.1.1)$$

На практике входной процесс наблюдается в дискретные моменты времени. Пусть имеется  $L$  выборок  $\mathbf{X}(j)$  ( $j=1,2,\dots,L$ ) вектора помехи  $\mathbf{X}$ , соответствующих  $L$  моментам времени, взятым через одинаковые промежутки  $\Delta t$ . Временной интервал между выборками задается так, чтобы выборки помехи были статистически независимыми.

Предположим, что ширина частотного спектра принимаемых колебаний существенно превышает полосу  $\Delta f$  приемника и в пределах этой полосы их спектр может считаться равномерным. Если временные отсчеты выбирать с интервалом  $\Delta t \geq (\Delta f)^{-1}$ , то  $N$ -мерные случайные выборки входного процесса  $\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(L)$  будут статистически независимыми между собой.

Тогда совместный закон распределения  $NL$  случайных величин  $\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(L)$  можно выразить через произведение отдельных плотностей вероятности в виде [18]:

$$p(\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(L)) = \frac{1}{(2\pi)^{NL} (\det \mathbf{M})^L} \exp \left\{ - \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l) \right\}. \quad (3.1.2)$$

Выражение (3.1.2) описывает плотность вероятности  $L$  независимых временных выборок из комплексного нормального случайного процесса, наблюдаемого в  $N$  приемных каналах ААР.

Введем для удобства обозначение  $p_L(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(L))$  и перейдем от плотности вероятности  $p_L(\mathbf{X})$  к ее логарифму. Получим, что

$$\ln(p_L(\mathbf{X})) = -NL \ln(2p) - L \ln(\det \mathbf{M}) - \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l). \quad (3.1.3)$$

КМ  $\mathbf{M}$  является эрмитовой, положительно определенной матрицей. Такую матрицу, как известно [19,20], можно всегда представить в так называемом спектральном виде, то есть в виде разложения (2.2.2) по ортонормированным собственным векторам  $\mathbf{U}_j$ .

Учтем, что определитель матрицы  $\mathbf{M}$  равен

$$\det(\mathbf{M}) = \prod_{j=1}^N I_j. \quad (3.1.4)$$

Отсюда

$$\ln(\det(\mathbf{M})) = \sum_{j=1}^N \ln I_j. \quad (3.1.5)$$

Замечательным свойством спектрального разложения (2.2.2) КМ  $\mathbf{M}$  является то, что любая матричная функция  $f(\mathbf{M})$  от матрицы  $\mathbf{M}$  также может быть представлена в виде спектрального разложения (2.2.2), в котором необходимо заменить собственные числа  $I_i$  на функцию  $f(I_i)$ . При этом собственные векторы  $\mathbf{U}_j$  остаются неизменными. Поэтому

$$f(\mathbf{M}) = \sum_{j=1}^N f(I_j) \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H. \quad (3.1.6)$$

Введем в рассмотрение матрицу, которая является логарифмом от КМ  $\mathbf{M}$ . В соответствии с (3.1.6) имеем, что

$$\ln \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N (\ln I_i) \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H. \quad (3.1.7)$$

Теперь найдем след матрицы  $\ln \mathbf{M}$ . Прямой проверкой нетрудно показать, что

$$Sp(\mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H) = \mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_j. \quad (3.1.8)$$

Далее в результате ряда очевидных последовательных преобразований получим, что



$$\begin{aligned}
Sp(\ln \mathbf{M}) &= Sp\left(\sum_{i=1}^N (\ln I_i) \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H\right) = \sum_{i=1}^N Sp((\ln I_i) \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H) = \\
&= \sum_{i=1}^N (\ln I_i) Sp(\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H) = \sum_{i=1}^N \ln I_i.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

При выводе (3.1.9) использовалось также свойство ортонормированности собственных векторов  $\mathbf{U}_i$ , вследствие которого  $Sp(\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^H) = 1$ .

Сравним выражения (3.1.5) и (3.1.9). Так как их правые части совпадают, то левые части также должны быть одинаковыми. В результате, получим, что

$$\ln(\det(\mathbf{M})) = Sp(\ln \mathbf{M}). \tag{3.1.10}$$

Рассмотрим последний член в выражении (3.1.3). Произведение  $\mathbf{X}(l)^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l)$  является скалярной величиной. Используя (3.1.8) для векторов  $\mathbf{X}(l)$  и  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l)$ , можно записать, что

$$\mathbf{X}(l)^H \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l) = Sp(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H). \tag{3.1.11}$$

Подставив выражения (3.1.10) и (3.1.11) в (3.1.3). В результате получим:

$$\begin{aligned}
\ln[p_L(\mathbf{X})] &= -NL \ln(2p) - L Sp(\ln \mathbf{M}) - \sum_{l=1}^L Sp(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H) = \\
&= -NL \ln(2p) - Sp\left[L \ln \mathbf{M} + \sum_{l=1}^L \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H\right].
\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Теперь найдем МП оценку КМ по  $L$  временных выборкам входного процесса. Для этого найдем производную от логарифма плотности вероятности  $p_L(\mathbf{X})$  по матрице  $\mathbf{M}$  и приравняем эту производную к нулю. В результате придем к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \ln(p(\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(L))) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \left\{ -Sp\left[L \ln \mathbf{M} + \sum_{l=1}^L \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H\right] \right\} \Big|_{\mathbf{M}=\hat{\mathbf{M}}} = 0. \tag{3.1.13}$$

Операции дифференцирования и вычисления следа можно переставить. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} Sp(f(\mathbf{M})) = Sp\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} [f(\mathbf{M})]\right). \tag{3.1.14}$$

В результате из (3.1.13) будем иметь, что

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{M}} \left[ L \ln \mathbf{M} + \sum_{l=1}^L \mathbf{M}^{-1} \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H \right] \Big|_{\mathbf{M}=\hat{\mathbf{M}}} = 0. \tag{3.1.15}$$

Отсюда

$$-L\hat{\mathbf{M}}^{-1} + \sum_{l=1}^L \hat{\mathbf{M}}^{-2} \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H = 0. \quad (3.1.16)$$

Умножая выражение (3.1.16) слева на  $\hat{\mathbf{M}}^2$ , получим МП оценку КМ по  $L$  статистически независимым выборкам входного процесса в виде

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H. \quad (3.1.17)$$

Если число выборок входного процесса увеличивается ( $L \rightarrow \infty$ ), то оценочная матрица переходит в точную КМ, то есть  $\hat{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{M}$  при  $L \rightarrow \infty$ .

Как и любая оценка, КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  вида (3.1.17) является случайной матрицей. Поэтому ее собственные числа и собственные векторы являются случайными. Собственные числа распределены в интервале положительных чисел от нуля до бесконечности. В силу случайного характера вероятность появления кратных собственных чисел ничтожно мала.

Если число выборок меньше числа приемных каналов ААР ( $L < N$ ), то оценочная КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  становится вырожденной. Она имеет  $L$  положительных случайных собственных чисел и  $(N-L)$  нулевых собственных чисел. Такая выборка называется короткой. Короткая выборка заполняет только часть  $N$ -мерного векторного пространства, имеющую размерность  $L$ . Поэтому такая выборка не обладает достаточной информативностью для оценки параметров помехи во всем векторном пространстве. Ясно, что при работе с короткой выборкой свойства помехи необходимо доопределять на основе априорных данных. Случай короткой выборки представляет значительный интерес и будет рассмотрен ниже.

### 3.2. Метод непосредственного обращения выборочной корреляционной матрицы

Предположим, что имеется достаточно длинная выборка входного процесса, такая, что ее длина  $L$  превышает или равна числу  $N$  элементов ААР ( $L \geq N$ ). При этом МП оценка  $\hat{\mathbf{M}}$  вида (3.1.17) имеет  $N$  положительных (не равных нулю) собственных чисел. Весовой вектор, обеспечивающий максимум ОСШ, определяется из системы уравнений (2.1.12). Подставляя вместо точной КМ  $\mathbf{M}$  ее МП оценку, получим, что весовой вектор равен

$$\hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{M}}^{-1} \Phi_0. \quad (3.2.1)$$

Теперь с помощью (3.1.17) можно найти обратную КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  и затем вычислить оценку  $\hat{\mathbf{W}}$  весового вектора  $\mathbf{W}$ .

Максимальное значение ОСШ при точно известной КМ помехи дается выражением (2.1.8). При использовании оценочной КМ для ОСШ вместо (2.1.8) будем иметь

$$\hat{h} = \frac{\hat{\mathbf{W}}^H \mathbf{M}_s \hat{\mathbf{W}}}{\hat{\mathbf{W}}^H \mathbf{M} \hat{\mathbf{W}}}. \quad (3.2.2)$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести относительное ОСШ  $r$ , нормированное к максимальному значению ОСШ:

$$r = \frac{\hat{h}}{h} = \frac{\hat{\mathbf{W}}^H \mathbf{M}_s \hat{\mathbf{W}}}{\hat{\mathbf{W}}^H \mathbf{M} \hat{\mathbf{W}}} \times \left( \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{M}_s \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{M} \mathbf{W}} \right)^{-1}. \quad (3.2.3)$$

Величина  $r$  является случайной, не может превышать единицу ( $r \leq 1$ ) и имеет интегральную функцию вероятности в виде  $b$ -распределения [18]:

$$p_h(y) = \frac{L!}{(N-2)!(L+1-N)!} \int_0^y (1-u)^{N-2} u^{L+1-N} du .. \quad (3.2.4)$$

Распределение вероятностей дает полную информацию о сходимости алгоритма прямого обращения выборочной КМ (3.1.17). Однако на практике часто свойства сходимости достаточно характеризовать средним значением относительного ОСШ ( $\langle r \rangle$ ) и дисперсией ( $D_r$ ) величины  $r$ . Известно [3], что

$$\langle r \rangle = \frac{L+2-N}{L+1}; \quad D_r = \frac{(L+2-N)(N-1)}{(L+1)^2(L+2)}. \quad (3.2.5)$$

Эти формулы показывают, что при  $L \rightarrow \infty$  среднее значение ОСШ асимптотически стремится к максимальному значению ( $\hat{h} \rightarrow h$ ), а дисперсия стремится к нулю ( $D_r \rightarrow 0$ ).

На рис. 3.1 показана относительная эффективность ААР в зависимости от числа выборок  $L$  входного процесса для разного числа приемных каналов  $N$ .

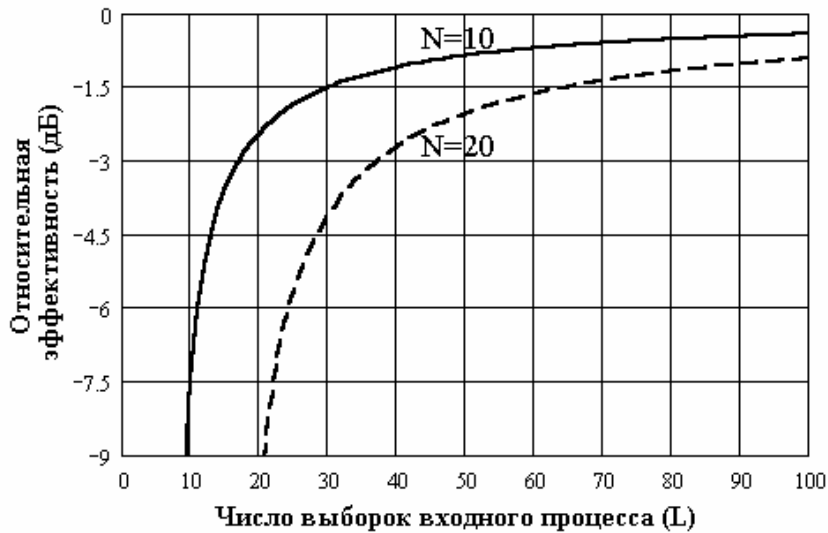


Рис. 3.1. Эффективность ААР в зависимости от числа выборок  $L$  входного процесса

На практике число выборок  $L$  входного процесса всегда ограничено. Первая формула (3.2.5) дает возможность определить  $L$  для ААР с произвольным числом приемных каналов  $N$ , исходя из допустимых потерь в ОСШ. Например, пусть допустимые потери в среднем составляют 3 дБ, то есть в (3.2.5)  $\langle r \rangle = 0,5$  (-3 дБ). Тогда из (3.2.5) находим, что необходимо иметь  $L \geq 2N - 3$  выборок входного процесса. В наиболее интересном случае достаточно больших ААР ( $N \gg 1$ ) число выборок  $L \approx 2N$ .

Следовательно, если число выборок превышает число приемных каналов ААР в два раза, то снижение ОСШ не превысит 3 дБ. В этом случае дисперсия случайной величины  $r$  в (3.2.3) будет равна  $D_r \approx 0,125N^{-1}$ , а относительная дисперсия является очень малой и определяется следующим выражением

$$\frac{D_r}{(\langle r \rangle)^2} \approx \frac{0,25}{N} \ll 1. \quad (3.2.6)$$

Второе выражение (3.2.5) может показаться удивительным, так как из него следует, что дисперсия случайной величины  $r$  не зависит от мощности помехи. Однако это обстоятельство является следствием того факта, что оценочное ОСШ  $\hat{h}$  (3.2.2) и оптимальное ОСШ  $h$  (2.1.8) изменяются пропорционально мощности помехи, и их отношение  $r = \hat{h}/h$  от мощности помехи не зависит.

Таким образом, для нахождения приемлемой оценки КМ число выборок входного процесса должно превышать число приемных каналов ААР примерно в 2 раза ( $L \geq 2N$ ).

Оценим теперь вычислительные затраты, необходимые для реализации метода вычисления весового вектора ААР на основе прямого обращения выборочной КМ. Рассмотрим процедуру формирования МП оценки  $\hat{\mathbf{M}}$  эрмитовой КМ  $\mathbf{M}$  по  $L$  выборкам входного процесса. При этом будем оценивать необходимое число комплексных умножений, и пренебрегать операциями сложения. Из основного выражения (3.1.17) следует, что оценочная матрица  $\hat{\mathbf{M}}$  также является эрмитовой. Поэтому нет необходимости в вычислении всех  $N^2$  элементов этой матрицы, а достаточно вычислить только  $N(N+1)$  элементов ( $N$  диагональных и  $0,5N(N-1)$  недиагональных элементов). Для нахождения каждого элемента необходимо  $\approx L$  комплексных умножений. Поэтому  $\approx 0,5LN(N+1)$  комплексных умножений требуется для вычисления матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$ . Обращение эрмитовой матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  предполагает выполнение  $(0,5N^3 + N^2)$  комплексных умножений. Наконец, операция умножения обратной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  на вектор сигнала  $\Phi_0$ , в соответствии с (3.2.1), требует выполнения  $N^2$  комплексных умножений. Таким образом, в наиболее интересном для практики случае многоэлементных ААР с достаточно большим числом приемных антенн ( $N \gg 1$ ), общий объем вычислений составляет  $\approx 1,5N^3$  комплексных умножений.

### 3.3. Рекуррентное обращение выборочной корреляционной матрицы

Выше было показано, что при вычислении выборочной КМ по формуле (3.1.17) и ее непосредственном обращении требуется достаточно большой объем операций комплексного умножения ( $\approx 1,5N^3$ ), что может затруднить обработку в реальном масштабе времени. Для уменьшения объема вычислений существуют рекуррентные алгоритмы оценивания не прямой, а обратной КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  [1,3].

