Федеральное агентство по образованию

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Приоритетный национальный проект «Образование»
Инновационная образовательная программа
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета

В.А. ПАЛЬМОВ

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОМЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 150300 «Прикладная механика»

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2008

УДК 539.375
ББК 22.22

Рецензенты:

Член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор Индейцев Д.А. ИПМАШ РАН

Доктор физико-математических наук, профессор Кривцов А.М., СПбГПУ

Пальмов В.А. Теория определяющих уравнений в нелинейной термомеханике деформируемых тел. Учебное пособие. СПб: Изд-во СПбГПУ, 2008. 113 с.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту и содержанию примерной учебной программы дисциплин «Теория упругости» и «Строительная механика машин».

В нем представлены главные принципы, лежащие в основе современной теории определяющих уравнений. Учебное пособие предназначено студентам, обучающимся по курсам «Теория упругости» и «Строительная механика машин». В выборе материала автор руководствовался соображениями простоты и краткости. Большое количество примеров иллюстрирует эффективность основных принципов, лежащих в основе этого выбора. Много внимания уделено рассмотрению изотропных материалов.

Учебное пособие может быть полезно для студентов, обучающихся по другим направлениям подготовки и специальностям техники и технологии в области машиностроения.

Работа выполнена в рамках реализации Инновационной образовательной программы Санкт-Петербургского государственного политехнического университета **«Развитие политехнической системы подготовки кадров в инновационной среде науки и высокотехнологичных производств северо-западного региона России»** по мероприятию – Разработка инновационного УМК по направлению подготовки бакалавров и магистров 150300 «Прикладная механика».

Печатается по решению Дирекции Инновационной образовательной программы и редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Лишь в немногих книгах по механике деформируемых тел читатель встретит раздел, посвященный общей теории определяющих уравнений. Вместе с тем, частные примеры определяющих уравнений встречаются везде. Правда, они называются по-другому. Встречаются названия «уравнения состояния», «физические уравнения». В книгах по теории упругости читатель найдет определяющие уравнения упругого материала — линейного и нелинейного. В книгах по механике жидкости и газа читатель встретит определяющие уравнения сжимаемой и несжимаемой жидкости, вязкой жидкости — опять-таки линейной и нелинейной. В книгах по теории пластичности читатель встретит разнообразные определяющие уравнения пластических материалов. Наконец, в теории теплопроводности читатель встретит определяющие уравнения, описывающие теплопроводность. Вместе с тем, все эти определяющие уравнения имеют единую основу.

В предлагаемом учебном пособии излагается единая теория определяющих уравнений. Из этой общей теории, как частные случаи получаются все перечисленные уравнения и много новых.

В этом учебном пособии изложение ведется в соответствии с общей схемой, содержащейся в книгах [5] и [9].

Вводится понятие «определяющие параметры». История изменения всех определяющих параметров во времени в каждой типичной материальной точке составляет содержание понятия «термомеханический процесс» в окрестности материальной точки.

Далее постулируется, что поведение деформируемого тела зависит от всего термомеханического процесса. Такая зависимость задается определяющими уравнениями материала. Отдельный раздел посвящен проблеме их определения. В нем указано, что эта проблема похожа на проблему идентификации «черного ящика». Точное решение проблемы черного ящика неизвестно. Приближенное решение состоит в априорной формулировке определяющего уравнения и в последующей экспериментальной проверке его соответствия получаемым экспериментальным результатам. Показано, что первый шаг — априорная формулировка определяющих уравнений должна быть подчинена ряду ограничений. Первое из них — второй закон термодинамики, второе — принцип материальной объективности, и наконец, для изотропных материалов — соответствие определению изотропии. По представленной общей схеме составлены известные и неизвестные ранее определяющие уравнения.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Место теории определяющих уравнений в механике деформируемых тел

Основу всех наук составляют законы природы. Такие законы используются и в механике деформируемых тел (см. например [1] – [6]).

Во-первых, это закон сохранения или изменения массы тела. В термомеханике деформируемых тел изучаются только материальные тела постоянной массы, и поэтому этот закон читается следующим образом: масса всякого материального тела не изменяется при его деформировании и нагреве.

Далее, большую роль в термомеханике деформируемых тел играют законы Эйлера: первый и второй. В первом законе говорится о том, что скорость изменения количества движения материального тела равна главному вектору всех сил, действующих на это тело. Во втором законе динамики утверждается, что скорость изменения момента количества движения равна сумме моментов внешних сил, приложенных к этому телу и собственно моментов, если таковые имеются.

Первый закон динамики дает очень много: появляется тензор напряжений Коши и знаменитые дифференциальные уравнения динамики, а также условия на разрывах тензора напряжений.

Важным следствием второго закона динамики в классической механике деформируемых тел является симметрия тензора напряжений.

Наконец, при описании тепловых и механических процессов находят свое применение законы термодинамики: первый, второй и третий.

Первый закон термодинамики — это по существу закон сохранения или изменения энергии. В нем утверждается, что скорость изменения энергии деформируемого тела равна мощности внешних сил, действующих на тело, и скорости подвода тепла извне.

Второй закон термодинамики играет важную роль. Именно в нем появляются такое важное неопределяемое понятие, как внутренняя энтропия. Формулировок второго закона термодинамики много. В наиболее общей из них утверждается, что скорость изменения внутренней энтропии не меньше, чем скорость подвода энтропии извне.

Наконец, в третьем законе термодинамики утверждается, что энтропия материального тела стремится к нулю при стремлении к нулю абсолютной температуры тела.

Вот и все законы природы, которые находят применение в термомеханике деформируемых тел. Они справедливы для всех без исключения деформируемых тел: стальных, медных, стеклянных, маслянистых и газообразных.

Все они являются деформируемыми телами. Однако, очевидно, что при деформировании они ведут себя по-разному. В этом учебном пособии мы концентрируем свое внимание на особенностях их термомеханического поведения. Эти особенности проявляются в так называемых определяющих уравнениях. Проблеме составления определяющих уравнений посвящено это учебное пособие.

В теоретической механике встречались простейшие определяющие уравнения: при описании упругих элементов, при описании демпферов вязкого и сухого трения. В термодинамике использовалось определяющее уравнение для процесса теплопроводности.

В курсе «Сопротивление материалов» появилось знаменитое определяющее уравнение — закон Гука. Изощренные частные случаи определяющих уравнений деформируемых тел рассматривались в большом числе книг. Укажу только некоторые: [1], [2], [3], [4].

1.2. Определяющие параметры, термомеханические процессы и определяющие уравнения

Здесь мы должны ответить на важнейший вопрос: что определяет термомеханическое состояние окрестности некоторой материальной точки M с начальной координатой $\mathbf{R}$? Уточним: речь идет о тепловом и механическом состоянии названной окрестности. Сразу становится понятным, что в число таких параметров следует включить в первую очередь абсолютную температуру T: что же, как ни она определяет тепловое состояние окрестности! Градиент температуры $\mathbf{\Gamma}$ тоже следует включить в их число, ибо этот градиент определяет термонапряженность окрестности: уже на уровне знаний и понимания студентов младших курсов ВУЗов ясно, что чем выше градиент температуры, тем больше тепла будет проходить через эту окрестность от горячих зон к холодным. Это более или менее понятно и убедительно.

А как быть с механическим состоянием? Очевидно, что положение окрестности $\mathbf{r}$, скорее всего, не определяет ничего. А вот ее градиент $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$ определяет сближение материальных точек окрестности и их относительное расположение. Итак, мы получаем первый возможный набор определяющих параметров

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}. \tag{1.1}$$

В силу полярного разложения (1.18) из [6] его можно заменить на два следующих альтернативных набора

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \mathbf{V},\, \mathbf{O}, \tag{1.2}$$

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \mathbf{U},\, \mathbf{O}. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — так называемые правый и левый тензоры искажений, а $\mathbf{O}$ — тензор поворота (или просто ортогональный тензор). В силу справедливости уравнений (1.19) и (1.20) из [6] тензоры искажений можно заменить на меры деформаций Коши – Грина $\mathbf{G}$ и Фингера $\mathbf{F}$. И тогда получим еще два набора

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \mathbf{G},\, \mathbf{O}, \tag{1.4}$$

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{O}. \tag{1.5}$$

Но ведь известна формула (1.27) из [6]

$$\nabla\mathbf{R} = \left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\right)^{-1}.$$

Значит, и в тензоре $\nabla\mathbf{R}$ содержится та же информация, что и в $\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}$. Так что, можно использовать следующий набор определяющих параметров

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \nabla\mathbf{R}. \tag{1.6}$$

Если теперь воспользоваться полярным разложением $\nabla\mathbf{R}$ по (1.18) из [6], то приходим к еще двум наборам определяющих параметров

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \mathbf{V}^{-1},\, \mathbf{O}, \tag{1.7}$$

$$T,\, \mathbf{\Gamma},\, \mathbf{U}^{-1},\, \mathbf{O}. \tag{1.8}$$

Но тогда, в силу (1.30), (1.31) из [6], эти наборы можно заменить следующими двумя новыми наборами

$$T,\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{g},\ \mathbf{O}, \tag{1.9}$$

$$T,\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{m},\ \mathbf{O}. \tag{1.10}$$

Понятно, что все эти наборы равноправны. Поэтому, в принципе, можно пользоваться любым набором. Однако какие-то из них могут оказаться более удобными, а другие менее. Например, уравнения динамики и теплопроводности сформулированы для текущего состояния, причем везде используется эйлерова координата $\mathbf{r}$ и соответствующий ей оператор Гамильтона ∇. Через эйлерову координату выражен и градиент температуры $\mathbf{\Gamma} = \nabla T$. Если принять эту точку зрения, то наиболее удобными следует признать наборы (1.5), (1.6) и (1.9). В них появились меры деформации Альманси и Фингера. Остановимся, например, на наборе (1.9). С мерой деформации Альманси $\mathbf{g}$ все ясно: как показано в гл. 1 из [6], ее диагональные координаты определяют относительное удлинение тех материальных отрезков, которые после деформирования оказались параллельными координатным осям ox_1, ox_2 и ox_3; недиагональные координаты определяют сдвиги между теми материальными отрезками, которые после деформации оказались параллельны координатным осям ox_1 и ox_2, ox_1 и ox_3, или, наконец, ox_2 и ox_3. Таким образом, тензор $\mathbf{g}$ содержит информацию только о величине относительных удлинений и сдвигов, но совершенно не содержит никакой информации о том, как были расположены эти материальные отрезки до деформации. Последняя информация содержится в тензоре поворота $\mathbf{O}$. Но ведь она содержится и в тензоре поворота окрестности $\mathbf{B}$. Так что, можно заменить $\mathbf{O}$ на $\mathbf{B}$. Чем же это лучше? Для тензора $\mathbf{B}$ справедливо простое уравнение (1.104) из [6], тогда, как для тензора $\mathbf{O}$ такого простого уравнения нет. Приходим к еще одному набору определяющих параметров

$$T,\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{g},\ \mathbf{B}. \tag{1.11}$$

Столь же удобным может оказаться и следующий набор, основанный на использовании меры деформации Фингера

$$T,\ \mathbf{\Gamma},\ \mathbf{F},\ \mathbf{B}. \tag{1.12}$$

Однако на каком-то варианте следует остановиться, чтобы продолжить теоретические рассуждения. Остановимся на (1.12) и продолжим.

Вводим понятие — термомеханический процесс в материальной точке M с лагранжевой координатой $\mathbf{R}$. Определяем его, как историю изменения во времени определяющих параметров в точке $\mathbf{R}$, т.е.

$$T(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau), \quad 0<\tau<t. \tag{1.13}$$

Материалы различаются своей реакцией на изменение и значение определяющих параметров. А что такое реакция? Это значения тензора напряжений, вектора теплового потока, плотности свободной энергии и, наконец, плотности внутренней энтропии в точке $\mathbf{R}$, т.е.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{R},t),\, \mathbf{h}(\mathbf{R},t),\, \psi(\mathbf{R},t),\, S(\mathbf{R},t). \tag{1.14}$$

Полагаем, что значения реакций в момент t зависят от термомеханического процесса в этой же материальной точке. Формальная запись этого утверждения представляет систему определяющих уравнений материала. Эта запись такова

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{R},t)=\boldsymbol{\sigma}\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau) \,\middle|\, \mathbf{R},t\right\}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{R},t)=\mathbf{h}\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau) \,\middle|\, \mathbf{R},t\right\}, \\ \psi(\mathbf{R},t)=\psi\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau) \,\middle|\, \mathbf{R},t\right\}, \\ S(\mathbf{R},t)=S\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau) \,\middle|\, \mathbf{R},t\right\}, \end{cases} \tag{1.15}$$

$$0<\tau<t.$$

Эти уравнения являются несколько более общими, чем в книгах [5], [9].Что же здесь записано? Здесь в фигурных скобках помещены аргументы разных типов. Слева от вертикальной черты указаны так называемые операторные аргументы; операторные аргументы — это просто определяющие параметры. Таким образом, (1.15) представляют собой операторы от определяющих параметров. Чтобы подчеркнуть это, в аргументах реакций указан текущий момент времени t, тогда как в аргументах определяющих параметров указаны все моменты времени τ, предшествующие текущему моменту времени t. Говоря совсем просто, видим, что в (1.15) указано, что реакции материала в момент времени t в материальной точке $\mathbf{R}$ определяются всей предысторией изменения определяющих параметров в этой же материальной точке $\mathbf{R}$.

Справа от вертикальной черты указаны обычные аргументы. Наличие $\mathbf{R}$ указывает на то, что операторы (1.15) изменяются при переходе от одной материальной точки к другой; наличие t справа от вертикальной черты указывает на то, что операторы (1.15) изменяются во времени: как говорится материал стареет.

Определение 1.1. Материал называется однородным, если аргумент $\mathbf{R}$ отсутствует в (1.15) справа от вертикальной черты.

Определение 1.2. Материал называется нестареющим, если аргумент t отсутствует в (1.15) справа от вертикальной черты.

Для однородного и нестареющего материала отпадает необходимость в сохранении вертикальной черты в (1.15). Тогда определяющие уравнения примут вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{R},t) = \boldsymbol{\sigma}\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau)\right\}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{R},t) = \mathbf{h}\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau)\right\}, \\ \psi(\mathbf{R},t) = \psi\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau)\right\}, \\ S(\mathbf{R},t) = S\left\{T(\mathbf{R},\tau),\, \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{F}(\mathbf{R},\tau),\, \mathbf{B}(\mathbf{R},\tau)\right\}, \end{cases} \tag{1.16}$$
$$0 < \tau < t.$$

Снова обращаем внимание читателя на то, что в определяющих уравнениях (1.15) и (1.16) осуществляется преобразование только во времени. Координата $\mathbf{R}$ везде одна и та же, как в определяющих параметрах, так и в реакциях. Постараемся в максимальной степени упростить подробную запись (1.16). Во-первых, не будем указывать аргумент $\mathbf{R}$, подразумевая, что везде речь идет об одной и той же материальной точке $\mathbf{R}$. Во-вторых, опустим аргумент t в реакциях и аргумент τ в определяющих параметрах, конечно, подразумевая их существование. Тогда получим

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\right\}, \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}\left\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\right\}, \\ \psi = \psi\left\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\right\}, \\ S = S\left\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\right\}. \end{cases} \tag{1.17}$$

Здесь кратко записано, что реакции $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{h}$, ψ и S являются операторами или функционалами от определяющих параметров. Так факт, что везде здесь фигурируют операторы, отмечен использованием фигурных скобок.

Прочитаем то, что записано в (1.17): тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ представляет собой оператор $\boldsymbol{\sigma}\{...\}$ от определяющих параметров и т.д.

Задание определяющих уравнений (1.15) или (1.17) полностью определяет термомеханическое поведение материала. Мы не получаем из них никакой информации о цвете, запахе и вкусе материала, но получаем полную информацию о термомеханическом поведении.

1.3. Откуда взять определяющие уравнения?

Типичный ответ на этот вопрос таков: их можно получить из экспериментов. Такой ответ слишком общий. Но кроме того он совсем неправилен. Одни только эксперименты не могут ничего дать. Попытаюсь убедить в этом читателя.

Допустим, что имеем в своем распоряжении кусок какого-то материала, например, кусок стали. Допустим, что мы можем проводить с этим куском любые эксперименты. С формальной точки зрения понятие эксперимента означает, что мы можем задавать и фиксировать в памяти различные термомеханические процессы T, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$ и можем фиксировать все реакции $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{h}$, ψ, S. Возникает вопрос: можно ли по этим экспериментальным данным восстановить операторы $\boldsymbol{\sigma}\{...\}$, $\mathbf{h}\{...\}$, $\psi\{...\}$, $S\{...\}$, входящие в определяющие уравнения (1.15) или в более простые уравнения (1.16)? Никто не даст ответ на вопрос, какие конкретные эксперименты нужно провести и сколько их понадобится в общем случае. Причина здесь в том, что сформулированная задача представляет собой частный случай проблемы идентификации «черного ящика» в теории управления. Она не решена до настоящего времени. Это означает, что никто не может назначить конкретные эксперименты, которые нужно провести, их последовательность и число, чтобы полностью идентифицировать «черный ящик». В теории управления используется приближенный метод. Воспользуемся этим методом и мы. В соответствии с идеей этого метода выполняем несколько шагов.

1. Вводим некоторые идеальные определяющие уравнения. Грубо говоря, мы их просто выдумываем, опираясь, конечно, на свой предыдущий инженерный опыт.

2. Используя эти определяющие уравнения, проводим теоретический анализ некоторых несложных термомеханических систем. Типичными здесь являются растяжение цилиндрического стержня, кручение и растяжение тонкостенной трубки с кольцевым поперечным сечением, распространение тепла в цилиндре и трубке, и т.д. При этом устанавливаем теоретически связи между некоторыми механическими характеристиками рассматриваемых термомеханических систем и параметрами определяющих уравнений.

3. Проводим реальный эксперимент над выбранными термомеханическими системами. При этом устанавливаем экспериментально связи между теми же механическими характеристиками, которые использовались при теоретическом анализе.

4. Сопоставляя между собой результаты теоретического и экспериментального анализов, определяем параметры определяющих уравнений. Если их удалось определить, то подставляем их в гипотетические уравнения, которые были сформулированы на первом шаге. В результате получаем определяющие уравнения для куска материала, которым мы располагали в начале дискуссии.

А что делать, если нет совпадения результатов теоретического анализа с экспериментальными результатами? Нужно предложить новые определяющие уравнения и повторить анализ вновь и вновь до достижения совпадения результатов теоретического и экспериментального исследований.

Проиллюстрирую сказанное на примере. Пусть у нас в распоряжении имеется кусок стали неизвестной марки. Проделаем все четыре шага, описанных выше.

1. Полагаем, что сталь — это упругий материал и заимствуем из курса «Сопротивление материалов» закон Гука для изотропного однородного и нестареющего материала. Запишем его сразу в цилиндрической системе

координат r, φ, z, поскольку последняя будет использоваться в последующем теоретическом анализе

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\Big(\sigma_{rr} - \nu\big(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\big)\Big), && \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{2G}, \\ &\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E}\Big(\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\big(\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\big)\Big), && \varepsilon_{\varphi z} = \frac{\sigma_{\varphi z}}{2G}, \\ &\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\Big(\sigma_{zz} - \nu\big(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\big)\Big), && \varepsilon_{zr} = \frac{\sigma_{zr}}{2G}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Здесь E — модуль Юнга, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона. Пока это просто параметры и их числовые значения заранее неизвестны. Далее, ε — деформации, а σ — напряжения.

2. Вырезаем из куска стали образец в форме длинной тонкостенной трубки. Подвергаем эту трубку действию растягивающей силы P и крутящего момента M. Полагаем доступными для наблюдений и измерений удлинение трубки Δl и разворот ее концов φ.

3. Проводим теоретический анализ растяжения и кручения трубки. Воспользуемся цилиндрической системой координат. Полагаем, что в пределах всей трубки за исключением малых участков вблизи ее концов реализуется однородное напряженное и деформированное состояние. Разумеется, последнее утверждение относится только к напряжениям и деформациям цилиндрической системы координат. Отмеченная однородность позволяет легко вычислить все напряжения и часть деформаций.

Обращаем внимание на то, что боковые поверхности трубки свободны, так что на них имеем

$$\sigma_{rr} = 0, \qquad \sigma_{r\varphi} = 0, \qquad \sigma_{rz} = 0. \tag{1.19}$$

Но ведь боковые поверхности (внешняя и внутренняя) расположены на малом расстоянии h друг от друга, и на каждой из них напряжения равны нулю. Это позволяет считать, что условия (1.19) с большой точностью выполняются во всем объеме трубки. Напряжения σ_{zz} и $\tau_{z\varphi}$ найдем, рассматривая равновесие части трубки, отсеченной плоским сечением перпендикулярным оси трубки. Уравнения равновесия имеют вид

$$2\pi R h \sigma_{zz} = P, \qquad 2\pi R^2 h \sigma_{z\varphi} = M. \tag{1.20}$$

Отсюда находим

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi Rh}, \qquad \sigma_{z\varphi} = \frac{M}{2\pi R^2 h}, \tag{1.21}$$

где R — средний радиус трубки, а h — толщина. Наконец, проводя осевое сечение и составляя уравнение равновесия отсеченной полутрубки, находим

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 0. \tag{1.22}$$

Обратимся теперь к деформациям. Очевидно, что осевая деформация равна следующему значению

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta l}{l}, \tag{1.23}$$

где Δl — удлинение трубки, а l — ее длина. Так же легко вычислить сдвиг в плоскости касательной к боковой поверхности

$$\gamma_{\varphi z} = 2\varepsilon_{\varphi z} = \frac{R\Phi}{l}, \tag{1.24}$$

где Φ — разворот концевых сечений трубки. Остальные сдвиги $\gamma_{r\varphi}$ и γ_{rz} равны нулю, поскольку в силу (1.19) равны нулю соответствующие касательные напряжения.

Из закона Гука (1.18) находим

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\sigma_{zz}, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{rr} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz}, \qquad \varepsilon_{z\varphi} = \frac{\sigma_{z\varphi}}{2G}. \tag{1.25}$$

Отсюда получаем

$$E = \frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}}, \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\varepsilon_{zz}} = -\frac{\varepsilon_{rr}}{\varepsilon_{zz}}, \qquad 2G = \frac{\sigma_{z\varphi}}{\varepsilon_{z\varphi}}. \tag{1.26}$$

4. Проводим реальный эксперимент с тонкостенной трубкой. Измеряем $P_{эксп}$, $M_{эксп}$, $\Delta l_{эксп}$, и $\Phi_{эксп}$. По этим результатам вычисляем σ_{zz}, $\sigma_{z\varphi}$, ε_{zz} и $\varepsilon_{z\varphi}$, используя формулы (1.21), (1.23) и (1.24). Наконец, составляем отношения

$$\left(\frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}}\right)_{эксп}, \qquad \left(\frac{\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\varepsilon_{zz}}\right)_{эксп}, \qquad \left(\frac{\sigma_{z\varphi}}{\varepsilon_{z\varphi}}\right)_{эксп}. \tag{1.27}$$

5. Если окажется, что эти отношения не зависят от приложенных силы и момента, то можно их приравнять теоретическим значениям (1.26), и мы получим

$$E = \left(\frac{\sigma_{zz}}{\varepsilon_{zz}} \right)_{эксп}, \qquad \nu = -\left(\frac{\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\varepsilon_{zz}} \right)_{эксп}, \qquad 2G = \left(\frac{\sigma_{z\varphi}}{\varepsilon_{z\varphi}} \right)_{эксп}. \qquad (1.28)$$

Разумеется, все так и будет, если деформации, полученные в эксперименте, будут малы. Когда напряжения по норме превысят предел текучести, постоянство величин (1.27) уже не будет иметь места. Понадобится строить новые определяющие уравнения вместо (1.18).

Таким образом, подставив величины (1.28) в (1.18), получаем определяющие уравнения, которые пригодны только до перехода стали в пластическое состояние. А дальше нужно снова фантазировать.

Из всего сказанного выше следует, что наиболее ответственным является первый шаг. Здесь мы фантазируем, и можем выдумать такие определяющие уравнения, которые могут представлять описание вечного двигателя. Но это совершенно недопустимо! Поскольку вечного двигателя в природе не существует, значит, существуют какие-то ограничения при составлении гипотетических определяющих уравнений. В первую очередь это законы природы. Проанализируем их последовательно. Закон сохранения массы (2.7) из [6] никаких ограничений не накладывает, ибо в него не входит ни одно из определяющих уравнений. Уравнение динамики (2.46) из [6] тоже никаких ограничений не накладывает, ибо может быть выполнено при любом операторе $\boldsymbol{\sigma}\{...\}$ за счет подбора массовой силы $\mathbf{F}$. Второе уравнение динамики — требование симметрии тензора напряжений (2.51) из [6] — конечно же, ограничение накладывает. Но его легко выполнить, если рассматривать только симметричный тензорный оператор $\boldsymbol{\sigma}\{...\}$.

Следующий закон природы — закон сохранения энергии (3.58) из [6] — тоже ограничений не накладывает, ибо при любых значениях входящих в него операторов может быть выполнен за счет специального подбора потока тепла непосредственно в объем b.