Рассмотрим наиболее часто применяемый алгоритм непосредственной оценки обратной КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ , не требующий нахождения прямой выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ . Оценку КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  по  $(l+1)$ -ой выборке входного процесса можно представить в следующем рекуррентном виде:

$$\hat{\mathbf{M}}(l+1) = \frac{l}{l+1} \cdot \hat{\mathbf{M}}(l) + \frac{1}{l+1} \cdot \mathbf{X}(l+1)\mathbf{X}^H(l+1). \quad (3.3.1)$$

Это выражение представляет собой рекуррентную оценку КМ  $\hat{\mathbf{M}}(l+1)$  по  $(l+1)$ -ой выборке входного процесса на основе уже полученной оценки КМ  $\hat{\mathbf{M}}(l)$  по  $l$  выборкам входного процесса и принятой  $(l+1)$ -ой выборке  $\mathbf{X}(l+1)$ .

Правая часть в (3.3.1) состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое представляет собой квадратную  $N$ -мерную матрицу. Второе слагаемое представляет собой матрицу, образованную произведением  $N$ -мерных вектора-столбца  $\mathbf{X}(l+1)$  и вектора-строки  $\mathbf{X}^H(l+1)$ . Такие матрицы называются диадными. Независимо от размерности векторов их ранг всегда равен единице.

В теории матриц известна так называемая лемма обращения суммы двух матриц, одна из которых является диадной. На основании этой леммы можно записать следующее рекуррентное выражение для обратной КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l+1)$  [1,3]:

$$\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l+1) = \frac{l+1}{l} \cdot \left( \hat{\mathbf{M}}^{-1}(l) - \frac{\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l)\mathbf{X}(l+1)\mathbf{X}^H(l+1)\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l)}{l + \mathbf{X}^H(l+1)\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l)\mathbf{X}(l+1)} \right), \quad (3.3.2)$$

где  $l=1,2,\dots,L$ .

Введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{V}(l+1) = \hat{\mathbf{M}}^{-1}(l)\mathbf{X}(l+1)$ . Тогда выражение (3.3.2) можно записать в более компактном виде:

$$\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l+1) = \frac{l+1}{l} \cdot \left( \hat{\mathbf{M}}^{-1}(l) - \frac{\mathbf{V}(l+1)\mathbf{V}^H(l+1)}{l + \mathbf{X}^H(l+1)\mathbf{V}(l+1)} \right). \quad (3.3.3)$$

Таким образом, мы получили рекуррентную оценку обратной КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l+1)$  по  $(l+1)$ -ой выборкам входного процесса. Эта оценка использует уже полученную оценку обратной КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l)$  по  $l$  выборкам и  $(l+1)$ -ую выборку  $\mathbf{X}(l+1)$ .

При использовании рекуррентных процедур необходимо выбрать начальное приближение, то есть матрицу  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}(0)$  для первого шага процедуры. В качестве такого приближения удобно выбрать единичную матрицу ( $\hat{\mathbf{M}}^{-1}(0)=\mathbf{I}$ ), которая является обратной КМ собственных шумов в приемных каналах ААР.

Выражение (3.1.17) для МП оценки КМ помехи дает хорошую оценку этой матрицы в условиях стационарной помеховой обстановки, когда эффективность этой оценки увеличивается с ростом числа выборок  $L$ . Если входной процесс является нестационарным, то можно воспользоваться модифицированным алгоритмом, в котором предусмотрена возможность учета степени значимости предыдущих данных по сравнению с текущими.

Для оценки КМ вместо (3.1.17) можно использовать модифицированную формулу [3]:

$$\hat{\mathbf{M}}(k) = (1-a) \sum_{l=0}^{k-1} a^{k-l} \mathbf{X}(k-l) \mathbf{X}^H(k-l), \quad (0 < a < 1). \quad (3.3.4)$$

Из сравнения этой формулы с (3.1.17) видно, что она отличается наличием весовых множителей, которые придают больший вес последним выборкам. В предельном случае стационарного процесса параметр  $a \rightarrow 0$ , а выражение (3.3.4) совпадает с (3.1.17).

Оценка (3.3.4) может быть получена в виде рекуррентной процедуры:

$$\hat{\mathbf{M}}(k) = a \hat{\mathbf{M}}(k-1) + (1-a) \mathbf{X}(k) \mathbf{X}^H(k). \quad (3.3.5)$$

Теперь процедуру оценки обратной КМ можно записать как [3]:

$$\hat{\mathbf{R}}^{-1}(l+1) = \frac{1}{a} \hat{\mathbf{R}}^{-1}(l) - \frac{(1-a)}{a} \times \frac{\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l) \mathbf{X}(l+1) \mathbf{X}^H(l+1) \hat{\mathbf{M}}^{-1}(l)}{a + (1-a) \mathbf{X}^H(l+1) \hat{\mathbf{M}}^{-1}(l) \mathbf{X}(l+1)}. \quad (3.3.6)$$

Оценим количество операций комплексного умножения для данного алгоритма. На каждом шаге рекуррентной процедуры (3.3.3) необходимо выполнить следующие операции:

- вычисление вектора  $\mathbf{V}$ , то есть умножение матрицы  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}(l)$  на вектор  $\mathbf{X}(l+1)$  ( $N^2$  – комплексных умножений);
- скалярное произведение векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{V}$  ( $N$  – комплексных умножений);
- матричное произведение векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{V}^H$  ( $N^2$  – комплексных умножений);
- умножение действительного числа  $\frac{l+1}{l}$  на комплексную матрицу ( $N^2/2$  комплексных умножений).

Таким образом, на каждом шаге необходимо выполнить  $\approx(5N^2/2+N)$  операций комплексного умножения, а для реализации всего алгоритма -  $\approx(5N^2/2+N)L$  комплексных умножений. В случае многоэлементных ААР ( $N \gg 1$ ) объем вычислений составляет  $\approx 5N^2L/2$  комплексных умножений.

Отметим, что если учесть эрмитовость КМ, то можно сократить объем вычислений до  $\approx 7(N^2+N)L/4$  комплексных умножений [3]. Тогда при достаточно большом числе антенн ( $N \gg 1$ ) будем иметь, что необходимое число комплексных умножений составляет

$$Q \approx 7N^2L/4. \quad (3.3.9)$$

Теперь нам необходимо выбрать число выборок  $L$  входного процесса, исходя из допустимых потерь в ОСШ. Обычно допустимыми считаются потери равные 3 дБ. Результаты исследований (см., например [27]) показывают, что достаточно выбрать всего  $L \approx 2J$  выборок, где  $J$  - число источников внешней помехи.

Следовательно, для получения приемлемой оценки обратной КМ число выборок входного процесса должно превышать число источников внешней помехи примерно в 2 раза ( $L \approx 2J$ ). Напомним, что при использовании метода вычисления весового вектора ААР на основе прямого обращения выборочной КМ число выборок входного процесса  $L \approx 2N$ . Обычно число источников помехи является значительно меньшим числа приемных каналов ААР, то есть ( $J \ll N$ ). Поэтому применение рекуррентного метода оценки обратной КМ является более предпочтительным, особенно в условиях нестационарной помехи.

Таким образом, формирование МП оценки обратной эрмитовой КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  предполагает выполнение  $\approx 7N^2J/4$  комплексных умножений в случае многоэлементных ААР ( $N \gg 1$ ). Наконец, операция умножения обратной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  на вектор сигнала  $\Phi_0$ , в соответствии с (1.2.2), требует выполнения еще  $N^2$  комплексных умножений.

### 3.4. Эффективность адаптации при использовании степенного базиса

Рассмотрим эффективность изложенного в подразделе 2.5 метода частичной адаптации в ААР, основанного на использовании неполного степенного базиса [28]. ДОС, построенная на степенных векторах, является адаптивной («нежесткой»), так как парциальные ДН вторичных каналов зависят от помеховой обстановки. Поэтому степенной базис хорошо приспособлен для построения методов частичной адаптации в ААР, когда вместо точной КМ  $\mathbf{M}$  используется ее МП оценка  $\hat{\mathbf{M}}$  (3.1.17).

Элементы КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  являются случайными из-за ограниченной длины выборки входного процесса. Поэтому оценочные степенные векторы  $\hat{\mathbf{M}}^i \Phi_0$  ( $i=1,2,\dots,N^2-1$ ) кроме регулярной составляющей всегда будут иметь флуктуационную компоненту. Флуктуации степенных векторов приводят к флуктуациям весового вектора  $\mathbf{W}$  (так называемый «шум» весового вектора) и, следовательно, к снижению эффективности адаптации. Кроме того, возможно смещение степенных векторов  $\hat{\mathbf{M}}^i \Phi_0$  относительно точных векторов  $\mathbf{M}^i \Phi_0$ .



Статистические свойства оценочных степенных векторов  $\dot{\mathbf{W}}^{(i)} = \dot{\mathbf{M}}^i \Phi_0$  характеризуются средними векторами  $\langle \dot{\mathbf{W}}^{(i)} \rangle = \langle \dot{\mathbf{M}}^i \rangle \Phi_0$  и КМ флуктуаций  $\mathbf{Z}^{(i,j)} = \langle \Delta \dot{\mathbf{W}}^{(i)} \Delta \dot{\mathbf{W}}^{(j)H} \rangle$ .

Вначале найдем средние векторы  $\langle \dot{\mathbf{W}}^{(i)} \rangle = \langle \dot{\mathbf{M}}^i \rangle \Phi_0$ , предполагая, что выборка входного процесса является достаточно длинной ( $L \gg 1$ ). Если  $i=1$ , то из (3.1.17) имеем, что  $\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle = \mathbf{M}$ . При  $i=2$  для  $ij$ -го элемента матрицы  $\langle \dot{\mathbf{M}}^2 \rangle$  получим, что

$$\langle \dot{\mathbf{M}}_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^N \langle x_{li} x_{lp}^* x_{qp} x_{qj}^* \rangle. \quad (3.4.1)$$

Учитывая правило размыкания гауссовских комплексных процессов [29] и поступая аналогично приведенному ниже выводу формулы (4.1.19), получим, что

$$\langle \dot{\mathbf{M}}^2 \rangle = \mathbf{M}^2 + \frac{1}{L} Sp(\mathbf{M}) \mathbf{M}. \quad (3.4.2)$$

Аналогично найдем матрицы  $\langle \dot{\mathbf{M}}^3 \rangle$  и  $\langle \dot{\mathbf{M}}^4 \rangle$ . В результате будем иметь, что

$$\langle \mathbf{M}^3 \rangle = \mathbf{M}^3 + \frac{1}{L} [Sp(\mathbf{M}^2) \mathbf{M} + 2Sp(\mathbf{M}) \mathbf{M}^2], \quad (3.4.3)$$

$$\langle \mathbf{M}^4 \rangle = \mathbf{M}^4 + \frac{1}{L} [Sp(\mathbf{M}^3) \mathbf{M} + 2Sp(\mathbf{M}^2) \mathbf{M}^2 + 3Sp(\mathbf{M}) \mathbf{M}^3]. \quad (3.4.4)$$

Полученные выражения допускают обобщение на случай произвольной степени матрицы  $\mathbf{M}$  в виде [28]

$$\langle \dot{\mathbf{M}}^i \rangle = \mathbf{M}^i + \frac{1}{L} \sum_{q=1}^{i-1} q Sp(\mathbf{M}^{i-q}) \mathbf{M}^q. \quad (3.4.5)$$

Отсюда имеем, что средние степенные векторы равны

$$\langle \dot{\mathbf{W}}^{(i)} \rangle = \mathbf{W}^{(i)} + \frac{1}{L} \sum_{q=1}^{i-1} q Sp(\mathbf{M}^{i-q}) \mathbf{W}^{(q)}. \quad (3.4.6)$$

Таким образом, векторы  $\langle \dot{\mathbf{W}}^{(i)} \rangle$ , кроме первого вектора  $\langle \dot{\mathbf{W}}^{(1)} \rangle$ , имеют смещения по отношению к точным векторам. Однако из (3.4.6) следует, что смещение произвольного  $i$ -го вектора является линейной комбинацией предыдущих степенных векторов и, поэтому, не выводит этот вектор из подпространства точных степенных векторов. Следовательно, средние векторы  $\langle \dot{\mathbf{W}}^{(i)} \rangle$  могут быть выбраны в качестве базисных и использованы для

разложения оптимального весового вектора ААР. Уменьшение эффективности адаптации будет обусловлено только флуктуационными составляющими степенных векторов.

Для нахождения КМ  $\mathbf{Z}^{(i,j)}$  ( $i,j=1,2,\dots,N^2-1$ ) флуктуаций степенных векторов вычислим матрицу  $\langle \Delta \mathbf{M} \mathbf{Q} \Delta \mathbf{M}^H \rangle$ , где  $\mathbf{Q}$  – любая эрмитовая матрица, а матрица  $\Delta \mathbf{M} = \dot{\mathbf{M}} - \langle \dot{\mathbf{M}} \rangle$ . Учитывая (3.1.17) будем иметь, что

$$\langle \Delta \mathbf{M} \mathbf{Q} \Delta \mathbf{M}^H \rangle = \langle \dot{\mathbf{M}} \mathbf{Q} \dot{\mathbf{M}} \rangle - \mathbf{M} \mathbf{Q} \mathbf{M} = \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L \langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H \mathbf{Q} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^H \rangle - \mathbf{M} \mathbf{Q} \mathbf{M}. \quad (3.4.7)$$

Проводя операцию усреднения в (3.4.7), получим, что

$$\langle \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^H \mathbf{Q} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^H \rangle = \mathbf{M} \mathbf{Q} \mathbf{M} + \mathbf{M} \text{Sp}(\mathbf{M} \mathbf{Q}) d_{ij}. \quad (3.4.8)$$

Подставляя (3.4.8) в (3.4.7) и выполняя операцию суммирования, будем иметь, что

$$\langle \Delta \mathbf{M} \mathbf{Q} \Delta \mathbf{M}^H \rangle = \frac{1}{L} \mathbf{M} \text{Sp}(\mathbf{M} \mathbf{Q}). \quad (3.4.9)$$

Теперь можно вычислить КМ  $\mathbf{Z}^{(i,j)}$ . Учитывая, что длина выборки входного процесса является достаточно большой ( $L \gg 1$ ), найдем, что

$$\mathbf{Z}^{(i,j)} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j (\Phi_0^H \mathbf{M}^{i+j-p-q+1} \Phi_0) \mathbf{M}^{p+q-1}. \quad (3.4.10)$$

Случайному весовому вектору  $\mathbf{W} = \langle \dot{\mathbf{W}} \rangle + \Delta \mathbf{W}$  будет соответствовать случайное значение ОСШ, равное

$$\mathcal{K} = \frac{(\langle \dot{\mathbf{W}} \rangle + \Delta \mathbf{W})^H \Phi_0 \Phi_0^H (\langle \dot{\mathbf{W}} \rangle + \Delta \mathbf{W})}{(\langle \dot{\mathbf{W}} \rangle + \Delta \mathbf{W})^H \mathbf{M} (\langle \dot{\mathbf{W}} \rangle + \Delta \mathbf{W})}. \quad (3.4.11)$$

Из (3.4.10) видно, что при  $L \gg 1$  относительные ошибки степенных векторов являются малыми. Тогда физически обоснованным является усреднение отдельно числителя и знаменателя в (3.4.11). В результате можно получить, что

$$\langle \mathcal{K} \rangle = h_{\max} \frac{h_{\max} + h_{\max}^{-1} \langle \Delta \mathbf{W}^H \Phi_0 \Phi_0^H \Delta \mathbf{W} \rangle}{h_{\max} + \langle \Delta \mathbf{W}^H \mathbf{M} \Delta \mathbf{W} \rangle}, \quad (3.4.12)$$

где  $h_{\max}$  – максимальное значение ОСШ (2.1.14).