Следующий закон природы — второй закон термодинамики в форме универсального диссипативного неравенства (3.51) из [6] дает существенное ограничение. В него входят все операторы определяющих уравнений и не входят никакие другое величины, за счет подбора которых можно было бы выполнить его. Итак, мы пришли к заключению: определяющие уравнения должны удовлетворять неравенству (3.51) из [6] при любом термомеханическом процессе, а это означает, что при всех мыслимых процессах. В этом состоит важное своеобразие диссипативного неравенства (3.51) из [6]. Это не одно неравенство — это бесконечно много неравенств для всех термомеханических процессов.

Остается проанализировать третий закон термодинамики — закон Нернста. Несомненно, что он вносит ограничения, но не на все термомеханические процессы, а только на такие, которые ведут к абсолютному нулю.

Итак, мы приходим к заключению: только универсальное диссипативное неравенство накладывает ограничения на определяющие уравнения материала. Напомним, что оно имеет вид (3.51)

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\mathbf{D}-\rho\dot{\psi}-\rho S\dot{T}-\frac{1}{T}\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\Gamma}\geq 0. \tag{1.29}$$

Напомним, наконец, что оно должно выполняться для всех без исключения термомеханических процессов.

Определение 1.3. Обратимым называется такой термомеханический процесс в некотором материале, если для этого процесса в этом материале диссипативное неравенство выполняется со знаком равенства, и необратимым, если со знаком неравенства.

Существенным моментом в этом определении является то, что оно определяет коллективное свойство. Понятие процесс здесь не используется независимо, а только лишь в связи с тем, в каком материале этот процесс происходит. Один и тот же термомеханический процесс может быть обратимым в одном материале и необратимым в другом.

1.4. Пример 1. Неподвижный и недеформируемый теплопроводящий материал

Уточним. Мы рассматриваем в этом разделе однородный и нестареющий материал.

Итак, тело неподвижно. Это значит

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}. \tag{1.30}$$

Отсюда следует первая цепочка равенств

$$\mathbf{v}=0, \qquad \nabla\mathbf{v}=0, \qquad \mathbf{D}=\left(\nabla\mathbf{v}\right)^{S}=0, \qquad \mathbf{\Omega}=\left(\nabla\mathbf{v}\right)^{A}=0. \tag{1.31}$$

Вторая цепочка такова

$$\mathbf{F}=\mathbf{g}=\left(\nabla\mathbf{R}\right)^{-1}\cdot\left(\nabla\mathbf{R}\right)^{-T}=\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\right)^{-1}\cdot\left(\overset{\circ}{\nabla}\mathbf{r}\right)^{-T}=\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B}=\mathbf{E}. \tag{1.32}$$

Второе равенство (1.32) следует из (1.104) из [6]. Говоря точнее, из (1.104) из [6] следует, что $\dot{\mathbf{B}}=0$ и значит, что $\mathbf{B}$ является постоянным тензором, и он, например, равен $\mathbf{E}$. Таким образом, определяющие уравнения принимают вид

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\left\{T,\,\mathbf{\Gamma},\,\mathbf{E},\,\mathbf{E}\right\},\\ \mathbf{h}=\mathbf{h}\left\{T,\,\mathbf{\Gamma},\,\mathbf{E},\,\mathbf{E}\right\},\\ \psi=\psi\left\{T,\,\mathbf{\Gamma},\,\mathbf{E},\,\mathbf{E}\right\},\\ S=S\left\{T,\,\mathbf{\Gamma},\,\mathbf{E},\,\mathbf{E}\right\}.\end{cases} \tag{1.33}$$

Последние два аргумента в (1.33) вообще не изменяются. Поэтому в принципе их можно и не записывать.

Обратимся теперь к диссипативному неравенству (1.29). В силу (1.31) тензор скоростей деформации $\mathbf{D}$ равен нулю. Следовательно, первое слагаемое обращается в нуль независимо от вида определяющего уравнения для напряжения. Последнее произвольно. Это означает, в частности, что невозможно найти распределение напряжений в абсолютно неподвижном теле. Итак, диссипативное неравенство принимает вид

$$-\rho\dot{\psi}-\rho S\dot{T}-\frac{1}{T}\mathbf{h}\cdot\mathbf{\Gamma}\geq 0. \tag{1.34}$$

Вернемся к определяющим уравнениям (1.33). Мы не будем записывать их во всей сложности. Рассмотрим простой случай, когда в них фигурируют не операторы, а просто функции, т.е.

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{A} \quad -\text{произвольно},\\ \mathbf{h}=\mathbf{h}\left(T,\,\mathbf{\Gamma}\right),\\ \psi=\psi\left(T,\,\mathbf{\Gamma}\right),\\ S=S\left(T,\,\mathbf{\Gamma}\right).\end{cases} \tag{1.35}$$

Круглые скобки указывают на то, что здесь стоят функции. Производная от ψ вычисляется элементарно, как производная сложной функции, и имеет вид

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}. \tag{1.36}$$

Ниже приводим доказательство этой формулы. Здесь вектор $\dfrac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}}$ имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} = \mathbf{i}_k \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma_k}. \tag{1.37}$$

Это вектор, координаты которого равны производным от скаляра ψ по координатам вектора $\mathbf{\Gamma}$. Последний имеет следующее выражение в базисе неподвижной системы координат

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{i}_m \Gamma_m. \tag{1.38}$$

Используя это разложение вектора градиента температуры, получим следующее представление свободной энергии

$$\psi = \psi\left(T, \mathbf{\Gamma}\right) = \psi\left(T, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\right).$$

Входящие сюда векторные аргументы представляют базисные векторы координатной системы, которые постоянны. Поэтому их можно и не указывать, т.е. можно записать

$$\psi = \psi\left(T, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\right).$$

Таким образом, скалярная функция от вектора является скалярной функцией от координат этого вектора. Вычислим материальную производную от ψ. Получим

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma_k}\dot{\Gamma}_k.$$

Этому выражению можно придать следующий вид

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \left(\mathbf{i}_k \frac{\partial \psi}{\partial \Gamma_k}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_m \dot{\Gamma}_m\right).$$

В первом сомножителе второго слагаемого правой части узнаем $\dfrac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}}$ по (1.37), а во втором — $\dot{\mathbf{\Gamma}}$ в соответствии с разложением $\mathbf{\Gamma}$ (1.38). В результате получаем

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}}.$$

Это выражение в точности совпадает с (1.36).

Внесем теперь это разложение в диссипативное неравенство (1.34) и сгруппируем однородные слагаемые. Получим следующее неравенство

$$-\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + S\right)\dot{T} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}} - \frac{1}{T}\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0. \qquad (1.39)$$

Нам предстоит теперь сформулировать необходимые и достаточные условия выполнения (1.39) при совершенно произвольном термомеханическом процессе. Обращаем внимание на то, что левая часть в (1.39) является линейной функцией от скоростей $\dot{T}$ и $\dot{\mathbf{\Gamma}}$, причем коэффициенты и свободный член зависят только от T и $\mathbf{\Gamma}$. В силу произвольности термомеханического процесса скорости $\dot{T}$ и $\dot{\mathbf{\Gamma}}$ никак не зависят от достигнутых значений T и $\mathbf{\Gamma}$. Таким образом, левая часть представляет собой линейную функцию скоростей, причем скорости могут принимать произвольные значения.

Возникшую ситуацию проясняет следующая теорема.

Теорема 1.1. Для того, чтобы линейное неравенство

$$Ax + By + C \geq 0 \qquad (1.40)$$

выполнялось при произвольных значениях аргументов x и y, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты A и B равнялись нулю, а свободный член был неотрицателен, т.е.

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C \geq 0. \qquad (1.41)$$

Достаточность видна непосредственно. Необходимость докажем методом от противного. Допустим, что коэффициент A отличен от нуля. Пусть, например, он положителен. Разделив обе части неравенства на положительный коэффициент A увидим, что знак неравенства не изменился, и мы получим

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A} \geq 0,$$

или

$$x \geq -\frac{B}{A}y - \frac{C}{A} = P. \qquad (1.42)$$

При заданных произвольных значениях A, B, C и y правая часть здесь известна. Но аргумент x произволен. Поэтому неравенство можно нарушить, подчиняя x условию

$$x < P.$$

Мы получили противоречие. Значит наше предположение $A > 0$ ошибочно. Точно так же доказывается ошибочность предположения $A < 0$. Остается принять только $A = 0$. Аналогичным образом доказываем, что $B = 0$. Наконец, подставив нулевые значения A и B в (1.40), найдем необходимое условие $C \geq 0$.

Возвращаемся к неравенству (1.39). Необходимые и достаточные условия его выполнения таковы

$$\begin{gathered}\frac{\partial \psi}{\partial T} + S = 0,\\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} = 0,\\ -\frac{1}{T}\mathbf{h}\cdot\mathbf{\Gamma} \geq 0.\end{gathered} \tag{1.43}$$

Из одного неравенства мы получили два равенства и одно неравенство! Из второго равенства следует, что свободная энергия не зависит от градиента температуры, т.е.

$$\psi = \psi(T). \tag{1.44}$$

Но тогда из первого равенства следует, что плотность внутренней энтропии тоже не зависит от $\mathbf{\Gamma}$

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = S(T). \tag{1.45}$$

Обратимся, наконец, к последней строчке условий (1.43). Умножив обе части этого неравенства на $T > 0$, получим знаменитое неравенство Фурье

$$\mathbf{h}\cdot\mathbf{\Gamma} \leq 0. \tag{1.46}$$

Как уже указывалось в [6] оно декларирует, что тепло не может самопроизвольно распространяться от холодной области тела к горячей.

Замечание 1.1. Неравенство (1.46) иногда принимается в качестве второго закона термодинамики, ориентированного только на процесс теплопроводности. Неравенство Клаузиуса – Дюгема обобщало неравенство Клаузиуса – Планка именно тем, что в нем учтена неравномерность распределения температуры в пределах тела. Из этого обобщения получился правильный результат — неравенство Фурье. Это означает, что обобщение сделано правильно.

Рассмотрим конкретные виды определяющих уравнений для процесса теплопроводности.

1. Пусть

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0(T) - \kappa(T)\mathbf{\Gamma}. \tag{1.47}$$

Подстановка этого представления в неравенство Фурье (1.46) дает следующий результат

$$\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{\Gamma} - \kappa(T)\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} \le 0. \tag{1.48}$$

Это неравенство должно выполняться при произвольном значении $\mathbf{\Gamma}$. Пусть градиент температуры $\mathbf{\Gamma}$ велик; тогда линейным слагаемым в (1.48) можно пренебречь по сравнению с квадратичным, и тогда получим

$$-\kappa(T)\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} \le 0. \tag{1.49}$$

Отсюда находим

$$\kappa(T) \ge 0.$$

Пусть теперь градиент температуры мал. Тогда квадратичным слагаемым в (1.48) можно пренебречь по сравнению с линейным, и тогда получим

$$\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{\Gamma} \le 0.$$

Но это линейное неравенство, и мы знаем условие его выполнения

$$\mathbf{h}_0(T) = 0. \tag{1.50}$$

Заметим теперь, что условие (1.50) не зависит от $\mathbf{\Gamma}$, и значит, остается справедливым при произвольном значении $\mathbf{\Gamma}$. Так что уравнение теплопроводности принимает вид

$$\mathbf{h} = -\kappa(T)\mathbf{\Gamma}, \qquad \kappa(T) \ge 0. \tag{1.51}$$

Это уравнение теплопроводности изотропного материала. Коэффициент $\kappa(T)$ носит название коэффициента теплопроводности. Он не может быть отрицательным.

2. Пусть

$$\mathbf{h} = -\mathbf{K}(T) \cdot \mathbf{\Gamma}, \tag{1.52}$$

где $\mathbf{K}(T)$ — тензор коэффициентов теплопроводности. Заметим, что определяющее уравнение (1.52) описывает поведение анизотропного материала. Во всех проведенных экспериментах он оказывается симметричным.

Выясним, какое требование предъявляется к определяющему уравнению. Единственное требование — неравенство Фурье (1.46). Подстановка в него выражения (1.52) дает следующий результат

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{\Gamma} \cdot \left(-\mathbf{K}(T) \cdot \mathbf{\Gamma}\right) = -\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Gamma} \le 0$$

или

$$\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Gamma} \ge 0. \qquad (1.53)$$

Напомню, что неравенство (1.53) должно выполняться для любого термомеханического процесса. Но в этом неравенстве фигурирует только значение вектора градиента температуры $\mathbf{\Gamma}$ в момент времени t. Так что неравенство (1.53) должно выполняться для всех возможных векторов $\mathbf{\Gamma}$ или для произвольного $\mathbf{\Gamma}$. Тензор $\mathbf{K}$, который удовлетворяет условию (1.53), называется неотрицательным. А что это означает? Чтобы это понять зададим тензор $\mathbf{K}$ в его главном базисе. Это представление имеет вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)}K_1 + \mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)}K_2 + \mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}K_3, \qquad (1.54)$$

где $\mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{e}_{(2)},\ \mathbf{e}_{(3)}$ — главные направления тензора $\mathbf{K}$, а $K_1,\ K_2,\ K_3$ — его главные значения. Вектор градиент температуры $\mathbf{\Gamma}$ тоже зададим в векторном базисе $\mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{e}_{(2)}$ и $\mathbf{e}_{(3)}$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{e}_{(1)}\Gamma_1 + \mathbf{e}_{(2)}\Gamma_2 + \mathbf{e}_{(3)}\Gamma_3. \qquad (1.55)$$

Подставив (1.54) и (1.55) в (1.53), получим следующее неравенство

$$\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Gamma} = \Gamma_1^2 K_1 + \Gamma_2^2 K_2 + \Gamma_3^2 K_3 \ge 0. \qquad (1.56)$$

Опять напоминаю, что оно должно выполняться при любом $\mathbf{\Gamma}$, т.е. при любых значениях координат $\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3$. Положим

$$\Gamma_1 \ne 0, \qquad \Gamma_2 = 0, \qquad \Gamma_3 = 0.$$

Тогда неравенство (1.56) примет вид

$$\Gamma_1^2 K_1 \ge 0.$$

Следовательно

$$K_1 \ge 0. \qquad (1.57)$$

Аналогично получим

$$K_2 \geq 0, \qquad K_3 \geq 0. \tag{1.58}$$

Таким образом, главные значения тензора коэффициентов теплопроводности неотрицательны. Таково свойство неотрицательного тензора коэффициентов теплопроводности $\mathbf{K}$.

Ответим себе на вопрос, обратимы или необратимы процессы чистой теплопроводности. Определение 1.3 позволяет однозначно ответить на этот вопрос. В нем понятия обратимости и необратимости связано с вопросом о том, в каком материале этот процесс происходит. Мы рассмотрели два теплопроводящих материала изотропный и анизотропный. В первом случае мы имеем диссипативное неравенство (1.49)

$$\kappa(T)\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma} \geq 0,$$

а во втором — (1.53)

$$\boldsymbol{\Gamma}\cdot\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\Gamma} \geq 0.$$

Если коэффициент теплопроводности $\kappa(T)$ или тензор коэффициентов теплопроводности $\mathbf{K}$ равны нулю, то диссипативное неравенство выполняется со знаком равенства при произвольном $\boldsymbol{\Gamma}$. Следовательно в таких телах (в которых $\kappa = 0,\ \ \mathbf{K} = 0$) любой термодинамический процесс обратим! Если теперь $\kappa \neq 0,\ \mathbf{K} \neq 0,$ то любой термодинамический процесс необратим, конечно, при $\boldsymbol{\Gamma} \neq 0;$ только процесс, в котором $\boldsymbol{\Gamma} = 0,$ оказывается обратимым. Суммируя сказанное, замечаем, что процесс является обратимым, если вектор теплового потока $\mathbf{h}$ равен нулю. Если же $\mathbf{h} \neq 0,$ то процесс теплопроводности необратим.

Рассмотрим теперь уравнение первого закона термодинамики (3.58) из [6]

$$\rho T\dot{S} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} + b - \nabla\cdot\mathbf{h}.$$

Учитывая уравнения (1.31), (1.44), (1.45), перепишем его в следующем виде

$$+\rho\left(-T\psi''(T)\right)\dot{T} = +\rho\left(S - S\right)\dot{T} + b - \nabla\cdot\mathbf{h}$$

или

$$\rho\left(-T\psi''(T)\right)\dot{T} = b - \nabla\cdot\mathbf{h}.$$

Введем обозначение

$$C = -T\psi''(T). \tag{1.59}$$

Тогда последнее уравнение примет вид

$$\rho C\dot{T} = b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \tag{1.60}$$

В нем легко узнается уравнение теплопроводности, причем C играет роль теплоемкости. Из выражения (1.59) видно, что теплоемкость зависит только от температуры и не зависит от градиента температуры $\mathbf{\Gamma}$, поскольку в силу (1.44) от него не зависит свободная энергия. Последний результат получен, как прямое следствие второго закона термодинамики. Прямые эксперименты подтверждают это следствие.

Положим, что известна зависимость теплоемкости от температуры $C = C(T)$. Она может быть измерена в прямых экспериментах. Тогда можно использовать (1.50) для вычисления $\psi(T)$. Выполняя однократное интегрирование и учитывая (1.45), найдем плотность внутренней энтропии

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = \int_{T^*}^{T} \frac{C(T)}{T} dT + A, \tag{1.61}$$

где A — постоянная интегрирования. Для ее определения воспользуемся третьим законом термодинамики. Устремляя T к нулю, получим условие стремления плотности внутренней энтропии к нулю

$$\int_{T^*}^{0} \frac{C(T)}{T} dT + A = 0.$$

Отсюда находим

$$A = -\int_{T^*}^{0} \frac{C(T)}{T} dT = \int_{0}^{T^*} \frac{C(T)}{T} dT.$$

Подставив это значение в (1.61), получим выражение для плотности внутренней энтропии

$$S = \int_{T^*}^{T} \frac{C(T)}{T} dT + \int_{0}^{T^*} \frac{C(T)}{T} dT.$$

Окончательно получаем

$$S = \int_{0}^{T} \frac{C(T)}{T} dT. \tag{1.62}$$

Чтобы все сказанное было бы несомненным и убедительным, необходимо потребовать, чтобы интеграл в (1.62) сходился в нуле. Это требование накладывает следующее ограничение на зависимость $C = C(T)$ вблизи абсолютного нуля

$$C(T) = AT^{\alpha}, \qquad \alpha > 0, A > 0. \tag{1.63}$$

Прямые эксперименты удивительно хорошо подтверждают заключение (1.63), полученное чисто теоретическим путем. Типичное значение для α таково

$$\alpha = 0{,}5.$$

Это с большим запасом подтверждает требование (1.63).

1.5. Пример 2. Неподвижный недеформируемый стареющий теплопроводящий материал

Опять-таки рассматриваем однородный материал. Однако учтем теперь старение. Предположение (1.30) о неподвижности сохраняем. Оно приводит к формулам (1.31), (1.32). Опять приходим к определяющим уравнениям типа (1.35) и к диссипативному неравенству (1.34). Остается учесть старение материала. Для этого усложним уравнения (1.35) путем введения в число аргументов времени t. Итак, рассматриваем определяющие уравнения следующего вида

$$\begin{cases} \mathbf{h} = \mathbf{h}(T, \mathbf{\Gamma}, t), \\ \psi = \psi(T, \mathbf{\Gamma}, t), \\ S = S(T, \mathbf{\Gamma}, t). \end{cases}$$

Вычисление производной свободной энергии по времени дает следующий простой результат

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}} + \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{1.64}$$

К известному значению (1.36) здесь добавилось еще одно слагаемое. Подставив (1.64) в диссипативное неравенство (1.34), получим следующее неравенство

$$-\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial T} + S\right)\dot{T} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\Gamma}} - \rho\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{T}\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0.$$

Как и в прошлом примере обнаруживаем, что скорости $\dot{T}$ и $\dot{\mathbf{\Gamma}}$ входят линейно. Следовательно, коэффициенты при них должны обратиться в нуль, а свободный член должен оказаться неотрицательным. Итак,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \psi}{\partial T} + S = 0, \\
&\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{\Gamma}} = 0, \\
&-\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{T}\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0.
\end{aligned} \tag{1.65}$$

Как и при рассмотрении предыдущего примера находим

$$\psi = \psi\left(T, t\right), \qquad S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = S\left(T, t\right). \tag{1.66}$$

В последнем неравенстве в (1.65) устремим $\mathbf{\Gamma}$ к нулю. Тогда получим неравенство

$$-\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \geq 0$$

или

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}\left(T, t\right) \leq 0. \tag{1.67}$$

Мы получили это неравенство, устремив $\mathbf{\Gamma}$ к нулю в (1.65). Но ведь $\mathbf{\Gamma}$ не входит в (1.67). Значит последнее должно иметь место и при $\mathbf{\Gamma} \neq 0$. Но тогда из (1.65) следует неравенство

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} \leq -\rho T \frac{\partial \psi}{\partial t} = \rho T \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|. \tag{1.68}$$

Если теперь записать скалярное произведение в соответствии с определением

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} = \left|\mathbf{h}\right| \left|\mathbf{\Gamma}\right| \cos\left(\mathbf{h}, \mathbf{\Gamma}\right)$$

и подставить в неравенство (1.68), то придем к загадочному неравенству

$$\cos\left(\mathbf{h}, \mathbf{\Gamma}\right) \leq \frac{\rho T}{\left|\mathbf{h}\right| \left|\mathbf{\Gamma}\right|} \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|. \tag{1.69}$$

Что же здесь загадочного? В правой части стоит положительная величина. Значит $\cos\left(\mathbf{h}, \mathbf{\Gamma}\right)$ может оказаться и положительным и отрицательным, а это решительным образом противоречит неравенству Фурье (1.46) или (1.53), которое не допускает положительных значений косинуса угла между вектором теплового потока и вектором градиентом температуры. Мы все с молоком матери впитали в себя веру в справедливость неравенства Фурье. Мы даже верим, что оно подтверждено точными экспериментами. А тут вдруг мы с помощью логических рассуждений, основанных на втором законе термодинамики в форме неравенства Клаузиуса – Дюгема получили вывод о том, что неравенство Фурье может нарушаться! Как же разрешить возникшее кажущееся противоречие? Следует признать, что оба результата правильны. Неравенство Фурье получено как точное следствие второго закона термодинамики для нестареющего теплопроводящего материала. И эксперименты проводились только на нестареющих материалах.

Возможность нарушения неравенства Фурье мы обнаружили чисто теоретическим путем, но только для стареющих материалов. Мне не известны эксперименты по теплопроводности стареющих материалов. Так что, полученный теоретический результат мы должны воспринимать как правильный и должны верить в то, что когда-нибудь в будущем он будет подтвержден экспериментально.

Приведенное рассуждение демонстрирует иерархию законов природы. Какой закон главнее? Конечно, второй закон термодинамики и его общая форма — универсальное диссипативное неравенство! Неравенство Фурье тоже закон природы, но только это частный закон, справедливый только при некоторых условиях, и который может нарушиться при других условиях.

Рассмотрим частные виды определяющего уравнения для вектора теплового потока.

1. Пусть имеет место уравнение

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{\Gamma}. \tag{1.70}$$

Это обобщение уравнения (1.47) на случай стареющего материала. Подставив (1.70) в третье условие в (1.65), получим следующее неравенство

$$-\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{T}\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{\Gamma} + \frac{\kappa}{T}\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0. \tag{1.71}$$

Оно должно выполняться при произвольных значениях градиента температуры $\mathbf{\Gamma}$. При очень больших значениях $\mathbf{\Gamma}$ неравенство принимает вид

$$\kappa \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0.$$

Это дает ограничение

$$\kappa(T,t) \geq 0 \tag{1.72}$$

на коэффициент теплопроводности $\kappa(T,t)$. Он должен быть неотрицательным при любой температуре и в любой момент времени. Важно заметить, что (1.72) получено при больших значениях $\mathbf{\Gamma}$, но оно не зависит от $\mathbf{\Gamma}$ и значит справедливо при любых $\mathbf{\Gamma}$.

Преобразуем (1.71) к следующему виду

$$-\rho\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{T}\left(\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}}\right)^2 + \frac{1}{T}\left(\left(\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{\kappa}\mathbf{\Gamma}\right)\cdot\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}} + \left(\sqrt{\kappa}\mathbf{\Gamma}\right)^2\right) \geq 0.$$

Последнее слагаемое здесь представляет квадрат разности, так что неравенство можно записать и так

$$-\rho\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{T}\left(\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}}\right)^2 + \frac{1}{T}\left(\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}} - \sqrt{\kappa}\mathbf{\Gamma}\right)^2 \geq 0. \tag{1.73}$$

Воспользуемся теперь тем, что градиент температуры произволен и положим

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\mathbf{h}_0}{2\kappa}.$$

Получим

$$-\rho\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{T}\left(\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}}\right)^2 \geq 0. \tag{1.74}$$

Значение $\mathbf{\Gamma}$ сюда вообще не входит, так что (1.74) должно выполняться при любых $\mathbf{\Gamma}$. Используя условия (1.68), перепишем неравенство следующим образом

$$\rho\left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right| - \frac{1}{T}\left|\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}}\right|^2 \geq 0.$$

Отсюда получаем ограничение на $\mathbf{h}_0$

$$\left|\frac{\mathbf{h}_0}{2\sqrt{\kappa}}\right| \leq \sqrt{\rho T\left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|}. \tag{1.75}$$

Оказалось, что вектор $\mathbf{h}_0$ ограничен только по величине и не имеет никаких ограничений по направлению.