Вторым слагаемым в числителе (3.4.12) можно пренебречь. В самом деле, когда число источников помехи меньше числа элементов ААР ( $J < N$ ), имеет место эффективное

подавление помехи и ОСШ близко к ОСШ при отсутствии помехи ( $h_{\max} \approx \nu_0 \Phi_0^H \Phi_0$ ). Это позволяет сделать следующую оценку второго слагаемого в числителе (3.4.12):

$$h_{\max}^{-1} (\langle \Delta \mathbf{W}^H \Phi_0 \Phi_0^H \Delta \mathbf{W} \rangle) \leq h_{\max}^{-1} (\Phi_0^H \Phi_0) (\Delta \mathbf{W}^H \Delta \mathbf{W}) \approx \Delta \mathbf{W}^H \Delta \mathbf{W} \ll h_{\max}. \quad (3.4.13)$$

Учтем, что в соответствии с (3.1.8)  $\langle \Delta \mathbf{W}^H \mathbf{M} \Delta \mathbf{W} \rangle = Sp(\mathbf{M} \langle \Delta \mathbf{W} \Delta \mathbf{W}^H \rangle)$ . Тогда из (3.4.12) будем иметь

$$\langle \kappa \rangle = \frac{h_{\max}}{1 + h_{\max}^{-1} Sp(\mathbf{M} \mathbf{Z})}, \quad (3.4.14)$$

где  $\mathbf{Z} = \langle \Delta \mathbf{W} \Delta \mathbf{W}^H \rangle$  – КМ флуктуации весового вектора  $\mathbf{W}$ .

Чтобы найти матрицу  $\mathbf{Z}$  введем в рассмотрение вместо точной матрицы  $\mathbf{A}$  и вектора  $\mathbf{B}$  их оценки  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{W}^{(0)}, \mathbf{W}^{(1)}, \dots, \mathbf{W}^{(N^*-1)}$  и  $\hat{\mathbf{B}} = \langle \hat{\mathbf{B}} \rangle + \Delta \mathbf{B}$ . Теперь разложение (2.4.1) весового вектора  $\mathbf{W}$  можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{W}} = \langle \hat{\mathbf{W}} \rangle + \Delta \mathbf{W} = \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle \langle \hat{\mathbf{B}} \rangle + \Delta \mathbf{A} \langle \hat{\mathbf{B}} \rangle + \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle \Delta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \Delta \mathbf{B}, \quad (3.4.15)$$

где матрица  $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle$  состоит из средних степенных векторов,  $\langle \Delta \mathbf{A} \rangle = (0, \langle \Delta \mathbf{W}^{(1)} \rangle, \dots, \langle \Delta \mathbf{W}^{(N^*-1)} \rangle)$  – матрица флуктуаций этих векторов. При этом учтено, что вектор управляющего сигнала известен, то есть  $\langle \Delta \mathbf{W}^{(0)} \rangle = 0$ .

Для упрощения дальнейших преобразований предположим, что вектор  $\mathbf{B}$  не содержит флуктуации ( $\Delta \mathbf{B} = 0$ ). Правомерность такого предположения будет показана ниже на основе математического моделирования. Тогда вектор  $\Delta \mathbf{W} = \Delta \mathbf{A} \langle \hat{\mathbf{B}} \rangle$ , а для оценочного вектора  $\hat{\mathbf{B}}$  будем иметь вместо (2.4.3) уравнение вида:

$$(\langle \hat{\mathbf{A}}^H \rangle \mathbf{M} \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle + \langle \Delta \mathbf{A}^H \mathbf{M} \Delta \mathbf{A} \rangle) \langle \hat{\mathbf{B}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{A}} \rangle^H \Phi_0. \quad (3.4.16)$$

Теперь КМ  $\mathbf{Z}$  в (3.4.14) равна

$$\mathbf{Z} = \langle \Delta \mathbf{W} \Delta \mathbf{W}^H \rangle = \langle \Delta \mathbf{A} \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{B}}^H \Delta \mathbf{A}^H \rangle = \sum_{i=1}^{N^*-1} \sum_{j=1}^{N^*-1} b_i b_j^* \mathbf{Z}^{(i,j)}. \quad (3.4.17)$$

Полученные выражения (3.4.14) и (3.4.17) дают возможность оценить эффективность частичной адаптации при произвольном числе вспомогательных каналов степенной ДОС в зависимости от длины входного процесса.

Рассмотрим случай одного источника помехи ( $J=1$ ). Тогда матрица ДОС состоит из двух векторов  $\hat{\mathbf{A}} = (\Phi_0, \hat{\mathbf{M}} \Phi_0)$ . Так как  $\langle \hat{\mathbf{M}} \Phi_0 \rangle = \mathbf{M} \Phi_0$ , то матрица  $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \mathbf{A}$ . Матрица

флуктуаций  $\langle \Delta \mathbf{A} \rangle = (0, \langle \Delta \mathbf{W}^{(1)} \rangle)$ , а вектор  $\langle \dot{\mathbf{B}} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle$ . Из (3.4.17) следует, что матрица  $\mathbf{Z} = b_1^2 \mathbf{Z}^{(1,1)}$ . В соответствии с (3.4.10) матрица  $\mathbf{Z}^{(1,1)} = L^{-1} (\Phi_0^H \mathbf{M} \Phi_0) \mathbf{M}$ , а коэффициент  $b_1$  при достаточно большой мощности внешней помехи ( $\nu_1 N \gg 1$ ) равен  $b_1 \approx (nN)^{-1}$ . Если источник помехи находится в области боковых лепестков ДН основного канала ААР, то

$$\langle h \rangle = \frac{h_{\max}}{1 + \frac{1 + nN |g(u_1 - u_0)|^2}{L}}, \quad (3.4.18)$$

где  $g(u_1 - u_0)$  - значение нормированной ДН основного канала в направлении на источник помехи (см. (2.3.8)).

В случае произвольного числа  $J$  источников помехи эффективность частичной адаптации вычислялась при различной длине  $L$  выборки входного процесса для  $N=16$  и  $d_l = 0,5$ . Отдельная помеховая ситуация задавалась путем «вбрасывания»  $J$  источников помехи, каждый из которых имел случайное угловое положение, равновероятно распределенное в области боковых лепестков ДН основного канала ДОС. Мощности всех источников задавались одинаковыми ( $\nu_i=100$ ). Для каждой ситуации вычислялась эффективность  $\dot{h}_{Na}/h_0$ , частичной адаптации с сокращенным числом  $Na$  вспомогательных каналов степенной ДОС. Затем путем усреднения по ансамблю из 10 помеховых ситуаций оценивалось среднее значение  $\langle \dot{h}_{Na} \rangle / \langle h_0 \rangle$ .

На рис. 3.2 показана зависимость величины  $\langle \dot{h}_{Na} \rangle / \langle h_0 \rangle$  от числа вспомогательных каналов при  $J=4$  источниках помехи и различной длине выборки входного процесса  $L=32, 100, 1000, 10^9$ . Аналогичные результаты для  $J=8$  приведены на рис. 3.3. Видно, что увеличение эффективности адаптации с ростом числа вспомогательных каналов происходит неравномерно и обеспечивается в основном первыми каналами. Так сокращение числа каналов в два раза ( $Na \approx J/2$ ) приводит к уменьшению ОСШ менее чем на 3 дБ.

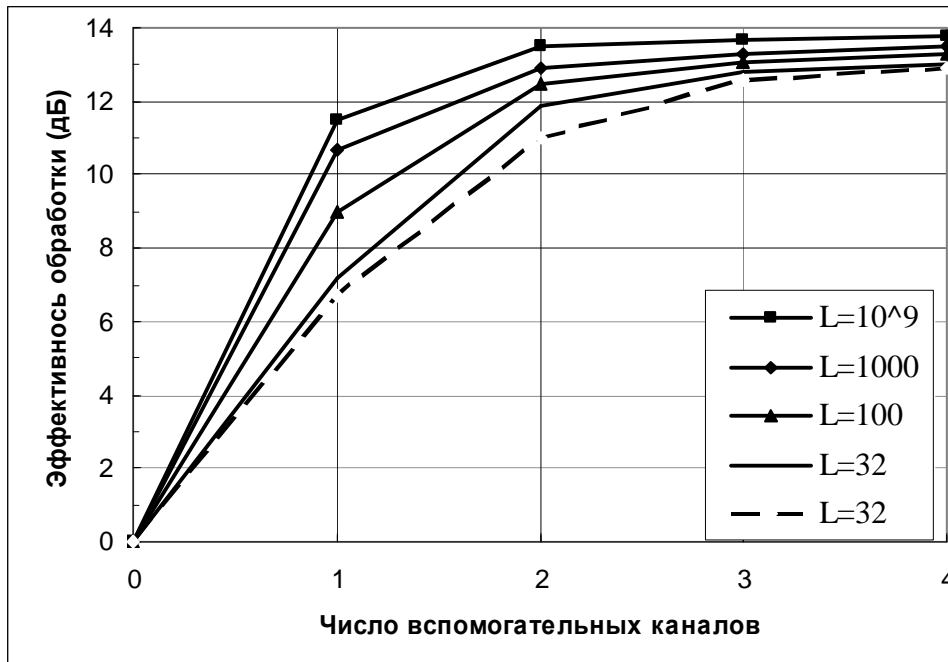


Рис. 3.2 Увеличение ОСШ в зависимости от числа вспомогательных каналов ДОС при  $J=4$ ,  $L=32$ , 100, 1000,  $10^9$ . Пунктирная кривая соответствует случаю оценивания степенных векторов и коэффициентов разложения по одной и той же выборке

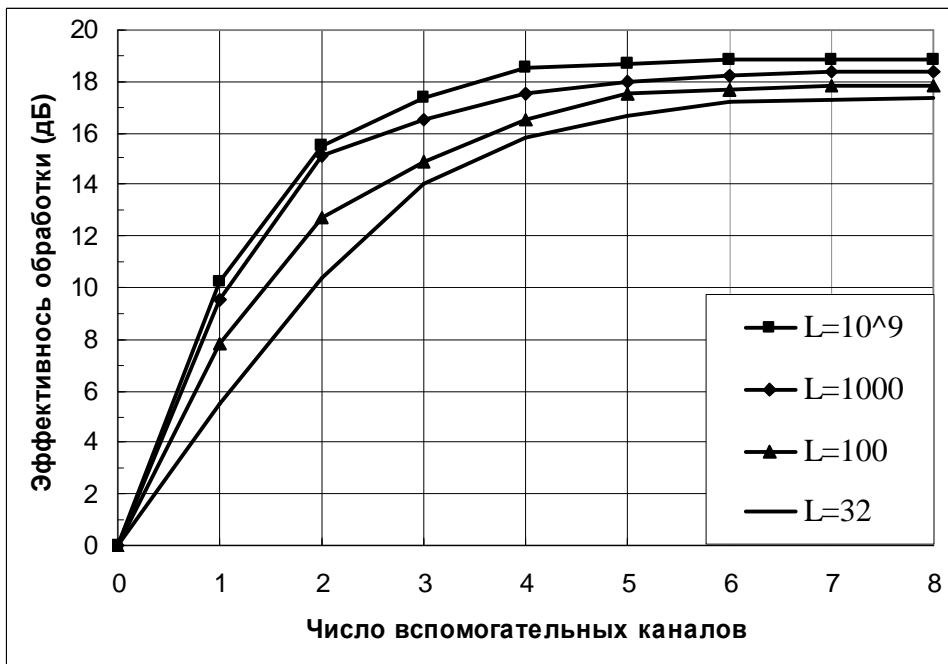


Рис. 3.3 Увеличение ОСШ в зависимости от числа вспомогательных каналов ДОС при  $J=8$ ,  $L=32$ , 100, 1000,  $10^9$ . Пунктирная кривая соответствует случаю оценивания степенных векторов и коэффициентов разложения по одной и той же выборке

Приведенные результаты получены по аналитическим формулам, которые не учитывают флуктуаций вектора  $\mathbf{V}$ . Физически это соответствует его оценке по

существенно более длинной выборке входного процесса, чем оценка степенных векторов. Однако представляет интерес оценивание степенных векторов и вектора  $\mathbf{B}$  по одной и той же выборке. Вывод аналитических выражений сопряжен со значительными трудностями. Поэтому приведем результаты математического моделирования частичной адаптации в ААР, основанные на разложении (2.3.20), в котором будем использовать МП оценку  $\hat{\mathbf{M}}$  в виде (3.1.17). Для нахождения оценки  $\hat{\mathbf{B}}$  вектора  $\mathbf{B}$  коэффициентов разложения воспользуемся уравнением (2.4.3), в котором точные матрицы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$  заменим их оценками  $\hat{\mathbf{M}}$  и  $\hat{\mathbf{A}}$ . Оценка весового вектора имеет вид (3.4.15). Для полученного вектора  $\hat{\mathbf{W}}$  затем найдем выигрыш в ОСШ  $\langle \hat{h}_{Na} \rangle / \langle h_0 \rangle$  при использовании разного числа вспомогательных каналов адаптации.

На рис. 3.2 пунктирной кривой показана зависимость величины  $\langle \hat{h}_{Na} \rangle / \langle h_0 \rangle$  от числа вспомогательных каналов при  $J=4$  источниках помехи и длине выборки  $L=32$ . Видно, что результаты, полученные в приближении отсутствия флуктуаций вектора  $\mathbf{B}$ , обладают достаточно высокой точностью. Аналогичные результаты можно получить для других значений  $J$  и  $L$ . Следовательно, на эффективность адаптации существенно большее влияние оказывают флуктуации степенных векторов, чем флуктуации вектора  $\mathbf{B}$  коэффициентов разложения.

Выше предполагалось, что КМ оценивается по конечной выборке входного процесса, а управляющий вектор сигнала известен точно. Теперь рассмотрим случай, когда флуктуации степенных векторов, обусловленные конечным временем усреднения, отсутствуют, однако вектор сигнала задается с некоторой ошибкой  $\Delta \mathbf{F}_0$  [30]. Эта ошибка может быть обусловлена искажениями волнового фронта при распространении сигналов, сложной формой амплитудно-фазового распределения сигнала в элементах ААР, например, при расположении источника сигнала достаточно близко от ААР произвольной (не плоской) конфигурации и другими факторами.