2. Пусть теперь имеем определяющее уравнение следующего вида

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0(T,t) - \mathbf{K}(T,t)\cdot\mathbf{\Gamma}. \tag{1.76}$$

Третье условие в (1.65) принимает вид

$$-\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{T}\mathbf{h}_0\cdot\mathbf{\Gamma} + \frac{1}{T}\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{\Gamma} \geq 0.$$

Перепишем его, умножая на T и принимая за базис главные направления тензора коэффициентов теплопроводности. Получим

$$-T\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - h_{0l}\Gamma_l + K_1\Gamma_1^2 + K_2\Gamma_2^2 + K_3\Gamma_3^2 \geq 0. \tag{1.77}$$

Вспоминаем, что градиент температуры здесь произволен. Принимая, что проекция Γ_1 велика, получим из (1.77)

$$K_1 \geq 0.$$

Принимая, что проекция Γ_2 велика, получим

$$K_2 \geq 0.$$

Наконец, принимая, что проекция Γ_3 велика, получим еще одно ограничение

$$K_3 \geq 0.$$

Таким образом, оказалось, что все главные значения тензора коэффициентов теплопроводности неотрицательны, т.е.

$$K_l(T,t) \geq 0. \tag{1.78}$$

Но все эти три условия вообще не зависят от $\mathbf{\Gamma}$. Значит они должны выполняться при всех $\mathbf{\Gamma}$.

Перепишем неравенство (1.77), выделяя в левой части полные квадраты разностей следующим образом

$$\begin{gathered}-T\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - \left(\frac{h_{01}}{2\sqrt{K_1}}\right)^2 - \left(\frac{h_{02}}{2\sqrt{K_2}}\right)^2 - \left(\frac{h_{03}}{2\sqrt{K_3}}\right)^2 + \\ + \left(\frac{h_{01}}{2\sqrt{K_1}} - \sqrt{K_1}\Gamma_1\right)^2 + \left(\frac{h_{02}}{2\sqrt{K_2}} - \sqrt{K_2}\Gamma_2\right)^2 + \left(\frac{h_{03}}{2\sqrt{K_3}} - \sqrt{K_3}\Gamma_3\right)^2 \geq 0.\end{gathered} \tag{1.79}$$

Опять вспоминаем, что вектор $\mathbf{\Gamma}$ произволен. Примем следующие значения проекций

$$\Gamma_1 = \frac{h_{01}}{2K_1}, \qquad \Gamma_2 = \frac{h_{02}}{2K_2}, \qquad \Gamma_3 = \frac{h_{03}}{2K_3}.$$

Тогда все разности в скобках обратятся в нуль и неравенство (1.79) примет следующий вид

$$-T\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} - \left(\frac{h_{01}}{2\sqrt{K_1}}\right)^2 - \left(\frac{h_{02}}{2\sqrt{K_2}}\right)^2 - \left(\frac{h_{03}}{2\sqrt{K_3}}\right)^2 \ge 0.$$

Учитывая теперь неравенство (1.68), приходим к следующему ограничению, накладываемому на вектор $\mathbf{h}_0$

$$\left(\frac{h_{01}}{2\sqrt{K_1}}\right)^2 + \left(\frac{h_{02}}{2\sqrt{K_2}}\right)^2 + \left(\frac{h_{03}}{2\sqrt{K_3}}\right)^2 \le T\rho\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|. \tag{1.80}$$

В том случае, если материал не стареет, правая часть неравенства (1.80) обращается в нуль. Слева же стоит существенно положительная величина при $\mathbf{h}_0 \ne 0.$ Так что, неравенство выполняется только при $\mathbf{h}_0 = 0,$ и мы приходим к определяющему уравнению

$$\mathbf{h} = -\mathbf{K}\cdot\mathbf{\Gamma},$$

которое совпадает с (1.52).

Обратимся теперь к уравнению первого закона термодинамики. Для неподвижного теплопроводящего материала оно имеет вид (1.60). Учитывая два первых равенства в (1.65), получим

$$S = -\frac{\partial\psi}{\partial T}, \quad \dot S = -\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\dot T - \frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial T}.$$

Подставив эти выражения в (1.60), придем к следующему уравнению первого закона термодинамики

$$\rho\left(-T\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\right)\dot T - \rho T\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial T} = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial t} + b - \nabla\cdot\mathbf{h}. \tag{1.81}$$

В случае нестареющего материала это уравнение принимает вид (1.59), (1.60)

$$\rho\left(-T\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2}\right)\dot T = b - \nabla\cdot\mathbf{h}.$$

В нем мы узнаем уравнение теплопроводности, причем коэффициент при $\dot{T}$ называется удельной теплоемкостью и обозначается C, так что имеем

$$C(T,t) = -T\frac{\partial^2\psi(T,t)}{\partial T^2}.$$

Это удельная теплоемкость в момент времени t. Из этого уравнения определяем первую производную ψ. Имеем

$$-\frac{\partial\psi}{\partial T} = \int_{T^*}^{T}\frac{1}{p}C(p,t)\,dp + A(t). \tag{1.82}$$

Здесь появилась в качестве постоянной интегрирования произвольная функция времени. Чтобы ее определить, вспомним, что (1.82) представляет одновременно и плотность внутренней энтропии S. Но по третьему закону термодинамики она должна стремиться к нулю при стремлении температуры к нулю. Переходя к пределу $T \to 0$ в (1.82), получаем уравнение

$$\int_{T^*}^{0}\frac{1}{p}C(p,t)\,dp + A(t) = 0,$$

из которого находим $A(t)$

$$A(t) = -\int_{T^*}^{0}\frac{1}{p}C(p,t)\,dp = \int_{0}^{T^*}\frac{1}{p}C(p,t)\,dp.$$

Подставив это выражение в (1.82), найдем представление первой производной функции ψ и, одновременно, представление плотности внутренней энтропии

$$S = -\frac{\partial\psi}{\partial T} = \int_{0}^{T}\frac{1}{p}C(p,t)\,dp. \tag{1.83}$$

Проинтегрируем еще один раз. Получим

$$-\psi = \int_{0}^{T}dq\int_{0}^{q}\frac{1}{p}C(p,t)\,dp + B(t), \tag{1.84}$$

где $B(t)$ — произвольная функция времени.

Вместе с тем, представляется очевидным тот факт, что свободная энергия определяется с точностью до постоянной величины. Говоря точнее, она может отсчитываться от произвольного, но постоянного уровня. Прекрасным уровнем является значение ψ при стремлении абсолютной температуры к абсолютному нулю. Осуществив предельный переход при $T \to 0$ в (1.84), получим

$$\lim_{T\to 0}(-\psi) = B(t).$$

Этот результат является достаточным основанием для того, чтобы принять предположение о том, что функция $B(t)$ является постоянной величиной, т.е.

$$B(t) = B_0.$$

Итак, имеем

$$-\psi = \int_0^T dq \int_0^q \frac{1}{p} C(p,t)\,dp + B_0.$$

Чтобы избавиться от двойного интеграла, проинтегрируем полученное по частям. Придем к следующему результату

$$-\psi = T\int_0^T \frac{1}{p} C(p,t)\,dp - \int_0^T C(p,t)\,dp + B_0. \tag{1.85}$$

С помощью этого результата легко вычислить частную производную от ψ по времени, входящую в правую часть уравнения теплопроводности (1.81). Результат дифференцирования интегралов по параметру t таков

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = T\int_0^T \frac{1}{p}\frac{\partial C(p,t)}{\partial t}\,dp - \int_0^T \frac{\partial C(p,t)}{\partial t}\,dp. \tag{1.86}$$

А теперь с помощью (1.85) вычислим смешанную частную производную по t и T. Результат этого вычисления имеет вид

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial t} = \int_0^T \frac{1}{p}\frac{\partial C(p,t)}{\partial t}\,dp. \tag{1.87}$$

Подставив теперь (1.83), (1.86) и (1.87) в уравнение теплопроводности (1.81), получим следующее уравнение

$$\rho C(T,t)\dot{T} = -\rho\int_0^T \frac{\partial C(p,t)}{\partial t}\,dp + b - \nabla\cdot\mathbf{h}. \tag{1.88}$$

Оно замечательно тем, что вовсе не содержит функцию Гельмгольца ψ — плотность свободной энергии. Вместо этого оно содержит удельную теплоемкость $C(T,t)$, как функцию от температуры и времени. При проведении калориметрических измерений уравнение (1.88) может быть использовано для экспериментального определения теплоемкости, как функции двух аргументов — температуры T и времени t. После этого свободную энергию можно найти по формуле (1.85).

1.6. Пример 3. Идеальный теплопроводящий газ

В прошлых примерах мы рассматривали неподвижный, а значит, и недеформируемый материал. Идеальный газ — деформируемый материал. Так что, здесь нужно разобраться с возникающими движениями и напряжениями. Начнем с последних. Известно, что в идеальном газе так же, как и в жидкости действует закон Паскаля. Формальная запись закона Паскаля такова

$$\boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{n}. \tag{1.89}$$

Эта запись означает, что на произвольно выделенной площадке в деформируемом теле вектор напряжения направлен строго по нормали к этой площадке. Это значит, что на такой типичной площадке отсутствуют касательные напряжения, и действует только нормальное напряжение

$$\sigma = -p,$$

причем p представляет собой давление.

С другой стороны, известно, что вектор напряжения представляется в общем виде формулой Коши (2.45) из [6]

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Приравняем последнее выражение представлению вектора напряжения по закону Паскаля (1.89). Получим уравнение для определения тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{n}$$

или

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n}. \tag{1.90}$$

Следует вспомнить, что закон Паскаля выполняется для нормали к рассматриваемой произвольной площадке. Итак, уравнение (1.90) должно выполняться для произвольной площадки. Каким же должен быть тензор напряжений? Достаточно принять его шаровым

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{E}, \tag{1.91}$$

и оно выполнится. Действительно, левая часть (1.90) окажется равной

$$-p\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = -p\mathbf{n},$$

что в точности равно правой.

Мы убедились только в достаточности (1.91). Чтобы убедиться и в его необходимости, посмотрим на уравнение (1.90) с другой точки зрения. Уравнение (1.90) с точностью до обозначений совпадает с уравнением (1.115) из [7]

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}, \tag{1.92}$$

которое служит для определения главных направлений и главных значений тензора напряжений.

Известно, что у всякого симметричного тензора, в том числе и у $\boldsymbol{\sigma}$, таких направлений три:

$$\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{e}_{(3)}.$$

Известно также, что они ортонормированны (см. раздел 2.10 в [6]) и что им соответствуют три главных напряжения

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3.$$

Последние определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{(1)} &= \sigma_1\mathbf{e}_{(1)}, \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{(2)} &= \sigma_2\mathbf{e}_{(2)}, \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{(3)} &= \sigma_3\mathbf{e}_{(3)}. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Воспользуемся теперь представлением тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ в главном базисе (2.97) из [6]

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_n\mathbf{e}_{(n)}\mathbf{e}_{(n)} = \sigma_1\mathbf{e}_{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + \sigma_2\mathbf{e}_{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + \sigma_3\mathbf{e}_{(3)}\mathbf{e}_{(3)}. \quad \left(\sum_n\right) \tag{1.94}$$

Наконец, сравнивая (1.90) с (1.92) и принимая в качестве $\mathbf{n}$ главные направления $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$, получим равенства

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{(1)} &= -p\mathbf{e}_{(1)}, \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{(2)} &= -p\mathbf{e}_{(2)}, \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_{(3)} &= -p\mathbf{e}_{(3)}. \end{aligned} \tag{1.95}$$

Сравнивая их с (1.93), находим следующие главные напряжения для $\boldsymbol{\sigma}$

$$\sigma_1 = -p, \qquad \sigma_2 = -p, \qquad \sigma_3 = -p.$$

Внося их в (1.94), убедимся, что тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ является шаровым

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\left(\mathbf{e}_{(n)}\mathbf{e}_{(n)}\right) = -p\mathbf{E}.$$

Таким образом, выражение (1.91) оказалось не только достаточным, но и необходимым, чтобы быть решением уравнения (1.90).

Замечание 1.2. На первый взгляд представляется странным, с математической точки зрения, как мы из одного векторного уравнения (1.90) определили тензор. Векторное уравнение — это всего три скалярных уравнения для проекций. Конечно, представляется парадоксальным, как мы умудрились из трех уравнений вычислить все девять координат тензора напряжений. Ключ к разгадке этого парадокса состоит в том, что уравнение (1.90) должно быть записано не для одной какой-нибудь нормали, а для всех нормалей. Фактически за (1.90) стоит бесконечное количество уравнений с различными нормалями. Мы в своем рассуждении записали его всего для трех нормалей — $\mathbf{e}_{(1)}$, $\mathbf{e}_{(2)}$, $\mathbf{e}_{(3)}$. Это векторные уравнения (1.95). Так что, фактически из трех векторных уравнений или девяти уравнений в проекциях мы смогли найти все девять координат тензора напряжений. Конечно, в процессе рассуждений мы использовали также симметрию тензора напряжений. Только в этом случае справедливыми оказываются все наши построения, основанные на приведении тензора напряжений к главному базису.

Далее, известно, что в идеальном газе давление определяется знаменитым уравнением Менделеева – Клапейрона, т.е. по формуле

$$p = \frac{\rho R T}{\mu}, \tag{1.96}$$

где ρ — плотность газа, R — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса, а T — как всегда, абсолютная температура.

Наконец, подставив давление по (1.96) в (1.91) получим представление тензора напряжений для идеального газа

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\rho R T}{\mu}\mathbf{E}. \tag{1.97}$$

Какие определяющие параметры входят в это определяющее уравнение? Сразу видно, что входит температура. А что еще? Чтобы понять ответ на поставленный вопрос, вспомним закон сохранения массы (2.8) из [6]

$$\rho = \rho_0 \sqrt{|\mathbf{g}|} = \frac{\rho_0}{\sqrt{|\mathbf{F}|}}. \tag{1.98}$$

Так что, если мы используем набор определяющих параметров (1.11), то в выражении плотности (1.98) мы встречаем меру деформации Альманси, а если набор параметров (1.12), то меру деформации Фингера. Однако в (1.98) не входят полные тензоры $\mathbf{g}$ или $\mathbf{F}$, а только их определители. Так что, в задаче о газе именно эти определители можно принять в качестве определяющих параметров. Но можно поступить еще проще и принять плотность в качестве определяющего параметра. Больше никаких определяющих параметров не входит в (1.97).

Перейдем теперь к вектору теплового потока $\mathbf{h}$. Возьмем его в уже испытанной и простой форме (1.51)

$$\mathbf{h} = -\kappa(T)\boldsymbol{\Gamma}. \tag{1.99}$$

Здесь появился еще один известный определяющий параметр, а именно, градиент температуры $\boldsymbol{\Gamma}$.

Положим, наконец, что плотность свободной энергии ψ и плотность внутренней энтропии S являются функциями от появившихся в проблеме об идеальном газе определяющих параметров, т.е. T, $\boldsymbol{\Gamma}$ и ρ.

Итак, предполагаем, что определяющие уравнения идеального теплопроводящего газа имеют вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -\dfrac{\rho R T}{\mu}\mathbf{E}, \\ \mathbf{h} = -\kappa\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = \psi(T, \boldsymbol{\Gamma}, \rho), \\ S = S(T, \boldsymbol{\Gamma}, \rho). \end{cases} \tag{1.100}$$

Первые два уравнения записаны нами в полной форме на основе уже имеющегося опыта, тогда как вторые — только в предположительной форме. Что же нужно ждать от последующего анализа? Во-первых, заранее неясно подтвердит ли этот анализ первые два уравнения, а во-вторых, мы предполагаем получить явные выражения второй группы определяющих уравнений, согласованные с первыми двумя.

Приступим к анализу. Нам предстоит выявить те ограничения, которые наложит на уравнения (1.100) универсальное диссипативное неравенство (1.29)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} - \frac{1}{T}\mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \tag{1.101}$$

Вычислим входящее сюда первое слагаемое. Для этого подставим в него представление $\boldsymbol{\sigma}$ по (1.100), в результате чего получим

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \mathbf{D} = -\frac{\rho RT}{\mu}\mathbf{E} \cdot\cdot \mathbf{D}.$$

Чтобы продвинуться дальше, подставим сюда выражение тензора скоростей деформации $\mathbf{D}$ по (1.83) из [6]

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \mathbf{D} = -\frac{\rho RT}{\mu}\frac{1}{2}\Big(\mathbf{E} \cdot\cdot \big(\nabla \mathbf{v}\big) + \mathbf{E} \cdot\cdot \big(\mathbf{v}\nabla\big)\Big).$$

При вычислении слагаемых, входящих в скобку, используем формулы (1.37) из [7], что дает

$$\mathbf{E} \cdot\cdot \big(\nabla \mathbf{v}\big) = \big(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}\big) \cdot \nabla = \mathbf{v} \cdot \nabla = \nabla \cdot \mathbf{v},$$
$$\mathbf{E} \cdot\cdot \big(\mathbf{v}\nabla\big) = \nabla \cdot \big(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\big) = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

В результате находим

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \mathbf{D} = -\frac{\rho RT}{\mu}\nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Учитывая, наконец, закон сохранения массы в форме (2.14) из [6] находим

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\dot{\rho}}{\rho}.$$

Использование этой формулы дает следующий результат проводимых вычислений

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \mathbf{D} = \frac{RT}{\mu}\dot{\rho}. \tag{1.102}$$

Вычислим теперь производную свободной энергии, входящую во второе слагаемое

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\dot{\rho}. \tag{1.103}$$

Подстановка выражений (1.102) и (1.103) в (1.101) дает следующее представление универсального диссипативного неравенства для рассматриваемой задачи

$$\left(\frac{RT}{\mu}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\dot{\rho}-\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial T}+S\right)\dot{T}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{\Gamma}}\cdot\dot{\mathbf{\Gamma}}+\frac{\kappa}{T}\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{\Gamma}\geq 0. \qquad (1.104)$$

Опять можем воспользоваться теоремой 1.1. В соответствии с ней все коэффициенты при $\dot{\rho}$, $\dot{T}$, $\dot{\mathbf{\Gamma}}$, входящих линейно, следует обратить в ноль, а свободный член сделать неотрицательным. Это приводит к следующим соотношениям

$$\begin{aligned}&\frac{RT}{\mu}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=0,\\&\frac{\partial\psi}{\partial T}+S=0,\\&\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{\Gamma}}=0,\\&\kappa\geq 0.\end{aligned} \qquad (1.105)$$

Третье требование (1.105) дает

$$\psi=\psi(T,\rho). \qquad (1.106)$$

Первое требование (1.105) приводит к уравнению

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{RT}{\mu\rho}.$$

Его интегрирование приводит, с учетом (1.106), к следующему представлению свободной энергии

$$\psi(T,\rho)=\frac{RT}{\mu}\ln\frac{\rho}{\rho_0}+f(T), \qquad (1.107)$$

где ρ_0 — подходящее значение плотности газа, например, в начальный момент времени, а $f(T)$ — пока произвольная функция температуры.

Наконец, из второго соотношения (1.105) находим плотность внутренней энтропии

$$S(T,\rho)=-\frac{\partial\psi}{\partial T}=-\frac{R}{\mu}\ln\frac{\rho}{\rho_0}-f'(T). \qquad (1.108)$$

Последнее неравенство (1.105) представляет рациональное требование неотрицательности коэффициента теплопроводности. Последнее означает, что неравенство Фурье (1.46) выполняется, т.е.

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{\Gamma} = -\kappa \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma} \leq 0.$$

Каков же результат проделанных вычислений? Предложенные уравнения (1.100) удовлетворяют универсальному диссипативному неравенству, причем обнаружено уточнение: плотность свободной энергии и плотность внутренней энтропии не зависят от градиента температуры. Более того получены явные выражения названных плотностей. Некоторый интерес представляет знание плотности внутренней энергии U. Ее следует определить из уравнения (3.52) из [6]. Результат вычислений таков

$$U = \psi + ST = f(T) - Tf'(T) = U(T)!$$

Этот попутный результат вызывает неподдельное восхищение! Что же здесь вызывает восхищение? Восхищает то, что чисто теоретическим путем показано, что плотность внутренней энергии зависит от температуры и не зависит от плотности ρ. Самое важное, конечно, что этот факт находиться в полном согласии с физическими представлениями и экспериментами.

Некоторую неудовлетворенность оставляет тот факт, что неизвестная пока функция $f(T)$ остается неопределенной. Чтобы определить ее составим уравнение первого закона термодинамики (3.58) из [6]

$$\rho T\dot{S} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} + b - \nabla \cdot \mathbf{h}. \qquad (1.109)$$

Входящие в него величины вычисляем по уравнениям (1.102), (1.103), (1.107) и (1.108). Следует иметь в виду при этих вычислениях, что первые три слагаемых правой части представляют диссипативную функцию (3.54) из [6]. Но именно эти же слагаемые входят и в диссипативное неравенство в соответствии с (1.29). Но если проследить за вычислениями, связанными с составлением диссипативного неравенства (1.104), именно они содержат линейно входящие скорости изменения ρ, T и $\mathbf{\Gamma}$. В соответствии с (1.105) вся эта сумма обращается в нуль. В результате уравнение первого закона термодинамики (1.109) принимает вид

$$\rho\left(-Tf''(T)\right)\dot{T} - \frac{\rho RT}{\mu}\frac{\dot{\rho}}{\rho} = b + \nabla \cdot \left(\kappa(T)\mathbf{\Gamma}\right). \qquad (1.110)$$

Если положить $\dot{\rho}=0,$ то уравнение (1.110) примет вид классического уравнения теплопроводности

$$\rho C\dot{T}=b+\nabla\cdot\left(\kappa\left(T\right)\mathbf{\Gamma}\right), \tag{1.111}$$

в котором введено обозначение

$$C=-Tf''\left(T\right)=C\left(T\right). \tag{1.112}$$

В уравнении (1.111) величина C занимает место теплоемкости. Но уравнение (1.111) имеет место только при постоянной плотности. Так что, C следует называть удельной теплоемкостью при постоянной плотности. В теории газов она называется удельной теплоемкостью газа при постоянном объеме. Из уравнения (1.112) следует, что последняя зависит только от температуры и не зависит ни от плотности газа, ни от градиента температуры. Оказалось, что и этот теоретический результат хорошо соответствует экспериментальным данным.

Посмотрим теперь на уравнение (1.112), как на уравнение для определения функции f по значениям теплоемкости.

Интегрируя один раз, получим

$$S=-\frac{\partial\psi}{\partial T}=-\frac{R}{\mu}\ln\frac{\rho}{\rho_0}+\int\limits_{T^*}^{T}\frac{C\left(T\right)}{T}dT+A, \tag{1.113}$$

где T^* — некоторая температура, а A — постоянная интегрирования.

К сожалению, нам не удастся определить постоянную A, используя третий закон термодинамики. Причина в том, что в (1.113) нельзя совершить предельный переход при $T\to 0.$ Причина в том, что уравнение Менделеева – Клапейрона, а значит и все, полученное из него, не может использоваться при очень низких температурах просто потому, что при уменьшении температуры газ сначала переходит в жидкость, а уже затем в твердое тело. Мы не рассматриваем эти фазовые переходы, ибо это увело бы нас слишком далеко в физику глубокого холода. Как же отнестись к полученным выше результатам? Они отражают реальность при не слишком низких температурах. Кроме того, не следует злоупотреблять ими и при очень высоких температурах, когда вещество переходит в плазму. Таким образом, температура T^* и постоянная A остаются неопределенными в рамках проведенного анализа.

Однако вернемся назад и подставим (1.112) в (1.110). Получим уравнение

$$\rho C\dot{T} - \frac{\rho RT}{\mu}\frac{\dot{\rho}}{\rho} = b + \nabla \cdot \left(\kappa\left(T\right)\mathbf{\Gamma}\right) \tag{1.114}$$

или

$$\rho C\dot{T} - p\frac{\dot{\rho}}{\rho} = b + \nabla \cdot \left(\kappa\left(T\right)\mathbf{\Gamma}\right). \tag{1.115}$$

Это уравнение теплопроводности, осложненное слагаемым, учитывающим сжимаемость газа и, связанные с этим, разогрев или охлаждение.

При слишком быстрых процессах в уравнениях (1.114) или (1.115) можно пренебречь правыми частями. И тогда увидим, что уравнение примет следующую приближенную версию

$$\rho C\dot{T} - p\frac{\dot{\rho}}{\rho} \approx 0.$$

Умножая на dt, получим связь приращений плотности и температуры при изоэнтропических процессах

$$\rho CdT = \frac{p}{\rho}d\rho.$$

Отсюда видно, что небольшое сжатие, т.е. повышение плотности, приводит к разогреву газа, т.е. повышению его температуры. Эксперименты подтверждают этот факт, полученный чисто теоретическим путем и активным использованием второго и первого законов термодинамики.