Пусть компоненты вектора  $\Delta \mathbf{F}_0$  - случайные некоррелированные величины с нулевым средним и дисперсией  $s_s^2$ , т.е.  $\langle (\Delta \Phi_0)_p (\Delta \Phi_0)_q^* \rangle = s_s^2 d_{pq}$ . Флуктуационные части степенных векторов равны  $\Delta \mathbf{W}^{(i)} = \mathbf{M}^i \Delta \Phi_0$ . Вектор ошибки  $\Delta \mathbf{F}_0$  не приводит к смещению степенных векторов, так как  $\langle \Delta \mathbf{W}^{(i)} \rangle = 0$ . Поэтому средняя оценочная матрица ДОС совпадает с точной матрицей ( $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle = \mathbf{A}$ ), а для среднего вектора  $\langle \hat{\mathbf{B}} \rangle$  справедливо уравнение (3.4.16), если в нем заменить матрицу  $\langle \hat{\mathbf{A}} \rangle$  на  $\mathbf{A}$ . Для матрицы  $\mathbf{Z}^{(i,j)}$  флуктуаций степенных векторов будем иметь

$$\mathbf{Z}^{(i,j)} = \langle \Delta \mathbf{W}^{(i)} \Delta \mathbf{W}^{(j)H} \rangle = \mathbf{M}^i \langle \Phi_0 \Phi_0^H \mathbf{M}^j \rangle. \quad (3.4.19)$$

Отсюда получим, что

$$\mathbf{Z}^{(i,j)} = \mathbf{S}_s^2 \mathbf{M}^{i+j}. \quad (3.4.20)$$

Флуктуации мощности сигнала и помехи на выходе ААР соответственно равны [30]

$$\Delta P_s = \mathbf{S}_s^2 \sum_{i=0}^{N'-1} \sum_{j=0}^{N'-1} b_i b_j \Phi_0^H \mathbf{M}^{i+j} \Phi_0, \quad (3.4.21)$$

$$\Delta P_{int} = \mathbf{S}_s^2 \sum_{i=0}^{N'-1} \sum_{j=0}^{N'-1} b_i b_j Sp(\mathbf{M}^{i+j+1}). \quad (3.4.22)$$

Эти выражения позволяют оценить влияние флуктуации весовых векторов матрицы  $\mathbf{A}$  из-за ошибок в управляющем векторе  $\mathbf{F}_0$  на эффективность адаптации ААР в зависимости от числа используемых степенных векторов. Отметим, что при достаточно мощной помехе можно показать, что  $\Delta P_s \ll \Delta P_{int}$  и для ОСШ справедливо выражение (3.4.14).

На рис. 3.4 представлены результаты численного статистического анализа эффективности ААР при наличии случайных ошибок  $\Delta \mathbf{F}_0$  в управляющем векторе  $\mathbf{F}_0$ . Параметры ААР и источников помехи соответствуют рис. 3.2. Дисперсия ошибки задавалась равной  $\mathbf{S}_s^2 = 0; 0.01; 0.1$  (кривые 1,2,3, соответственно). По оси ординат отложена (в дБ) величина  $\langle \mathbf{h}_{Na} \rangle / \langle \mathbf{h}_0 \rangle$ , где  $\langle \mathbf{h}_0 \rangle$  - ОСШ при на выходе основного канала ААР при точно известном векторе  $\mathbf{F}_0$  сигнала ( $\mathbf{S}_s^2 = 0$ ). Видно, что флуктуации вектора  $\mathbf{F}_0$  оказывают более сильное влияние на ОСШ при использовании малого числа степенных векторов матрицы  $\mathbf{A}$  ( $Na < J/2$ ). Это объясняется тем, что флуктуации вектора сигнала вызывают «замывание» нулей в адаптированной ДН в направлениях на источники помехи. Следовательно, остаточная мощность внешней помехи на выходе ААР увеличивается, и это увеличение более значительно при достаточно малом числе вспомогательных каналов адаптации.

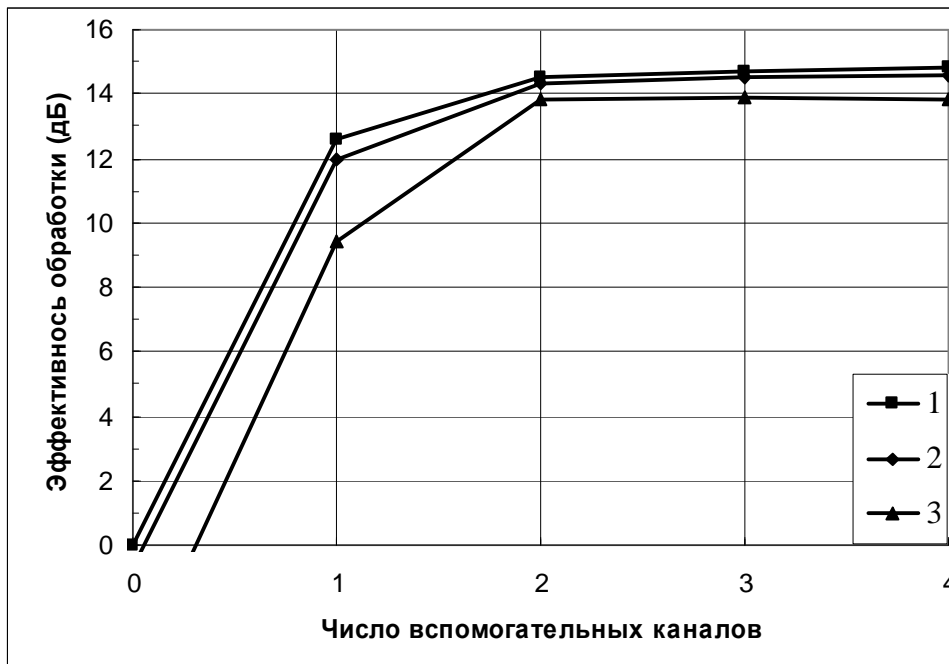


Рис. 3.4 Увеличение ОСШ в зависимости от числа вспомогательных каналов ДОС при неточно известном векторе сигнала. Параметры ААР и источников помехи соответствуют рис. 3.2. Дисперсия ошибки  $S_y^2=0; 0,01; 0,1$  (кривые 1,2,3, соответственно)



#### ГЛАВА 4. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ВЕСОВОГО ВЕКТОРА АДАПТИВНОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ПРИ КОРОТКОЙ ВЫБОРКЕ ВХОДНОГО ПРОЦЕССА

Рассмотрим случай короткой выборки входного процесса, когда число выборочных векторов  $L$  меньше числа  $N$  приемных каналов ААР ( $L < N$ ). Этот случай имеет важное практическое значение. Дело в том, что в большинстве практических применений помеха не является стационарной, и ее параметры изменяются с течением времени. Поэтому для ААР с большим числом элементов время стационарности помехи может оказаться недостаточным для накопления  $L \approx 2N$  выборок входного процесса и для выполнения необходимого объема вычислений. Из-за нестационарности помехи число выборок  $L$  входного процесса может быть вынуждено выбрано меньшим числа приемных каналов ААР. Однако в этом случае оценочная КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  становится вырожденной. Она имеет  $L$  положительных случайных собственных чисел, а остальные  $(N-L)$  собственных чисел являются нулевыми. Наличие нулевых собственных чисел означает, что обратная матрица  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  не существует.

Короткая выборка заполняет только часть  $N$ -мерного векторного пространства, имеющую размерность  $L$ . Следовательно, такая выборка содержит информацию о помехе только в  $L$ -мерном подпространстве, а в остальной части пространства, размерности  $N-L$ , информация о помехе отсутствует. Другими словами, короткая выборка не обладает достаточной информативностью для оценки параметров помехи во всем векторном пространстве. Ясно, что на основе такой выборки нельзя оценить  $N$ -мерный весовой вектор ААР.

Для нахождения весового вектора необходимо доопределить свойства помехи путем использования априорных данных. Здесь возникают следующие вопросы. Как избежать больших потерь в величине ОСШ? Какие априорные данные можно использовать, то есть, какие априорные данные являются известными и надежными? Как оценить весовой вектор при наличии короткой выборки, когда оценка (3.1.17) дает вырожденную матрицу, для которой обратная матрица не существует?

Таким образом, задача заключается в решении системы линейных алгебраических уравнений

$$\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{W}} = \Phi_0 \quad (4.1.1)$$

относительно весового вектора  $\hat{\mathbf{W}}$  при условии короткой выборки входного процесса. Для решения такого рода проблем применяются так называемые методы регуляризации [27,32,33]. Мы познакомимся далее с некоторыми из этих методов в приложении к интересующей нас задаче оценивания весового вектора, обеспечивающего максимум ОСШ на выходе ААР.

#### 4.1. Метод собственных векторов корреляционной матрицы помехи

Рассмотрим метод построения регуляризованного решения уравнения (4.1.1), основанный на нахождении собственных чисел и собственных векторов оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ . В соответствии со спектральным разложением (2.2.2) КМ помехи оптимальный весовой вектор можно представить в виде разложения (2.2.5) по собственным векторам  $\mathbf{U}_j$  точной КМ.

Выражение (2.2.5) представим в следующем виде:

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^N H(I_j) (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j. \quad (4.1.2)$$

где присутствующую в каждом слагаемом величину  $H(I_j)=1/I_j$  можно интерпретировать как коэффициент передачи пространственного фильтра подавления помехи в подпространстве, соответствующем собственному числу  $I_j$ . Собственные числа точной КМ принадлежат интервалу  $[1, \infty)$  на оси  $I$ . Поэтому коэффициент передачи  $H(I_j) \leq 1$  при любых  $I$ .

Скалярное произведение  $(\mathbf{U}_j^H \Phi_0)$   $i$ -го собственного вектора  $\mathbf{U}_j$  и вектора сигнала  $\Phi_0$  представляет собой проекцию вектора  $\Phi_0$  на подпространство, соответствующее собственному числу  $I_j$ .

Спектральное разложение (2.2.2) оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  по собственным векторам имеет вид:

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_{j=1}^N r_j \hat{\mathbf{U}}_j \hat{\mathbf{U}}_j^H, \quad (4.1.3)$$

где  $r_j > 0$  - действительные собственные числа выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ ,  $\hat{\mathbf{U}}_j$  -  $j$ -ый случайный собственный вектор, соответствующий  $j$ -му собственному числу  $r_j$ .

Тогда оценка весового вектора имеет вид

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{r_j} (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j. \quad (4.1.4)$$

В отличие от точной КМ собственные числа  $r_j$  выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  являются случайными и принадлежат интервалу  $[0, \infty)$ . Более того, в случае короткой выборки ( $L < N$ ) всегда имеются, по крайней мере,  $(N-L)$  нулевых собственных чисел. Значения коэффициента передачи фильтра подавления помехи в этом  $(N-L)$ -мерном подпространстве являются неопределенными. Остальные собственные числа  $r_j$  принадлежат интервалу  $(0, \infty)$ . Причем некоторые из них могут принимать значения, близкие к нулю.

Таким образом, полное  $N$ -мерное пространство сигналов разбивается на два подпространства:  $L$ -мерное подпространство выборочных векторов и ортогональное ему подпространство размерности  $(N-L)$ . Это подпространство является ядром КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , так как при умножении матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  на любой вектор из этого подпространства получается нулевой вектор. В самом деле, на основе максимально правдоподобной оценки КМ можно получить для произвольного вектора  $\mathbf{V}$ , следующее выражение

$$\hat{\mathbf{M}}\mathbf{V} = \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)\mathbf{X}^H(l)\mathbf{V} = \sum_{l=1}^L (\mathbf{X}^H(l)\mathbf{V})\mathbf{X}(l). \quad (4.1.5)$$

Если выбранный вектор  $\mathbf{V}$  не принадлежит подпространству выборочных векторов  $\mathbf{X}(l)$ , то  $\mathbf{X}^H(l)\mathbf{V} = 0$  для всех  $l=1, 2, \dots, L$ . Отсюда следует, что произведение  $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{V} = 0$ .

Такое разбиение пространства сигналов связано с недостаточной информативностью короткой выборки. На основе выборочных векторов весовой вектор  $\mathbf{W}$  можно оценить только для подпространства выборочных векторов. Поэтому выражение (4.1.4) для вектора  $\mathbf{W}$  необходимо дополнить еще одним слагаемым и представить в виде

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^L \frac{1}{r_j} (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j + \mathbf{w}_\perp, \quad (4.1.6)$$

где  $\mathbf{w}_\perp$  - неопределенный вектор из ядра матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  ( $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{w}_\perp = 0$ ).

Выше отмечалось, что в случае короткой выборки входного процесса  $L$  собственных чисел  $r_j$  выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  принадлежат интервалу  $[0, \infty)$  и могут принимать значения, близкие к нулю. Остальные  $(N-L)$  собственных чисел являются нулевыми. Тогда из (4.1.6) следует, что значения коэффициентов передачи фильтра в подпространствах, соответствующих этим собственным числам, могут неограниченно возрастать. Поэтому

даже небольшие ошибки в оценивании элементов выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  могут вызывать неограниченно большие флуктуации весового вектора ААР.

Задачи, решения которых оказываются неустойчивым к ошибкам оценивания исходных данных, относятся к классу так называемых «некорректно» поставленных задач. Здесь «некорректность» не следует понимать как «неправильность» в постановке задачи. В нашем случае адаптивной пространственной обработки сигналов в ААР необходимо решить систему уравнений (4.1.1), в которой КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  оценивается на основе выборки входного процесса в соответствии с выражением (3.1.17). Так как выборка входного процесса имеет конечную длину  $L$ , то неизбежны ошибки оценивания КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ . Можно выбрать длину  $L$  достаточно большой, чтобы уменьшить эти ошибки. Однако, как видно из формулы (4.1.6) это не даст желаемого результата.

Таким образом, оценку весового вектора в виде (4.1.6) нельзя использовать практически. Во-первых, она содержит неопределенный вектор  $\mathbf{W}_\perp$ . Во-вторых, даже небольшие флуктуации элементов оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  могут вызвать неограниченно большие флуктуации проекции весового вектора на подпространство выборочных векторов, так как собственные числа КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  могут принимать любые значения на интервале  $[0, \infty)$ .

Учтем, что в состав помехи входит собственный шум с единичной КМ. На этом основании из  $L$  собственных чисел оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  выберем только те, величины которых превышают некоторое пороговое значение  $r^{(th)}$ , и будем считать, что они связаны с подпространством внешних источников помехи. Если их число равно  $L_1$ , то это подпространство будет иметь размерность  $L_1$ . В нем необходимо обеспечить адаптивное подавление помехи. Значение  $r^{(th)}$  будет найдено ниже.

Дополнительное подпространство размерности  $(N-L_1)$  будем считать связанным только с собственным шумом. Оптимальная обработка в этом подпространстве должна совпадать с согласованной обработкой, которая задается весовым вектором, равным проекции вектора сигнала  $\Phi_0$  на данное подпространство.