Рассмотрим опять термомеханический процесс в более широком интервале плотностей и температур, но вообще без подвода тепловой энергии непосредственно в объем и за счет теплопроводности через поверхность малого объема газа. Опять следует обратить в нуль правую часть уравнения теплопроводности (1.111)

$$\rho C\dot{S} = b + \nabla \cdot \left(\kappa\left(T\right)\mathbf{\Gamma}\right) = 0.$$

Интеграл этого уравнения

$$S = const$$

указывает, что плотность внутренней энтропии в этом процессе остается постоянной. Используя выражение энтропии (1.113), будем иметь

$$S = -\frac{R}{\mu}\ln\frac{\rho}{\rho_0} + \int_{T^*}^{T}\frac{C(T)}{T}dT + A = const.$$

Запишем теперь это уравнение для двух состояний ρ_1, T_1 и ρ_2, T_2. Получим уравнение

$$-\frac{R}{\mu}\ln\frac{\rho_1}{\rho_0} + \int_{T^*}^{T_1}\frac{C(T)}{T}dT + A = -\frac{R}{\mu}\ln\frac{\rho_2}{\rho_0} + \int_{T^*}^{T_2}\frac{C(T)}{T}dT + A,$$

которое после элементарных переносов некоторых слагаемых из одной части равенства в другую преобразуется к виду

$$\ln\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\mu}{R}\int_{T_1}^{T_2}\frac{C(T)}{T}dT.$$

Переходя от логарифмов к экспонентам, получим

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \exp\left(\frac{\mu}{R}\int_{T_1}^{T_2}\frac{C(T)}{T}dT\right).$$

Оказалось, что и в широких диапазонах температур и плотностей при адиабатическом сжатии нагрев $(T_2 > T_1)$ ведет к увеличению плотности, или иначе увеличение плотности $(\rho_2 > \rho_1)$ ведет к разогреву газа $(T_2 > T_1)$, а уменьшение плотности $(\rho_2 < \rho_1)$ ведет к охлаждению газа $(T_2 < T_1)$. Так оно и есть на самом деле!

1.7. Определяющее уравнение вязкой жидкости

Рассмотрим еще одно популярное определяющее уравнение.

В университетских и вузовских курсах физики рассматриваются вязкие жидкости. Другое их название — ньютоновские жидкости. Течение таких жидкостей имеет специфическую особенность: касательные напряжения, возникающие при ее течении тем больше, чем больше градиент скорости в направлении, перпендикулярном скорости потока.

Эту качественную особенность течения следует перевести на язык механики деформируемых тел. Какая из переменных этой науки содержит в своем составе градиент скорости? Ответ прост — тензор скоростей деформаций. Его и следует связать с тензором напряжений в механике ньютоновской вязкой жидкости. Руководствуясь этим соображением, записываем следующее определяющее уравнение вязкой жидкости

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \mathrm{I}_1 \mathbf{E} + 2\eta \mathbf{d}, \tag{1.116}$$

где I_1 — первый инвариант тензора скоростей деформаций

$$\mathrm{I}_1 = \mathbf{E} \cdot\cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \tag{1.117}$$

а $\mathbf{d}$ — девиатор тензора скоростей деформаций

$$\mathbf{d} = Dev\mathbf{D} = \mathbf{D} - \frac{\mathrm{I}_1}{3}\mathbf{E}. \tag{1.118}$$

Это простейшее линейное уравнение.

Выясним механический смысл коэффициентов λ и η. Для этого рассмотрим два разных вида течения. Допустим, сначала, что $\mathbf{d} = 0$, а $\mathrm{I}_1 \neq 0$. Для вычисления I_1 используем дифференциальное уравнение закона сохранения массы (2.14) из [6]

$$\dot{\rho} + \rho\left(\nabla \cdot \mathbf{v}\right) = 0.$$

В результате получим

$$\boldsymbol{\sigma} = -\lambda \frac{\dot{\rho}}{\rho}\mathbf{E}.$$

Среднее нормальное напряжение σ в таком течении равно следующей величине

$$\sigma = -\lambda \frac{\dot{\rho}}{\rho}. \tag{1.119}$$

Это уравнение связывает среднее нормальное напряжение σ со скоростью изменения плотности $\dot{\rho}$. Чем больше величина $\dot{\rho}$, тем больше величина среднего нормального напряжения. Поэтому коэффициент λ называется объемной вязкостью.

Рассмотрим теперь другое движение. Пусть $\mathrm{I}_1 = 0$, а $\mathbf{d} \neq 0$. В этом случае тензор напряжений имеет следующее выражение

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta \mathbf{d}. \tag{1.120}$$

Пусть тензор скоростей деформаций имеет представление

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1\right)D_{12}.$$

Это некоторое движение со сдвигом. Очевидно, что I_1 для него равен нулю, и тогда получим

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} = \left(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1\right)D_{12}. \tag{1.121}$$

Подставив это выражение в (1.120), получим следующее представление тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1\right)2\eta D_{12}.$$

Отсюда видно, что тензор напряжений в рассмотренном движении имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1\right)\sigma_{12},$$

причем касательное напряжение σ_{12} имеет следующее выражение

$$\sigma_{12} = 2\eta D_{12}.$$

Чем больше скорость сдвига, тем больше и касательное напряжение. Поэтому коэффициент η называется сдвиговой вязкостью.

Таким образом, установлено, что коэффициенты λ и η — это вязкости: объемная и сдвиговая.

Снова обратимся к определяющему уравнению (1.116) и дополним его недостающими определяющими уравнениями для $\mathbf{h}$, ψ и S. Приходим к следующим гипотетическим определяющим уравнениям ньютоновской вязкой жидкости

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \lambda\left(T\right)\mathrm{I}_1\,\mathbf{E} + 2\eta\left(T\right)\mathbf{d}, \\ \mathbf{h} = -\kappa\left(T\right)\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = \psi\left(T,\boldsymbol{\Gamma}\right), \\ S = S\left(T,\boldsymbol{\Gamma}\right). \end{cases}$$

Подставим все эти выражения в универсальное диссипативное неравенство (1.29). Получим

$$\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial T} + S\right)\dot{T} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\Gamma}}\cdot\dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \lambda\,\mathrm{I}_1\,\mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{D} + 2\eta\mathbf{d}\cdot\cdot\mathbf{D} + \kappa\left(T\right)\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma} \geq 0$$

или

$$\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial T} + S\right)\dot{T} + \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\Gamma}}\cdot\dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \lambda\left(T\right)\mathrm{I}_1^2 + 2\eta\left(T\right)\mathbf{d}\cdot\cdot\mathbf{d} + \kappa\left(T\right)\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\Gamma} \geq 0.$$

Здесь $\dot{T}$ и $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ входят линейно. Опять используем теорему о линейных неравенствах из раздела 1.4 этого учебного пособия. Получим следующие уравнения и неравенства

$$\frac{\partial\psi}{\partial T}+S=0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{\Gamma}}=0, \tag{1.122}$$
$$\lambda(T)\mathrm{I}_1^2+2\eta(T)\mathbf{d}\cdot\cdot\mathbf{d}+\kappa(T)\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{\Gamma}\geq 0.$$

Из второго уравнения находим

$$\psi=\psi(T).$$

Тогда из первого получаем

$$S=-\frac{\partial\psi(T)}{\partial T}=S(T).$$

Оказалось, что ни ψ, ни S не зависят от градиента температуры $\mathbf{\Gamma}$.

Обратимся теперь к третьей строчке (1.122) — к неравенству

$$\lambda(T)\mathrm{I}_1^2+2\eta(T)\mathbf{d}\cdot\cdot\mathbf{d}+\kappa(T)\mathbf{\Gamma}\cdot\mathbf{\Gamma}\geq 0. \tag{1.123}$$

В начале этого раздела мы рассмотрели два независимых друг от друга течения: $\mathrm{I}_1\neq 0$, $\mathbf{d}=0$ и $\mathrm{I}_1=0$, $\mathbf{d}\neq 0$. Это значит, что I_1 и $\mathbf{d}$ — независимые переменные квадратичной формы (1.123). Третья независимая переменная — $\mathbf{\Gamma}$ — не зависит от I_1 и $\mathbf{d}$. Их независимость означает, что каждая из них может принять произвольное значение. Рассмотрим три ситуации.

1. $\mathbf{\Gamma}=0,\quad \mathbf{d}=0,\quad \mathrm{I}_1\neq 0.$

Тогда условием выполнения (1.123) будет

$$\lambda(T)\geq 0.$$

2. $\mathbf{\Gamma}=0,\quad \mathrm{I}_1=0,\quad \mathbf{d}\neq 0.$

Тогда получим второе условие

$$\eta(T)\geq 0.$$

3. $\mathrm{I}_1=0,\quad \mathbf{d}=0,\quad \mathbf{\Gamma}\neq 0.$

В этом случае приходим еще к одному неравенству

$$\kappa(T)\geq 0.$$

Итак, мы получили три условия

$$\lambda(T)\geq 0,\qquad \eta(T)\geq 0,\qquad \kappa(T)\geq 0. \tag{1.124}$$

Однако мы получили их не безусловно, а только при трех комбинациях значений I_1, $\mathbf{d}$, $\mathbf{\Gamma}$. Но ведь условия (1.124) вообще не зависят от этих величин! Это значит, что неравенства (1.124), строго говоря, являются необходимыми и достаточными условиями выполнения неравенства (1.123), т.е. должны иметь место всегда — при любых комбинациях I_1, $\mathbf{d}$, $\mathbf{\Gamma}$.

Итак, мы получили условия: вязкости никогда не могут быть отрицательными; коэффициент теплопроводности никогда не может быть отрицательным. Эти условия подтверждаются многочисленными экспериментами с вязкими жидкостями.

Еще одно заключение также является следствием (1.123). Всякие термомеханические процессы необратимы.

1.8. Определяющие уравнения линейно-упругого материала

Здесь речь пойдет о законе Гука (1.18). Это, пожалуй, наиболее популярное среди инженеров определяющее уравнение. Действительно, огромная масса инженеров изучала и изучает сейчас «Сопротивление материалов» — науку о поведении конструкционных материалов при действии на них различных нагрузок. Это уравнение занимает важное почетное место в «Сопротивлении материалов». Воспроизвожу это уравнение из (1.18)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{rr} - \nu\left(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\right)\right), && \varepsilon_{r\varphi} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{2G},\\
&\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\left(\sigma_{zz} + \sigma_{rr}\right)\right), && \varepsilon_{\varphi z} = \frac{\sigma_{\varphi z}}{2G},\\
&\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\right)\right), && \varepsilon_{zr} = \frac{\sigma_{zr}}{2G}.
\end{aligned} \qquad (1.125)$$

Обычно к нему добавляется условие

$$E = 2G\left(1+\nu\right), \qquad (1.126)$$

отражающее тот факт, что материал является изотропным. Уравнение (1.125) записано в подробной координатной форме, да и еще, в цилиндрической системе координат. Как известно, координатная форма незаменима при конкретной работе, но чрезвычайно неудобна при рассмотрениях общего характера. Поэтому необходим переход к записи в прямом тензорном исчислении. Кроме того, оно записано в форме, непривычной для теории определяющих уравнений. В нем деформации выражаются как функции напряжений, а в теории определяющих уравнений все наоборот: напряжения выражаются как функции от деформаций.

Таким образом, нам предстоит сделать два дела: обратить зависимость (1.125) и представить результат в тензорной форме. Сделаем это совместно. Для этого сложим все деформации левого столбца в (1.125) и, тем самым, найдем объемную деформацию θ

$$\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\right).$$

Отсюда находим с учетом (1.126)

$$\theta = \frac{3(1-2\nu)}{2G(1+\nu)}\sigma = \frac{1}{k}\sigma, \tag{1.127}$$

где введено обозначение

$$k = \frac{3(1-2\nu)}{2G(1+\nu)}\sigma. \tag{1.128}$$

Уравнение (1.127) можно обратить, т.е. написать

$$\sigma = k\theta. \tag{1.129}$$

Из этого последнего равенства видно, что k — это модуль объемного сжатия. Мы специально не пишем, «модуль объемного расширения», чтобы не перепутать с термином «коэффициент объемного расширения» в теории тепловых явлений.