Аналогично весовому вектору  $\mathbf{W}$  представим вектор сигнала  $\Phi_0$  в виде двух слагаемых:  $\Phi_0 = \Phi_{0\parallel} + \Phi_{0\perp}$ , первое из которых принадлежит подпространству внешней помехи, а второе – пространству собственного шума. Тогда согласованная обработка в подпространстве собственного шума будет обеспечиваться вектором  $\mathbf{W}_\perp = \Phi_{0\perp}$ . Матрица

$\hat{\mathbf{M}}$  проектирует любой вектор на подпространство помехи. Поэтому оценка проекции вектора  $\Phi_0$  на ортогональное подпространство будет равна

$$\Phi_{0\perp} = \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{L_1} \mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_j \right) \Phi_0. \quad (4.1.7)$$

Таким образом, с учетом априорных данных о наличии собственного шума весовой вектор  $\mathbf{W}$  можно представить в виде суммы двух векторов. Первый вектор принадлежит подпространству внешней помехи, а второй – пространству собственного шума. В результате для вектора  $\mathbf{W}$  запишем, что

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^{L_1} \frac{1}{r_j} (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j + \left( \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{L_1} \mathbf{U}_j^H \mathbf{U}_j \right) \Phi_0. \quad (4.1.8)$$

Учтем, что единичная матрица является проектором на все пространство размерности  $N$ , то есть  $\mathbf{I} = \sum_{j=1}^N \mathbf{U}_j \mathbf{U}_j^H$ . Тогда полученное выражение (4.1.8) удобно представить в аналогичной (4.1.2) форме, вводя коэффициент передачи  $H_1(r_j, r^{(th)})$  пространственного фильтра подавления помехи в подпространстве, соответствующем собственному числу  $r_j$ . В результате будем иметь, что [25,26]

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^N H_1(r_j, r^{(th)}) (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j. \quad (4.1.9)$$

Здесь коэффициент передачи  $H_1(r_j, r^{(th)})$  зависит не только от собственного числа  $r_j$ , но и от порогового значения  $r^{(th)}$ , используемого для разделения собственных чисел, и равен

$$H_1(r_j, r^{(th)}) = \begin{cases} 1, & 0 < r_j < r^{(th)} \\ 1/r_j, & r_j > r^{(th)} \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Решения (4.1.8) или (4.1.9), (4.1.10) являются регуляризованными по отношению к решению вида (4.1.6), так как в них устранена неопределенность в выборе весового вектора для ядра оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , а также исключен дестабилизирующий фактор, связанный с малыми собственными числами этой КМ.

Пороговое значение  $r^{(th)}$  может быть выбрано, исходя из требований к вероятности "ложной тревоги"  $p^{(false)}$ . Под "ложной тревогой" будем понимать формирование

«лишних» собственных векторов вследствие неточной оценки КМ, когда размерность помехового подпространства превысит число источников помехи.

Пусть, например, имеется только собственный шум с единичной КМ. Тогда в первой сумме выражения (4.1.8) не должно быть ни одного слагаемого. Выберем значение порога равное  $r^{(th)}$ . Существует вероятность того, что одно или несколько собственных чисел  $r_j$  оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  превысят заданный порог. Это превышение будем рассматривать как "ложную тревогу", приводящую к отклонению весового вектора  $\mathbf{W}$  от оптимального вектора  $\Phi_0$  за счет появления некоторого числа слагаемых в первой сумме выражения (4.1.8). Для уменьшения вероятности "ложных тревог" необходимо увеличить  $r^{(th)}$ . Однако чрезмерное его увеличение может привести к ухудшению ОСШ при появлении внешнего источника помехи, так как достаточно слабый источник может оказаться под порогом. Таким образом, существует оптимальное значение порога  $r^{(th)}$ .

Оценим значение порога  $r^{(th)}$ , исходя из критерия минимума среднего квадрата нормы матрицы  $(\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{I})$  при отсутствии внешних источников помехи. Этот критерий характеризует разброс собственных чисел выборочной КМ, так как

$$s^2 = \langle \|\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{I}\|^2 \rangle = \langle \text{Sr}(\hat{\mathbf{M}} - \mathbf{I})^2 \rangle = \langle \sum_{j=1}^N (r_j - 1)^2 \rangle. \quad (4.1.11)$$

Из условия минимума ( $ds^2/dl = 0$ ) найдем оценку  $\hat{l}$ , при которой величина  $s^2$  принимает минимальное значение. В результате получим, что  $\hat{l} = N^{-1} \text{Sr}(\hat{\mathbf{M}})$ .

Учтем, что максимально правдоподобная оценка КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  является несмещенной, то есть  $\langle \hat{\mathbf{M}} \rangle = \mathbf{M}$ . При наличии только собственного шума точная КМ  $\mathbf{M}$  является единичной матрицей. Поэтому  $\langle \text{Sr}(\hat{\mathbf{M}}) \rangle = \text{Sr}(\mathbf{I}) = N$ . Отсюда имеем, что среднее значение  $\langle \hat{l} \rangle = 1$ , а минимальный разброс собственных чисел выборочной КМ равен

$$s_{\min}^2 = \langle \sum_{j=1}^N (r_j - 1)^2 \rangle. \quad (4.1.12)$$

Найдем дисперсию  $s_{\min}^2$ . В результате очевидных преобразований будем иметь, что

$$s_{\min}^2 = \langle \sum_{j=1}^N (r_j^2 - 2r_j - 1) \rangle = \text{Sp}(\langle \hat{\mathbf{M}}^2 \rangle) - 2\text{Sp}(\langle \hat{\mathbf{M}} \rangle) + \text{Sp}(\mathbf{I}). \quad (4.1.13)$$

Вычислим величины  $Sp(\langle \hat{\mathbf{M}}^2 \rangle)$  и  $Sp(\langle \hat{\mathbf{M}} \rangle)$  при наличии только собственного шума, когда  $\mathbf{M}=\mathbf{I}$ . Имеем, что

$$\langle \hat{\mathbf{M}} \rangle = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \langle \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H \rangle = \mathbf{M} = \mathbf{I}, \quad (4.1.14)$$

$$\langle \hat{\mathbf{M}}^2 \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \langle \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H \mathbf{X}(m)\mathbf{X}(m)^H \rangle. \quad (4.1.15)$$

Перейдем в формуле (4.1.15) к поэлементной записи. Тогда

$$\langle \hat{\mathbf{M}}_{ij}^2 \rangle = \frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \sum_{p=1}^N \langle x_i(l)x_p(l)^* x_p(m)x_j(m)^* \rangle. \quad (4.1.16)$$

Таким образом, необходимо вычислить тройную сумму моментов четного (четвертого) порядка комплексных гауссовских процессов с нулевым средним. Учтем [29], что четные моменты либо равны нулю, либо отличны от нуля в зависимости от числа комплексно сопряженных амплитуд в произведении под знаком статистического среднего. Если число комплексно сопряженных амплитуд не равно числу несопряженных амплитуд, то соответствующий момент четного порядка всегда равен нулю. В противоположном случае этот момент отличен от нуля.

Таким образом, момент четвертого порядка в (4.1.16) отличен от нуля и в соответствии с правилом «размыкания» гауссовских процессов может быть выражен через моменты второго порядка в виде [29]

$$\begin{aligned} \langle x_i(l)x_p(l)^* x_p(m)x_j(m)^* \rangle &= \\ &= (\langle x_i(l)x_p(l)^* \rangle)(\langle x_p(m)x_j(m)^* \rangle) + (\langle x_i(l)x_j(m)^* \rangle)(\langle x_p(m)x_p(l)^* \rangle). \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Подставим это выражение в (4.1.16) и выполним операции суммирования и усреднения. При этом учтем, что выборки собственного шума единичной мощности, взятые в разные моменты времени, являются некоррелированными между собой. Следовательно, в (4.1.17)  $\langle x_i(l)x_j(m)^* \rangle = d_{lm}$ . Тогда в результате несложных преобразований будем иметь, что

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{M}_{ij}^2 \rangle &= \frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \sum_{p=1}^N (\langle x_i(l)x_p(l)^* \rangle) (\langle x_p(m)x_j(m)^* \rangle) + \\
&= \frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \sum_{p=1}^N (\langle x_i(l)x_j(m)^* \rangle) (\langle x_p(m)x_p(l)^* \rangle) = \\
&= \frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^L \sum_{p=1}^N (\mathbf{M}_{ip}(l)\mathbf{M}_{pj}(l) + d_{lm} \langle x_i(l)x_j(m)^* \rangle \mathbf{M}_{pp}) = \\
&= \mathbf{M}_{ij}^2 + L^{-1} Sp(\mathbf{M})\mathbf{M}_{ij}.
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Отсюда следует, что

$$\langle \mathbf{M}^2 \rangle = \mathbf{M}^2 + L^{-1} Sp(\mathbf{M})\mathbf{M}. \tag{4.1.19}$$

Учтем, что при наличии только собственного шума точная КМ является единичной. Подставляя в (4.1.19)  $\mathbf{M}=\mathbf{I}$ , окончательно получим, что

$$\langle \mathbf{M}^2 \rangle = \mathbf{I} + L^{-1} \mathbf{M}. \tag{4.1.20}$$

Теперь с помощью (4.1.13), (4.1.14) и (4.1.19) нетрудно найти, что

$$\mathbf{S}_{\min}^2 = N^2 L^{-1}. \tag{4.1.21}$$

В качестве значения порога можно выбрать величину  $r^{(th)} = 1 + g\mathbf{S}_{\min}$ , где параметр  $g$  определяется требованием к вероятности "ложной тревоги"  $p^{(false)}$ . На практике значения параметра  $g$  можно найти путем математического моделирования.

Рассмотрим случай одной выборки ( $L=1$ ), когда можно в аналитической форме подучить выражение для вероятности  $p^{(false)}$ . Согласно (3.1.17) КМ  $\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{X}^H$ . Она имеет одно отличное от нуля собственное число  $r = \mathbf{X}^H \mathbf{X}$ , и соответствующий ему нормированный собственный вектор  $\mathbf{U} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^H \mathbf{X})^{-0.5}$ . С помощью (4.1.8) или (4.1.9) регуляризованное решение для весового вектора можно представить в виде

$$\mathbf{W} = H(r^{(th)}) \frac{\mathbf{X}\mathbf{X}^H}{\mathbf{X}^H \mathbf{X}} \Phi_0 + \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{X}\mathbf{X}^H}{\mathbf{X}^H \mathbf{X}} \right) \Phi_0, \tag{4.1.22}$$

где коэффициент передачи пространственного фильтра подавления помехи равен

$$H(r^{(th)}) = \begin{cases} 1, & r \leq r^{(th)} \\ \frac{1}{\mathbf{X}^H \mathbf{X}}, & r > r^{(th)} \end{cases} \tag{4.1.23}$$



Чтобы связать пороговое значение  $r^{(th)}$  с вероятностью  $p^{(false)}$  "ложной тревоги", найдем функцию плотности вероятности  $p(r)$  собственного числа  $r$  в случае, когда в ААР имеется только собственный шум единичной мощности [25,26]. Величина  $r$  равна сумме квадратов  $2N$  случайных действительных величин  $x_j$  имеющих нормальное распределение с нулевым средним и с дисперсией  $\langle x_j^2 \rangle = 0.5$  и, следовательно, подчиняется хи-квадрат распределению с  $2N$  степенями свободы. Функция плотности вероятности такого распределения имеет вид [18]

$$p(r) = \frac{1}{(N-1)!} r^{N-1} \exp(-r). \quad (4.1.24)$$

Отсюда найдем, что

$$p^{(false)} = \int_{r^{(th)}}^{\infty} p(r) dr = \exp(-r^{(th)}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(r^{(th)})^k}{k!}. \quad (4.1.25)$$

Задавая вероятность  $p^{(false)}$ , можно с помощью (4.1.25) найти значение порога  $r^{(th)}$  в выражении (4.1.10). На рис. 4.1 приведена зависимость  $p^{(false)}$  от нормированного значения порога  $r^{(th)}/N$  для ААР с различным числом элементов:  $N=4$  и  $N=12$ . Видно, что при увеличении числа приемных каналов  $N$  величина  $p^{(false)}/N$  уменьшается. Например, если задать вероятность «ложной тревоги»  $p^{(false)} = 25\%$ , то получим, что  $r^{(th)}/N = 1.7$  при  $N=4$  и  $r^{(th)}/N = 1.3$  при  $N=12$ .

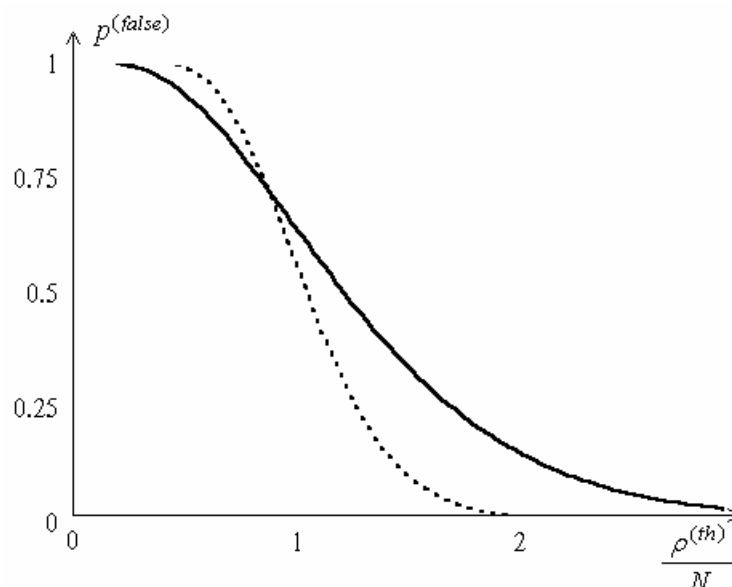


Рис. 4.1 Вероятность "ложной тревоги" в зависимости от  $r^{(th)}/N$  для 4-х элементной (сплошная

кривая) и 12-ти элементной ААР (пунктирная кривая)

#### 4.2. Регуляризация решения на основе стабилизирующего функционала или обращения регуляризованной корреляционной матрицы помехи

**Метод стабилизирующего функционала.** Отметим, что этот метод также называют методом А.Н. Тихонова [31]. В качестве регуляризованного решения системы (4.1.1) выбирается весовой вектор  $\mathbf{W}$ , который минимизирует следующий функционал:

$$F(\mathbf{W}) = |\hat{\mathbf{M}}\mathbf{W} - \Phi_0|^2 + a|\mathbf{W} - \mathbf{W}_0|^2. \quad (4.2.1)$$

Функционал  $F(\mathbf{W})$  зависит от весового вектора  $\mathbf{W}$  и состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое называется функционалом невязки. Его величина определяется выборочными векторами и не зависит от вектора  $\mathbf{W}_\perp$  из ядра оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , так как для любого вектора  $\mathbf{W}_\perp$  имеем, что  $\hat{\mathbf{M}}\mathbf{W}_\perp = 0$ . Поэтому минимизация только функционала невязки не позволяет однозначно определить весовой вектор  $\mathbf{W}$ . Второе слагаемое называется стабилизирующим функционалом. С его помощью из множества весовых векторов  $\mathbf{W}$ , обеспечивающих минимум функционала невязки, выбирается тот весовой вектор, который является наиболее близким к заданному вектору  $\mathbf{W}_0$ . Относительным вклад этих двух функционалов регулируется выбором параметра регуляризации  $a$ .

Учтем, что в ААР всегда имеется собственный шум с единичной КМ, при котором оптимальная обработка задается весовым вектором, совпадающим с вектором сигнала  $\Phi_0$ . Это значит, что при  $a \rightarrow \infty$  необходимо, чтобы  $\mathbf{W} \rightarrow \Phi_0$ . Поэтому в (4.2.1) следует считать, что вектор  $\mathbf{W}_0 = \Phi_0$ . Тогда функционал  $F(\mathbf{W})$  в (4.2.1) принимает следующий вид:

$$F = |\hat{\mathbf{M}}\mathbf{W} - \Phi_0|^2 + a|\mathbf{W} - \Phi_0|^2. \quad (4.2.2)$$

Найдем минимум функционала  $F(\mathbf{W})$  по весовому вектору  $\mathbf{W}$ . Из условия  $dF/d\mathbf{W}^H = 0$  получим вместо (4.1.1) следующее регуляризованное уравнение для весового вектора  $\mathbf{W}$ :

$$(\hat{\mathbf{M}}^2 + a\mathbf{I})\mathbf{W} = (\hat{\mathbf{M}} + a\mathbf{I})\Phi_0. \quad (4.2.3)$$

Значение параметра регуляризации  $a$  зависит, вообще говоря, от параметров помеховой ситуации (взаимного расположения источников помехи, их мощностей). Однако, как показано ниже с помощью численного моделирования, эта зависимость является

достаточно слабой. Поэтому оценку  $\mathbf{a}$  можно найти путем усреднения по всем возможным помеховым ситуациям.

Запишем решение уравнения (4.2.3) в виде

$$\mathbf{w} = (\hat{\mathbf{M}}^2 + a\mathbf{I})^{-1}(\hat{\mathbf{M}} + a\mathbf{I})\Phi_0. \quad (4.2.4)$$

Далее учтем свойство спектрального разложения КМ  $\mathbf{M}$ , в соответствии с которым любую матричную функцию  $f(\mathbf{M})$  от матрицы  $\mathbf{M}$  можно представить в виде разложения (3.1.6). В результате будем иметь, что

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{r_j + a}{r_j^2 + a} \right) (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j, \quad (4.2.5)$$

или

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^N H_2(r_j, a) (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j. \quad (4.2.6)$$

где коэффициент передачи  $H_2(r_j, a)$  пространственного фильтра подавления помехи равен

$$H_2(r_j, a) = \frac{r_j + a}{r_j^2 + a}. \quad (4.2.7)$$

Сравним решения (4.1.9) и (4.2.6). Величина рассогласования весовых векторов, даваемых этими выражениями, равна

$$|\Delta \mathbf{w}|^2 = \sum_{j=1}^N |H_1(r_j, r^{(th)}) - H_2(r_j, a)|^2 \cdot |\mathbf{U}_j^H \Phi_0|^2. \quad (4.2.8)$$

Учитывая нормировку собственных векторов выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , найдем, что

$$|\Delta \mathbf{w}|^2 \leq |\Phi_0|^2 \sum_{j=1}^N |H_1(r_j, r^{(th)}) - H_2(r_j, a)|^2. \quad (4.2.9)$$

Таким образом, величина рассогласования весовых векторов, определяемых формулами (4.1.9) и (4.2.6), зависит от разности коэффициентов передачи соответствующих фильтров подавления  $H_1(r, r^{(th)}) - H_2(r, a)$ , взятых в точках, соответствующих собственным числам  $r_j$  КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ .

Собственные числа  $r_j$  являются случайными и в зависимости от помеховой обстановки принимают любые значения в интервале  $[0, \infty]$ . Поэтому отклонение функции  $H_2(r, a)$  от  $H_1(r, r^{(th)})$  можно оценить на всем интервале  $r$  с помощью формулы [25,26]

$$s_{12}^2 = \int_0^{\infty} |H_1(r, r^{(th)}) - H_2(r, a)|^2 dr. \quad (4.2.10)$$

Будем считать в (4.1.9), что параметр  $r^{(th)} = 1$ . Тогда коэффициент передачи  $H_1(r, r^{(th)})$  равен

$$H_1(r, 1) = \begin{cases} 1, & r \leq 1 \\ 1/r, & r > 1 \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Минимизируем  $s_{12}^2$  в (4.2.10) по параметру  $a$ . Для этого вычислим производную  $ds_{12}^2/da$  и приравняем ее к нулю. В результате будем иметь, что минимальное значение  $s_{12}^2$  получается при  $a$ , равном мощности собственного шума в приемных каналах ААР, то есть при  $a=1$ .

**Обращение регуляризованной корреляционной матрицы помехи.** Как отмечалось выше, в случае короткой выборки входного процесса ( $L < N$ ), оценочная КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  является вырожденной, а обратная матрица  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$  не существует. Поэтому вместо КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  можно использовать регуляризованную матрицу  $\hat{\mathbf{M}}_r$ , полученную из максимально правдоподобной оценки путем добавления единичной матрицы, то есть матрицу вида [27,32,33]

$$\hat{\mathbf{M}}_r = b \mathbf{I} + \frac{1}{L} \cdot \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l) \mathbf{X}^H(l), \quad (4.2.12)$$

где  $b$  – параметр регуляризации. Очевидно, что обращение матрицы  $\hat{\mathbf{M}}_r$ , возможно при любой длине  $L$  выборки входного процесса.

Найдем оценку параметра регуляризации  $b$  для метода обращения регуляризованной матрицы  $\hat{\mathbf{M}}_r$  в (4.2.12). В соответствии со спектральным разложением (4.1.3) и выражением (3.1.6) собственные числа  $\hat{\mathbf{M}}_r$  смещены по отношению к собственным числам оценочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  в (4.1.3) на величину  $b$ , а собственные векторы совпадают. Тогда разложение весового вектора  $\mathbf{W} = \hat{\mathbf{M}}_r^{-1} \mathbf{S}$  по собственным векторам имеет вид

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^N H_3(r_j, b) (\mathbf{U}_j^H \Phi_0) \mathbf{U}_j, \quad (4.2.13)$$

где коэффициент передачи пространственного фильтра подавления помехи равен

$$H_3(r_j, b) = \frac{1}{r_j + b}. \quad (4.2.14)$$

Определим аналогично (4.2.10) СКО отклонение  $s_{13}(b)$  функции  $H_3(r, b)$  от  $H_1(r, r^{(th)})$  и найдем точку экстремума функции  $s_{13}^2$  по  $b$ . Вычисляя производную  $ds_{13}^2/db$  и приравнявая ее к нулю, получим, что минимальное значение  $s_{13}^2$  достигается при  $b = \sqrt{e} - 1$ .

Графики коэффициентов передачи  $H_1(r, r^{(th)})$ ,  $H_2(r, a)$  и  $H_3(r, b)$  при  $r^{(th)} = 1$ ,  $a=1$  и  $b = \sqrt{e} - 1$  приведены на рис. 4.2.

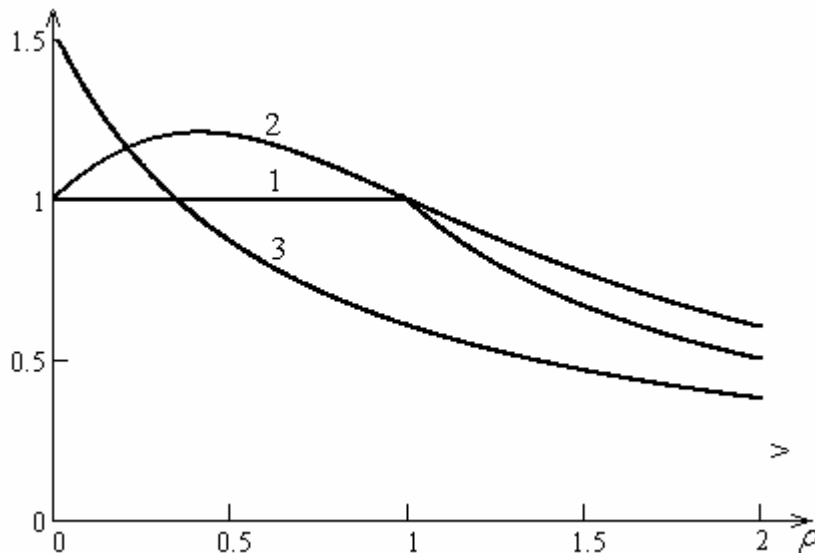


Рис. 4.2 Коэффициенты передачи фильтров подавления помехи  $H_1(r, r^{(th)})$ ,  $H_2(r, a)$  и  $H_3(r, b)$  (кривые 1,2,3, соответственно) при  $r^{(th)} = 1$ ,  $a=1$  и  $b = \sqrt{e} - 1$

### 4.3. Пороговая техника для адаптивной оценки размерности степенного базиса

Нахождение оптимального весового вектора  $\mathbf{W}$  связано с решением системы линейных алгебраических уравнений (2.1.12), то есть с необходимостью обращения КМ  $\mathbf{M}$  помехи в приемных каналах ААР. В практических ситуациях вместо точной КМ используется ее МП оценка  $\hat{\mathbf{M}}$  (3.1.17) по конечному числу  $L$  статистически независимых выборок

входного процесса, число которых выбирается на основе компромисса между эффективностью и скоростью адаптации.

Если длина  $L \geq 2J-1$ , то потери в ОСШ не превышают  $\approx 3$  дБ [27]. Часто помеховые ситуации таковы, что число источников значительно меньше числа  $N$  приемных каналов ААР ( $J < 0.5N$ ). Поэтому используют короткую выборку с числом выборочных векторов меньшим числа элементов ААР ( $L < N$ ). Оценка КМ становится вырожденной, а система уравнений (2.1.12) имеет бесконечное множество решений. С физической точки зрения это обстоятельство обусловлено тем, что на основе информации о помехе, содержащейся в короткой выборке, можно построить только проекцию  $\mathbf{W}_{\parallel}$  весового вектора на подпространство выборочных векторов размерности  $L < N$ . Проекция  $\mathbf{W}_{\perp}$  весового вектора на дополнительное подпространство размерности  $(N-L)$  остается неопределенной и произвольной. При этом даже небольшие флуктуации элементов КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  могут вызвать неограниченно большие флуктуации проекции  $\mathbf{W}_{\parallel}$ . Следовательно, найденный таким образом весовой вектор  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\parallel} + \mathbf{W}_{\perp}$  нельзя использовать на практике.

При использовании двухэтапной процедуры обработки сигналов в ААР, основанной на разложении (2.3.20) весового вектора по степенному базису, необходимо решить систему алгебраических уравнений (2.4.3) или (2.4.13). Следовательно, обращение  $(N \times N)$ -размерной КМ  $\mathbf{M}$  заменяется обращением матрицы  $\mathbf{A}^H \mathbf{M} \mathbf{A}$  или матрицы  $\mathbf{A}_{\perp}^H \mathbf{M} \mathbf{A}_{\perp}$  значительно меньшей размерности равной, в общем случае, числу источников помехи с учетом собственного шума  $((J+1) \times (J+1))$ . В подразделе 3.4 показано, что число вспомогательных каналов адаптации может быть уменьшено примерно в 2 раза ( $Na \approx J/2$ ) при относительно небольших потерях в ОСШ (не более  $2 \pm 3$  дБ). Поэтому интересен случай короткой выборки, когда число выходных каналов ДОС удовлетворяет условию  $(Na+1) < L < N$ .

Число выборок входного процесса превышает размерность матриц  $\mathbf{A}^H \mathbf{M} \mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}_{\perp}^H \mathbf{M} \mathbf{A}_{\perp}$ , равную  $(Na+1) \times (Na+1)$ , поэтому обращение этих матриц является устойчивым. Однако использование степенного базиса не снимает вопроса о регуляризации весового вектора, так как сам базис строится на основе короткой выборки входного процесса, которая обладает недостаточной информацией о помехе. Более того, так как число источников помехи неизвестно, то возникает проблема адаптивной оценки числа выходных каналов ДОС.

Рассмотрим возможность использования пороговой техники для решения этой задачи [25,26]. Будем исходить из процедуры (2.4.9) формирования ортонормированных

степенных векторов. При этом необходимо учесть, что вектор сигнала  $\mathbf{F}_0$  принадлежит общему  $N$ -мерному пространству векторов, а оценочные степенные векторы находятся в подпространстве выборочных векторов меньшей размерности. Поэтому данная процедура должна быть модифицирована так, чтобы в ней участвовали только степенные векторы, и не участвовал вектор сигнала. В результате вместо (2.4.9) будем иметь:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{F}_0 / \|\mathbf{F}_0\| \\ \tilde{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{F}_1 / \|\mathbf{F}_1\| \\ \tilde{\mathbf{F}}_3 = \mathbf{F}_2 / \|\mathbf{F}_2\| \\ \dots \\ \tilde{\mathbf{F}}_k = \mathbf{F}_k / \|\mathbf{F}_k\| \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{F}_1 = \mathbf{M}\Phi_0 \\ \mathbf{F}_2 = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_1 - a_1\tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \mathbf{F}_3 = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_2 - a_2'\tilde{\mathbf{F}}_2 - a_1''\tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \dots \\ \mathbf{F}_k = \mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_{k-1} - a_{k-1}'\tilde{\mathbf{F}}_{k-1} - a_{k-2}''\tilde{\mathbf{F}}_{k-2} \end{cases}, \quad (4.3.1)$$

где коэффициенты  $a_{k-1}'$ ,  $a_{k-2}''$  по-прежнему определяются выражениями (2.4.9).

Сначала вычислим первый степенной вектор  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{M}\Phi_0$  и сравним его норму  $\|\mathbf{F}_1\|$  с некоторым порогом  $r_{target}$ . Если будет выполняться условие  $\|\mathbf{F}_1\| < r_{target}$ , то будем считать, что внешних источников помехи нет, а выборочные векторы определяются только собственным шумом. В этом случае принимается решение, что размерность помехового подпространства равна нулю (векторы  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  равны нулю) и весовой вектор состоит из одного компонента  $\mathbf{W}=\mathbf{F}_0$ , который обеспечивает согласованную обработку сигнала.

Если норма вектора  $\mathbf{M}\Phi_0$  превышает значение порога ( $\|\mathbf{F}_1\| > r_{target}$ ), то он нормируется и принимается в качестве первого вектора в преобразующей матрице  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Процесс (4.3.1) продолжается, вычисляется следующий вектор  $\mathbf{F}_2$  и его норма сравнивается с тем же порогом  $r_{target}$ . Кроме этого, с целью лучшей устойчивости решения к ошибкам оценивания степенных векторов, будем сравнивать норму ненормированного вектора  $\mathbf{F}_2$  не только с порогом  $r_{target}$ , но и с нормой предыдущего ненормированного вектора  $\mathbf{F}_1$ . Если одновременно будут выполняться два условия:  $\|\mathbf{F}_2\| > r_{target}$ ;  $\|\mathbf{F}_2\| < \|\mathbf{F}_1\|$ , то вектор  $\mathbf{F}_2$  нормируется и становится вторым вектором в матрице ДОС  $\tilde{\mathbf{A}}$ .

Дальнейший процесс формирования системы ортонормированных векторов  $\tilde{\mathbf{F}}_k$  заключается в вычислении нормы каждого последующего вектора  $\mathbf{F}_{k+1}$  и в ее сравнении с порогом  $r_{target}$  и с нормой предыдущего вектора  $\mathbf{F}_k$ . Этот процесс должен быть прекращен при нарушении хотя бы одного из двух условий:  $\|\mathbf{F}_{k+1}\| > r_{target}$ ;  $\|\mathbf{F}_{k+1}\| < \|\mathbf{F}_k\|$ . Полученные

векторы объединяются в матрицу  $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp} = (\tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{F}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{F}}_{Na})$ , которая описывает ДОС, формирующую  $Na$  вспомогательных каналов адаптации для вычитания помехи на выходе ААР.

Теперь весовой вектор  $\mathbf{W}$  можно представить в виде разложения по полученным ортонормированным векторам в виде

$$\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{A}}_{\perp} \tilde{\mathbf{B}}_{\perp} + (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}_{\perp} \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^H) \Phi_0. \quad (4.3.2)$$

Первый компонент вектора  $\mathbf{W}$  (4.3.2) связан с подпространством внешних источников помехи и обеспечивает адаптивное подавление помехи. Второй компонент принадлежит подпространству собственного шума. Оптимальная обработка в этом подпространстве совпадает с согласованной обработкой, которая задается весовым вектором, равным проекции вектора сигнала  $\mathbf{F}_0$  на данное подпространство.

Чтобы найти вектор  $\tilde{\mathbf{B}}_{\perp}$ , необходимо исходное уравнение (2.1.12) для весового вектора  $\mathbf{W}$ , не имеющее решения во всем  $N$ -мерном пространстве, спроектировать на подпространство помехи, определяемое сформированным базисом. Проектирующая матрица равна [19]  $\mathbf{\Pi} = \tilde{\mathbf{A}}_{\perp} (\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\perp})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^H$ . Для ортонормированного базиса (4.3.1) матрица  $(\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\perp})^{-1} = \mathbf{I}$ , поэтому матрица-проектор  $\mathbf{P}$  упрощается и принимает вид:  $\mathbf{\Pi} = \tilde{\mathbf{A}}_{\perp} \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^H$ . В результате для вектора  $\tilde{\mathbf{B}}_{\perp}$  получим уравнение

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{A}}_{\perp} \tilde{\mathbf{B}}_{\perp} = \mathbf{1}_1, \quad (4.3.3)$$

которое имеет единственное и устойчивое решение.

Найдем оценку порога  $r_{target}$  [25,26]. Она должна быть универсальной для различных помеховых ситуаций и определяться через известные параметры ААР. Выражение для точной КМ при наличии  $J$  источников помехи с мощностями  $\nu_j$  и собственного шума единичной мощности имеет вид (1.2.9). В результате получим, что норма вектора  $\mathbf{M}\Phi_0$  равна

$$\|\mathbf{M}\Phi_0\|^2 = \Phi_0^H \Phi_0 + 2 \sum_{i=1}^J n_i |\Phi_i^H \Phi_0|^2 + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J n_i n_j (\Phi_0^H \Phi_i) (\Phi_j^H \Phi_0) (\Phi_j^H \Phi_j). \quad (4.3.4)$$

Выберем вектор сигнала нормированным таким образом, что  $\|\Phi_0\| = 1$ . Тогда вместо (4.3.4) будем иметь, что



$$\|\mathbf{M}\Phi_0\|^2 = 1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^J n_i |g_{i0}|^2 (\Phi_i^H \Phi_i) + \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J n_i n_j g_{i0} g_{j0}^* g_{ij} (\Phi_j^H \Phi_j) (\Phi_i^H \Phi_i), \quad (4.3.5)$$

где  $g_{ij} = (\Phi_i^H \Phi_j)(\Phi_i^H \Phi_i)^{-1/2}(\Phi_j^H \Phi_j)^{-1/2}$  - коэффициент рассогласования волновых фронтов  $i$ -го и  $j$ -го источников помехи,  $g_{i0} = (\Phi_i^H \Phi_0)(\Phi_i^H \Phi_i)^{-1/2}$  - коэффициент рассогласования волновых фронтов источника полезного сигнала и  $i$ -го источника помехи.

Величина  $\|\mathbf{M}\Phi_0\|$  зависит от параметров конкретной помеховой обстановки (взаимное расположение источников, их число, мощности и т.д.). Поэтому в качестве значения порога выберем усредненное по всем угловым положениям приближенное значение нормы  $\|\mathbf{M}\Phi_0\|$ . Учтем, что коэффициент  $g_{ij}$  представляет собой значение ДН ААР, обеспечивающей согласованный прием  $i$ -го источника помехи, в направлении на  $j$ -ый источник помехи. Аналогично, коэффициент  $g_{i0}$  - есть значение ДН ААР, обеспечивающей согласованный прием полезного сигнала, в направлении на  $i$ -ый источник помехи. Как правило, является известным среднее значение ДН основного канала в угловом секторе возможного воздействия источников помех. Обозначим его через  $\langle g \rangle$  и подставим в (4.3.5) вместо величин  $g_{i0}$ ,  $g_{j0}$  и  $g_{ij}$ . Тогда в актуальном случае превышения мощности помехи над мощностью собственного шума в основном канале ААР, в качестве оценки значения порога можно выбрать величину равную

$$r_{target} = \|\mathbf{M}\Phi_0\| = Sp(\mathbf{M}) (\langle g \rangle)^{3/2}. \quad (4.3.6)$$

Отметим, что  $Sp(\mathbf{M})$  представляет собой суммарную мощность помехи в элементах ААР, которая может быть оценена в каждой помеховой ситуации.

Важным вопросом при использовании метода двухэтапной адаптивной обработки на основе использования степенного базиса является оценка необходимого объема вычислений. Данный метод сопряжен с необходимостью вычисления степеней КМ  $\mathbf{M}$ . Поэтому, на первый взгляд, может показаться, что его реализация требует значительно большего объема вычислений, чем использование других методов адаптации. Однако результаты оценок показывают, что это предположение является неверным. Необходимый объем вычислений удастся значительно уменьшить, так как при вычислении степеней МП оценки (3.1.17) можно избежать операции умножения матрицы на матрицу и использовать операцию умножения матрицы на вектор.

Найдем объем вычислений, необходимый для реализации двухэтапной адаптивной обработки. Пусть ААР состоит из достаточно большого числа элементов ( $N \gg 1$ ), а

выборка входного процесса является короткой ( $Na < L < N$ ). Будем оценивать количество операций комплексного умножения и не учитывать операции сложения. С помощью МП оценки (3.1.17) КМ  $\mathbf{M}$ , получим, что вычисление векторов  $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_i$  в (4.3.1) по  $L$  выборкам входного процесса можно производить последовательно с помощью рекуррентной формулы вида

$$\mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_i = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l) \mathbf{X}^H(l) \tilde{\mathbf{F}}_i. \quad (4.3.7)$$

Отсюда следует, что для каждой выборки входного процесса можно вычислить скалярное произведение  $\mathbf{X}^H(l)\tilde{\mathbf{F}}_i$   $N$ -мерных векторов  $\mathbf{X}(l)$  и  $\tilde{\mathbf{F}}_i$  ( $N$  комплексных умножений), а затем умножить вектор  $\mathbf{X}(l)$  на число  $\mathbf{X}^H(l)\tilde{\mathbf{F}}_i$  ( $N$  комплексных умножений). Пренебрегая несущественной операцией деления на  $L$ , получим, что для формирования одного вектора  $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_i$  необходимо выполнить  $\approx 2NL$  комплексных умножений. Если оценка размерности подпространства помехи равна  $Na$ , то в соответствии с (4.3.1) должны быть вычислены  $(Na+1)$  векторов  $\mathbf{M}\tilde{\mathbf{F}}_i$ , что требует  $\approx 2NL(Na+1)$  операций комплексного умножения.

Объем вычислений при нормировании векторов  $\mathbf{F}_k$  ( $\approx 1,5N(Na+1)$  комплексных умножений), нахождении коэффициентов  $\mathbf{a}'_{k-1}, \mathbf{a}''_{k-2}$  в (4.3.1) ( $\approx 2N(Na)$  комплексных умножений) является малым по сравнению с величиной  $\approx 2NL(Na+1)$ , и может не учитываться далее. Вычисление действительных элементов матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}_{\perp}^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{A}}_{\perp}$  в (4.3.3) и обращение этой матрицы требует  $\approx (Na)^3$  комплексных умножений, что также является пренебрежимо малым в случае короткой выборки входного процесса. Таким образом, нахождение весового вектора  $\mathbf{W}$  с помощью метода двухэтапной адаптивной обработки предполагает выполнение  $\approx 2NL(Na+1)$  операций комплексного умножения.

Сравним полученные вычислительные затраты с соответствующими затратами, необходимыми для реализации других известных методов нахождения весового вектора ААР. Как показано в подразделе 3.2 метод непосредственного обращения выборочной КМ  $\mathbf{M}$  предполагает выполнение  $\approx 1,5N^3$  операций комплексного умножения. Из подраздела 3.3 следует, что более «быстрый» рекуррентный алгоритм оценивания обратной КМ  $\mathbf{M}^{-1}$ , основанный на процедуре (3.3.3), требует для своей реализации  $\approx 1,75N^2L$  комплексных умножений (см. (3.3.9)).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что предложенный метод адаптации, основанный на использовании степенного базиса, требует меньший (в  $\approx N/Na$  раз) объем вычислений, чем рекуррентный алгоритм оценивания КМ  $\hat{\mathbf{M}}^{-1}$ , который, в свою очередь, является наиболее быстрым среди других методов.

Приведем результаты математического моделирования эффективности пороговой техники для адаптивной оценки размерности степенного базиса при  $N=20$  и  $d_l=0.5$ . Задавалось шесть помеховых ситуаций с разным числом источников помехи  $J$ , их мощностями  $\nu_j$  и угловыми положениями  $\theta_j$  относительно направления нормали к ААР. При этом для конкретности считалось, что источники помехи могли появляться вне главного луча ААР в угловом секторе  $[-30^\circ, 30^\circ]$ . Средний уровень ДН основного канала в этом секторе равен  $\langle g \rangle = -20$  дБ. На рис. 4.3 изображена исходная ДН ААР. Стрелками показано расположение источников помехи в рассматриваемых шести помеховых ситуациях.

Параметры помеховых ситуаций, длина выборки  $L$  и значение порога  $r_{target}$  приведены в таблице 4.1. Для каждой ситуации проводилось по 10 "экспериментов". В каждом из них ( $j$ -ый "эксперимент") формировалась МП оценка КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , находился весовой вектор  $\mathbf{W}_j$ , и ОСШ  $h_j$ . Затем вычислялось среднее ОСШ  $\langle h_i \rangle$ , которое сравнивалось с максимальным ОСШ  $h_{opt}$ , соответствующим случаю точно известной КМ ( $L \rightarrow \infty$ ).

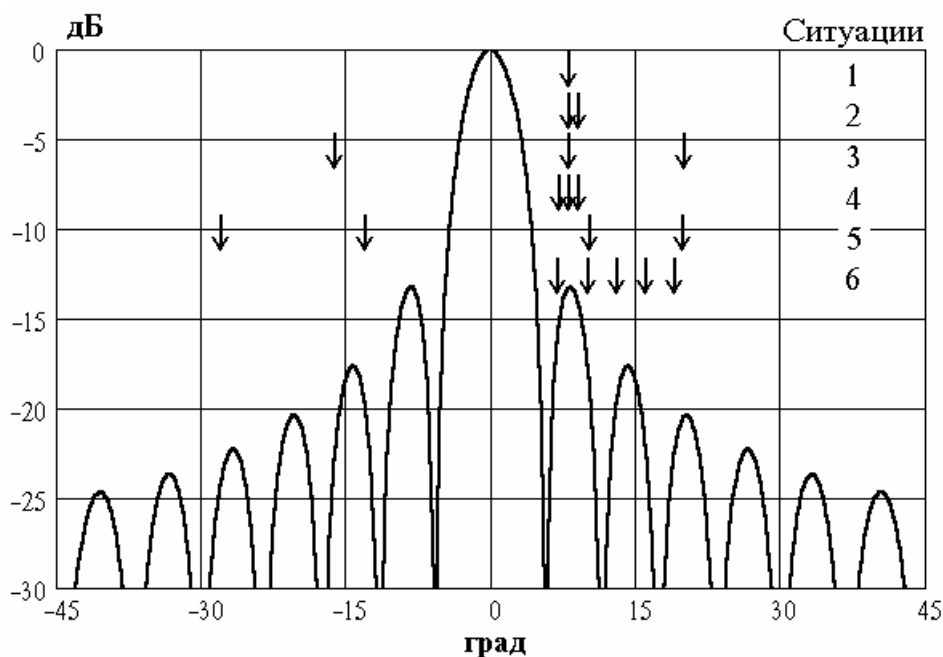


Рис. 4.3 Исходная ДН ААР. Стрелки показывают расположение источников помехи в рассматриваемых помеховых ситуациях

Таблица 4.1.

Номер помеховой ситуации	1	2	3	4	5	6
Мощности, $v_j$	1000	10; 1000	100; 1000; 10000	10; 100; 1000	1000; 1000; 1000; 1000	100; 100; 100; 100; 100
Углы $\theta_j$ (град.)	8	8; 9	8; -16; 20	9; 8; 7	-28; -13; 10; 20	7; 10; 13; 16; 19
Длина выборки, $L$	4	10	10	10	10	15
Порог $r_{target}$ , $lg$	2,8	2,8	3,8	2,8	3,4	2,5

На рис. 4.4 и 4.5 показаны потери в ОСШ (дБ). Из приведенных результатов видно, что оценка (4.3.6) для порога  $r_{target}$  является достаточно общей и дает хорошие результаты в существенно отличающихся между собой помеховых ситуациях, а данный пороговый метод адаптивной обработки обеспечивает высокую эффективность. Так потери в ОСШ во всех помеховых ситуациях составляли  $(1 \div 2.6)$  дБ.

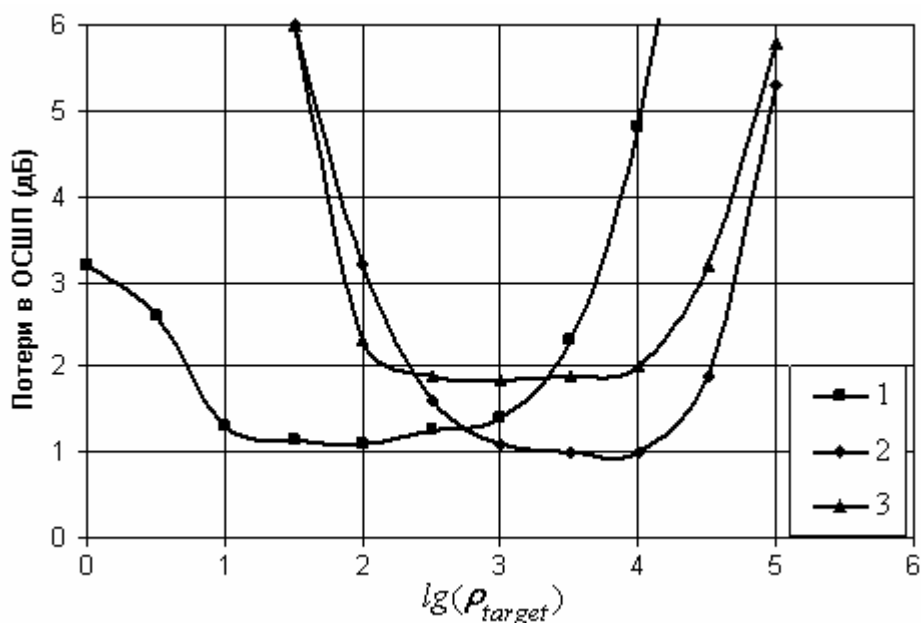


Рис. 4.4 Потери в ОСШ (дБ) в зависимости от порога при оценивании размерности степенного базиса для помеховых ситуаций № 1, 2 и 3 (см. таблицу 4.1 и рис. 4.3)

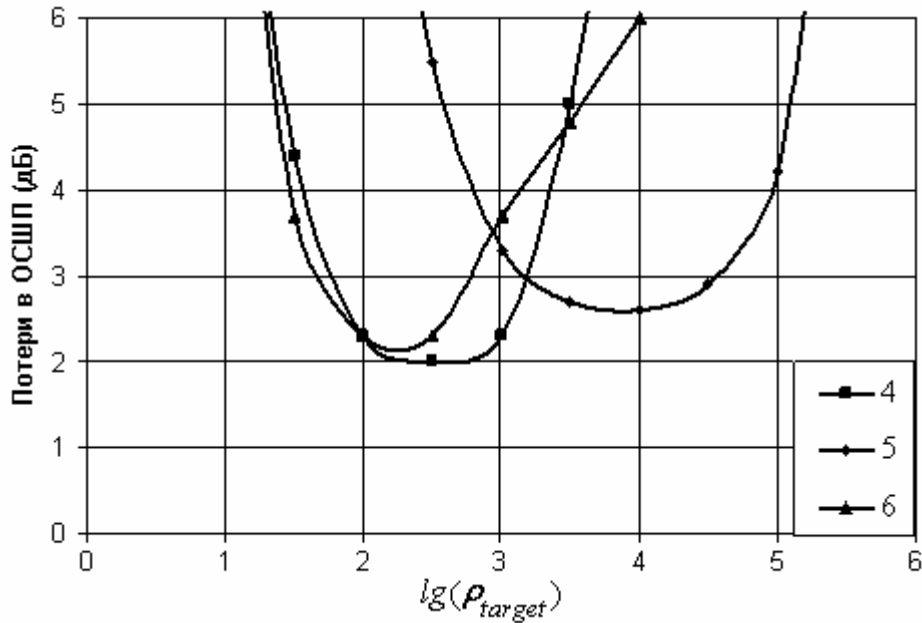


Рис. 4.5 Потери в ОСШ (дБ) в зависимости от порога при оценивании размерности степенного базиса для помеховых ситуаций № 4, 5 и 6 (см. таблицу 4.1 и рис. 4.3)

Теперь сравним потери в ОСШ  $c = \langle h_j \rangle / h_{opt}$  из-за конечной длины выборки входного процесса для всех выше рассмотренных методов: метода собственных векторов, метода стабилизирующего функционала, метода обращения регуляризованной КМ помехи и метода степенных векторов, которые будем для удобства называть как методы I, II, III и IV, соответственно. Условия моделирования, задаваемые параметры помеховых ситуации и параметры ААР аналогичны описанным выше.

Эффективность адаптивной обработки в различных помеховых ситуациях показана в таблице 4.2. В ней приведены параметры, характеризующие помеховые ситуации, длина выборки  $L$  и потери  $c = \langle h_j \rangle / h_{opt}$  в ОСШ для всех методов. Как показано выше среди методов I, II и III, наименьшими вычислительными сложностями обладает метод обращения регуляризованной КМ помехи (метод III). Поэтому в таблице 4.2 приведен коэффициент  $g$  уменьшения объема вычислений при использовании метода IV по сравнению с методом III. При этом значения коэффициента потерь  $c$  для метода IV соответствуют порогу, найденному с помощью (4.3.6), а для остальных методов - оптимальным значениям параметров регуляризации  $r_i$ ,  $a$ ,  $b$ , полученным выше. Нумерация помеховых ситуаций соответствует рис. 4.3.

В качестве примеров на рис. 4.6 и 4.7 показаны результаты моделирования эффективности адаптивной обработки в первой и третьей помеховых ситуациях, где даны

средние потери в ОСШ в зависимости от параметров  $r_i$ ,  $a$ ,  $b$  и  $r_{target}$  соответствующих методам I, II, III и IV (кривые 1, 2, 3, 4, соответственно).

Таблица 4.2.

Номер помеховой ситуации	$c_I$ , дБ	$c_{II}$ , дБ	$c_{III}$ , дБ	$c_{IV}$ , дБ	$g$
1	-1.0	-1.1	-1.1	-1.0	9
2	-0.9	-0.8	-1.0	-0.8	9
3	-1.9	-1.9	-1.9	-1.9	4
4	-1.6	-1.6	-2.0	-1.7	6
5	-2.2	-2.2	-2.6	-2.2	4
6	-1.9	-1.9	-2.3	-2.2	3

Из приведенных результатов моделирования видно, что эффективность всех рассмотренных методов регуляризации зависит от параметров  $r^{(th)}$ ,  $a$ ,  $b$  и  $r_{target}$ . При правильном выборе этих параметров она является практически одинаковой для всех методов. Из таблицы 4.2 видно, что, несмотря на достаточно короткую выборку входного процесса, эффективность адаптивной обработки остается достаточно высокой и несущественно уступает предельному значению, соответствующему бесконечно длинной выборке. Отметим также значительно меньший объем вычисления, необходимый для реализации метода степенных векторов по сравнению с методом обращения регуляризованной КМ помехи и, следовательно, по сравнению с другими методами.

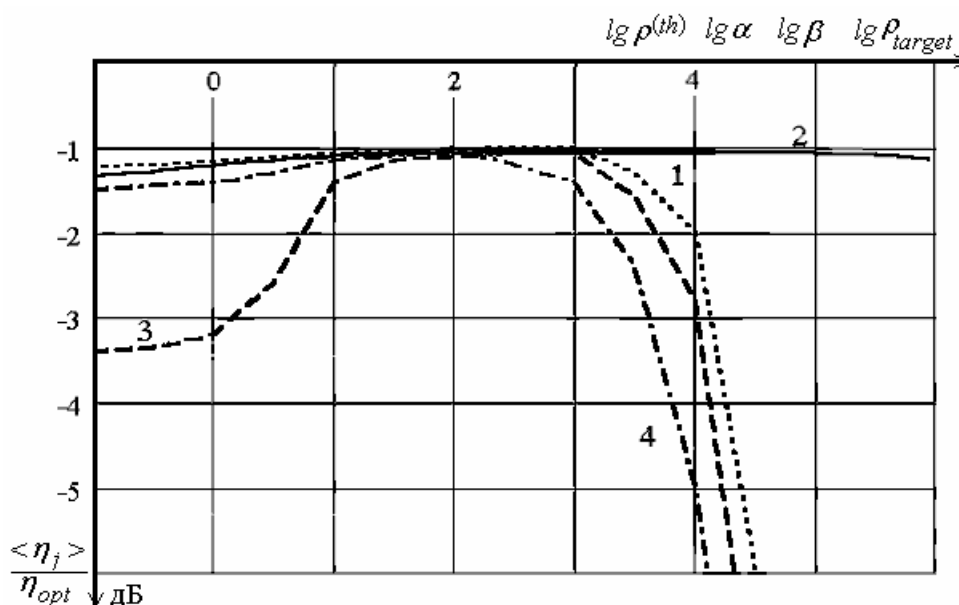


Рис. 4.6 Потери в ОСШ в зависимости от значения параметров регуляризации (ситуация 1)

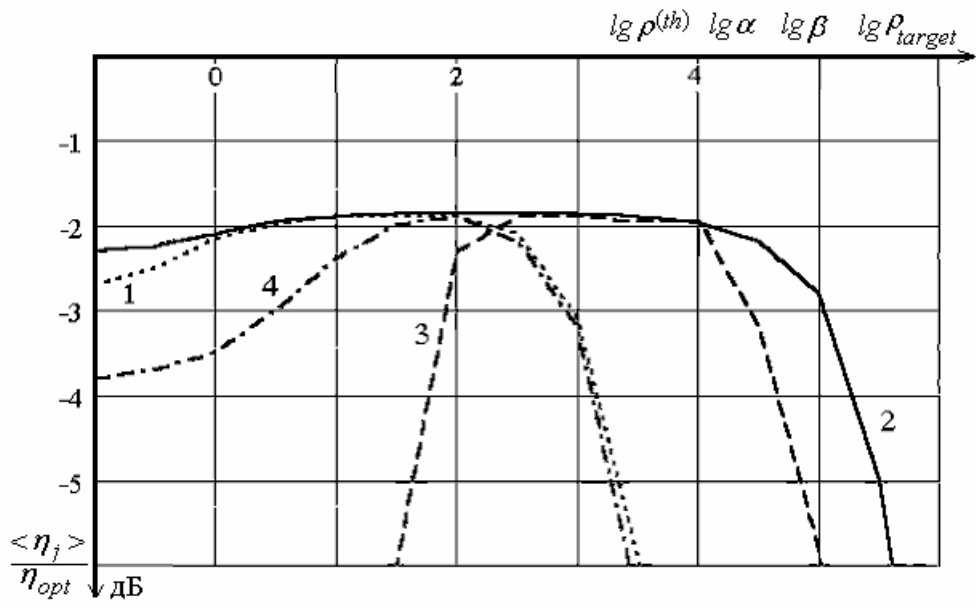


Рис. 4.7 Потери в ОСШ в зависимости от значения параметров регуляризации (ситуация 3)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ширман Я. Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
2. Журавлев А. К., Лукошкин А. П., Поддубный С. С. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках. Л.: Изд-во Лен. универ., 1983. 240 с.
3. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1986. 448 с.
4. Караваев В.В., Сазонов В.В. Статистическая теория пассивной локации. М.: Радио и связь, 1987. 240 с.
5. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 440 с.
6. Пистолькорс А.А., Литвинов О.С. Введение в теорию адаптивных антенн. - М.: Наука, 1991. - 200 с.
7. Patten B. Robust modulation methods and smart antennas in wireless communications. Prentice Hall, Inc., 2000. 292 p.
8. Liberti J.C., Rappaport T.S. Smart Antennas for Wireless Communications: IS-95 and Third Generation CDMA Applications. Prentice Hall, Inc., 1999. p 440.
9. Andersen J.B. Antenna Arrays in Mobile Communications: Gain, Diversity, and Channel Capacity // IEEE Antennas and Propagation Magazine. 2000. V. 42, No. 2. P. 12-17.
10. Гершман А.Б. Ермолаев В.Т. Анализ собственных чисел корреляционной матрицы входных колебаний адаптивной антенной решетки и возможности углового сверхразрешения в условиях коррелированных внешних источников // Изв. Вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 10. С. 1236-1240.
11. Джейкс У.К. Связь с подвижными объектами в диапазоне СВЧ. Пер. с англ. М.: Связь, 1979. 520 с.
12. Parsons J.D. The Mobile Radio Propagation Channel. – London. Pentech Press Publisher, 1992. 316 p.
13. Черный Ф.Б. Распространение радиоволн. М.: Советское радио, 1962. 480 с.
14. Petrus P., Reed J.H., Rappaport T.S. Geometrical-based statistical macrocell channel model for mobile environment // IEEE Trans. Communications. 2002. V. 50, No. 3. P. 495-502.
15. Bevan D.D.N., Ermolayev V.T., Flaksman A.G., Averin I.M. Gaussian channel model for mobile multipath environment // EURASIP Journal on Applied Signal Processing, 2004, No. 9, pp. 1321-1329.



16. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Аверин И.М. Гауссовская модель многолучевого канала связи в городских условиях // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, сер. Радиофизика, вып. 1 (2), 2004, сс. 127-137.
17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука. 1971. 1108 с.
18. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
19. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.
20. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука. 1988. 552 с.
21. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. О расчете статического режима адаптивной антенной решетки на основе аналитического обращения корреляционной матрицы // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т.25. №4. – С.472-474
22. Ермолаев В.Т., Краснов Б.А., Флакман А.Г. О синтезе оптимального весового распределения в адаптивных антенных решетках // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т.26. №7. С.874-880
23. Ermolayev V.T., Flaksman A.G. Signal processing in adaptive arrays using power basis // International Journal of Electronics. 1993. V. 75, No. 4. P. 753-765.
24. Ермолаев В.Т., Краснов Б.А., Соломатин В.Я., Флакман А.Г. Анализ эффективности частичной адаптации в антенных решетках с адаптивными диаграммообразующими схемами // Изв. Вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 5. С. 551-556.
25. Ermolayev V.T., Flaksman A.G., Rodygin Yu.L. Methods of Defining the Vector of Adaptive Processing in Antenna Arrays at Short Sample Case // International Journal of Electronics. 1994. V.76, № 3. P. 497-510.
26. Ермолаев В.Т., Родыгин Ю.Л., Флакман А.Г. Методы определения вектора пространственной адаптивной обработки при короткой выборке помехи // Изв. Вузов. Радиофизика. 1994. Т.37, № 4. С. 493-509.
27. Черемисин О.П. Эффективность адаптивного алгоритма с регуляризацией выборочной корреляционной матрицы // Радиотехника и электроника. 1982. Т. 27, № 10. С. 1933-1941.
28. Ермолаев В.Т., Краснов Б.А., Флакман А.Г. Эффективность адаптивной пространственной обработки сигнала, основанной на разложении весового вектора по степенному базису // Вопросы радиоэлектроники. Сер. РЛТ. 1992. Вып.1. С. 3-12.
29. Евсиков Ю.А., Чапурский В.В. Преобразование случайных процессов в радиотехнических устройствах. М.: Высшая школа, 1977. 264 с.

30. Ермолаев В.Т., Краснов Б.А., Флакман А.Г. Исследование влияния флуктуаций весового вектора на эффективность адаптивных антенных решеток // Изв. Вузов. Радиофизика. 1986. Т.29, № 10. С. 1092-1099.
31. Тихонов А.И., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
32. Абрамович Ю.И. Регуляризованный метод адаптивной оптимизации фильтров по критерию максимума отношения сигнал/помеха // Радиотехника и электроника. 1981. Т. 26, № 3. С. 543-551.
33. Абрамович Ю.И., Неврев Ф.И. Анализ эффективности адаптивной максимизации отношения сигнал/помеха, использующей обращение оценки корреляционной матрицы // Радиотехника и электроника. 1981. Т.26, № 12. С. 2558-2566.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b>	3
<b>Глава 1. Основные модели сигналов и помех</b>	6
1.1. Исходные соотношения	6
1.2. Модели источников помехи для активных радиолокационных адаптивных систем	8
1.3. Модель Кларка для сигналов, принимаемых мобильной станцией системы связи	13
1.4. Основные модели сигналов, принимаемых базовой станцией системы связи	15
<b>Глава 2. Критерии эффективности и методы поиска оптимального весового вектора адаптивных антенных систем при известной корреляционной матрице помехи</b>	22
2.1. Основные критерии	22
2.2. Синтез оптимальной обработки сигналов на основе метода собственных векторов корреляционной матрицы помехи	28
2.3. Метод степенных векторов	33
2.4. Синтез оптимальной обработки сигналов на основе метода степенных векторов	39
2.5. Эффективность квазиоптимальной обработки при ограничении степенного базиса	48
<b>Глава 3. Адаптивные методы обработки сигналов в антенных решетках на основе максимально правдоподобной оценки корреляционной матрицы помехи</b>	55
3.1. Максимально правдоподобная оценка корреляционной матрицы помехи	55
3.2. Метод непосредственного обращения выборочной корреляционной матрицы	58
3.3. Рекуррентное обращение выборочной корреляционной матрицы	61
3.4. Эффективность адаптации при использовании степенного базиса	64
<b>Глава 4. Регуляризованные методы построения весового вектора адаптивной антенной решетки при короткой выборке входного процесса</b>	72

4.1. Метод собственных векторов корреляционной матрицы помехи	73
4.2. Регуляризация решения на основе стабилизирующего функционала или обращения регуляризованной корреляционной матрицы помехи	80
4.3. Пороговая техника для адаптивной оценки размерности степенного базиса	84
<b>Литература</b>	94

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АР	антенная решетка;
ААР	адаптивная антенная решетка
ДН	диаграмма направленности
ДОС	диаграммообразующая схема
МП	максимально правдоподобный
КМ	корреляционная матрица
ОСШ	отношение средней мощности сигнала к средней мощности помехи
СКО	среднеквадратическая ошибка
SVD	singular value decomposition