Составим теперь диагональные координаты девиатора тензора деформаций

$$e_{rr} = \varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\theta, \qquad e_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\theta, \qquad e_{zz} = \varepsilon_{zz} - \frac{1}{3}\theta.$$

Проведем дальнейшие подробные вычисления, например, для e_{rr}. Используя (1.125) и (1.127), получим

$$e_{rr} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{rr} - \nu\left(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\right)\right) - \frac{3(1-2\nu)}{2G(1+\nu)}\sigma$$

или

$$e_{rr} = \frac{1}{2G(1+\nu)}\left((1+\nu)\sigma_{rr} - \nu\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\right)\right) - \frac{3(1-2\nu)}{2G(1+\nu)}\sigma.$$

Обнаруживаем 3σ в первой скобке. Объединяя это слагаемое с последним, придем к следующему промежуточному результату

$$e_{rr} = \frac{1}{2G(1+\nu)}\left((1+\nu)\sigma_{rr} - (1+\nu)\sigma\right),$$

и, наконец, к финальному —

$$e_{rr} = \frac{1}{2G}(\sigma_{rr} - \sigma) = \frac{1}{2G}s_{rr}. \tag{1.130}$$

Аналогичные вычисления дают

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2G}s_{\varphi\varphi}, \qquad e_{zz} = \frac{1}{2G}s_{zz}. \tag{1.131}$$

Здесь в правых частях появились диагональные координаты девиатора тензора напряжений

$$s_{rr} = \sigma_{rr} - \sigma, \qquad s_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma, \qquad s_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma.$$

Обращая уравнения (1.130) и (1.131), найдем значения координат тензора **s**

$$s_{rr} = 2Ge_{rr}, \qquad s_{\varphi\varphi} = 2Ge_{\varphi\varphi}, \qquad s_{zz} = 2Ge_{zz}. \tag{1.132}$$

Недиагональные координаты девиатора напряжений найдем из второй группы уравнений (1.125)

$$\begin{aligned} s_{r\varphi} &= \sigma_{r\varphi} = 2G\varepsilon_{r\varphi} = 2Ge_{r\varphi}, \\ s_{\varphi z} &= 2Ge_{\varphi z}, \qquad s_{zr} = 2Ge_{zr}. \end{aligned} \tag{1.133}$$

Объединяя (1.132) и (1.133), придем к следующей формуле связи девиаторов

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}, \qquad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\theta}{3}\mathbf{E}. \tag{1.134}$$

Как известно, тензор определяется по формуле (1.191) из [7]. Так что, имеем по (1.129) и (1.133) следующее представление тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = k\theta\mathbf{E} + 2G\mathbf{e}. \tag{1.135}$$

Между прочим, и здесь проявились преимущества прямого тензорного исчисления над подробным координатным: на написание формулы (1.135) истрачено 9 типографских знака, тогда как на написание (1.125) ушло 84 знака — т.е., почти в 10 раз больше.

Однако, вернемся к своей проблеме. Нам необходимо записать предполагаемые определяющие уравнения, основу которых составляет закон Гука. Первое уравнение мы уже нашли — это (1.135). Добавим к нему другие, которые составим в соответствии со здравым смыслом и имеющимся опытом

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = k\theta\mathbf{E} + 2G\mathbf{e}, \\ \mathbf{h} = -\kappa(T)\boldsymbol{\Gamma}, \\ \psi = \psi(T, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Gamma}), \\ S = S(T, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\Gamma}). \end{cases} \tag{1.136}$$

Теперь следует обратиться к универсальному диссипативному неравенству (1.29). Полагаю, однако, что его следует взять не в полной форме (1.29), а в линеаризованной. Почему? Дело в том, что первое уравнение (1.136) линейно. Скорее всего, оно получено в результате линеаризации некоторого нелинейного уравнения. А что означает линеаризация? Она означает отбрасывание членов более высокого порядка, чем оставленных, т.е. линейных. Это подсказывает, что при линеаризации (1.29) следует отбросить все слагаемые выше первого порядка. Такая линеаризация кинематических величин проведена в [6].

Главный эффект этой линеаризации таков

$$\mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \qquad \rho = \underset{t}{const}. \tag{1.137}$$

С учетом этого неравенство (1.29) принимает вид

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} - \frac{\kappa}{T}\boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \tag{1.138}$$

Производную ψ вычисляем в соответствии с ее предполагаемым написанием (1.136). Рассматривая ψ, как сложную функцию времени, которая зависит от времени только через посредство своих аргументов T, $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$, получаем

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \cdot\cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial T} + S\right)\dot{T} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Gamma}} + \frac{\kappa(T)}{T}\boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0. \tag{1.139}$$

Скорости $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\dot{T}$ и $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$ входят сюда линейно. Поэтому по теореме о линейных неравенствах из раздела 1.4 этого учебного пособия получим следующие необходимые и достаточные условия его выполнения

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0, \\
&\frac{\partial \psi}{\partial T} + S = 0, \\
&\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} = 0, \\
&\kappa(T) \geq 0.
\end{aligned}
\tag{1.140}
$$

Из третьего уравнения находим

$$\psi = \psi(T, \boldsymbol{\varepsilon}), \tag{1.141}$$

а из второго —

$$S = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = S(T, \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Первое уравнение служит для определения свободной энергии

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} = k\theta \mathbf{E} + 2G\mathbf{e}. \tag{1.142}$$

В этом случае диссипативное неравенство принимает упрощенный вид

$$\frac{\kappa(T)}{T} \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0.$$

Отсюда видно, что оно обращается в равенство, если отсутствует теплопроводность, т.е. либо $\boldsymbol{\Gamma} = 0$, либо $\kappa(T) = 0$. В соответствии со сказанным в разделе 1.3 этого учебного пособия, все процессы деформирования в упругом теле при отсутствии теплопроводности являются обратимыми. Обращаю внимание на то, что один и тот же произвольный механический процесс в упругом теле является обратимым, тогда как тот же процесс в вязкой жидкости оказывается необратимым. Это обстоятельство лишний раз демонстрирует тот факт, что отрывать слово «процесс» от слова «в материале» в определении 1.3 ни в коем случае нельзя.

Обратимся снова к (1.142) и попытаемся вычислить свободную энергию ψ. Чтобы сделать это попроще, составим сумму из первых трех слагаемых диссипативного неравенства (1.139). Поскольку в нее входят только слагаемые со скоростями, то по (1.140) эта сумма будет равна нулю, т.е.

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right)\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial T} + S\right)\dot{T} - \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\Gamma}}\cdot\dot{\boldsymbol{\Gamma}} = 0.$$

Преобразуем эту сумму к тому виду, который она имела в (1.138). Придем к следующему уравнению

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} = 0.$$

Подставив сюда выражение σ по (1.142), перенося результат этой подстановки в правую часть, и учитывая разложение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\theta}{3}\mathbf{E} + \mathbf{e},$$

получим

$$\rho\dot{\psi} + \rho S\dot{T} = k\theta\dot{\theta} + 2G\mathbf{e}\cdot\cdot\dot{\mathbf{e}}. \tag{1.143}$$

Теперь уже видно, что лучше конкретизировать выражение свободной энергии и разыскивать ее в эквивалентной форме

$$\psi = \psi\left(T, \theta, \mathbf{e}\right).$$

В соответствии с (1.141) градиент температуры $\boldsymbol{\Gamma}$ сюда не включен. Но если так сделать, то уже легко и угадать такую структуру ψ, чтобы тождественно удовлетворить уравнению (1.143). Она такова

$$\psi = k\frac{\theta^2}{2} + G\mathbf{e}\cdot\cdot\mathbf{e} + f\left(T\right).$$

Тогда дифференцирование дает следующий результат

$$\dot{\psi} = k\theta\dot{\theta} + 2G\mathbf{e}\cdot\cdot\dot{\mathbf{e}} + f'\left(T\right)\dot{T}.$$

Подставив его в (1.143), убеждаемся, что оно действительно тождественно удовлетворяется, если принять условие

$$S = -\frac{\partial\psi}{\partial T} = -f'\left(T\right),$$

как того требует второе условие (1.140).

Что же касается функции $f\left(T\right)$, то ее можно вычислить, если известна теплоемкость по формулам, которые приведены в разделе 1.4. На подробностях не останавливаемся. Итак, и этот последний популярный пример прошел проверку соответствия теории определяющих уравнений.

Мы рассмотрели множество популярных определяющих уравнений. Мы убеждены, что они все хорошо подтверждены давно проведенными и проводимыми сейчас экспериментами.

Мы с радостью отмечаем, что они не противоречат теории определяющих уравнений и, особенно, требованию подчинения универсальному диссипативному неравенству. Это особенно важно, поскольку универсальное диссипативное неравенство — прямое следствие второго закона термодинамики. А ведь формулировок второго закона термодинамики много. И эти факты демонстрируют правильность нашего выбора — выбора неравенства Клаузиуса – Дюгема. Если бы мы выбрали формулировку Клаузиуса – Планка, то мы не получили бы требование на неотрицательность коэффициента теплопроводности!

2. ПРИНЦИП МАТЕРИАЛЬНОЙ ОБЪЕКТИВНОСТИ

2.1. Вводные замечания

В предыдущей главе мы познакомились с таким важным понятием, как определяющие уравнения материала и с теми ограничениями, которые накладывает на них второй закон термодинамики. Мы рассматривали также некоторые конкретные определяющие уравнения, заимствованные из теории теплопроводности, из газовой динамики и сопротивления материалов. Мы убедились в том, что ограничения второго закона термодинамики выполняются. И это хорошо! Правда, мы рассматривали довольно простые движения. Так, при анализе определяющего уравнения теплопроводности движение вообще отсутствовало. В случае газа эффект движения сводился только к изменению удельного объема или, что то же самое изменению плотности. И вот оказывается, что при рассмотрении более сложных движений на форму определяющих уравнений необходимо наложить дополнительные ограничения. Они накладываются специальным принципом — принципом материальной объективности. Другое название этого принципа — принцип материальной независимости от системы отсчета. Ограничения этого принципа оказываются чрезвычайно важными при рассмотрении движений деформируемых тел с вращениями, т.е. таких движений, в описание которых входит тензор поворота окрестности материальной точки $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Во все определяющие уравнения предыдущей главы этот тензор вообще не входил, и поэтому оказалось, что при $\mathbf{B}=\mathbf{E}$ рассмотренные уравнения были приемлемыми. Однако при $\mathbf{B}\neq\mathbf{E}$ некоторые из них нуждаются в существенной коррекции. Ниже мы увидим, что в такой коррекции нуждается даже простейшее уравнение анизотропной теплопроводности (1.52). То же самое относится и к уравнению стареющего материала (1.76).

Рассмотрим более подробно определяющее уравнение (1.52). В главном базисе тензор коэффициентов теплопроводности имеет представление (1.54). Возникает вопрос, что же произойдет, если все движение теплопроводящего тела сводится к одному только повороту?

Здравый смысл подсказывает, что должен поворачиваться и базис $\mathbf{e}_{(n)}$ по закону

$$\mathbf{e}_{(n)} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{(n)0}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{e}_{(n)0}$ — векторный базис тензора $\mathbf{K}$ в начальный момент.

Почему должен поворачиваться этот базис? А потому, что он выражает материальное свойство деформируемого тела хорошо проводить тепло в одном направлении и плохо — в других. Поэтому понятно, что направление хорошей теплопроводности должно поворачиваться вместе с телом, если, конечно, тело не подвергнуто сверхъестественным воздействиям. Подставив (2.1) в (1.54), получим следующее выражение тензора тепловодности $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{(n)0}\right)\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{(l)0}\right) K_{nl} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{B}^T, \tag{2.2}$$

где K_{nl} — коэффициенты теплопроводности, а

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{e}_{(n)0}\mathbf{e}_{(n)0} K_{nl}.$$

Определяющее уравнение анизотропной теплопроводности примет вид

$$\mathbf{h} = -\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{(n)0}\right) \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_{(n)0}\right) K_{nl} \cdot \mathbf{\Gamma}$$

или

$$\mathbf{h} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{\Gamma}. \tag{2.3}$$

Таким образом, тензор коэффициентов теплопроводности $\mathbf{K}$ в уравнении (1.52) не может быть независимым от движения, а точнее, от поворота окрестности всякой материальной точки. Он должен зависеть от тензора поворота $\mathbf{B}$, так как об этом говорит уравнение (2.2).

Уравнение (2.3) — это скорректированное уравнение теплопроводности (1.52).

Возникает вопрос, для чего мы рассмотрели этот простейший пример? Ответ таков, все это сделано для того, чтобы в последующем убедиться в том, что определяющее уравнение (1.52) не удовлетворяет принципу материальной объективности, а уравнение (2.3) — удовлетворяет!

Приведенный пример настолько прост и убедителен, что возникает естественный вопрос, почему мы используем название — принцип материальной объективности, а не закон материальной объективности.

Чтобы понять это допустим, что существует какое-то высшее сверхъестественное воздействие, например, магнитное поле, которое своим действием может сохранить направление наибольшей и наименьшей теплопроводности по отношению к внешнему неподвижному пространству. В этом случае $\mathbf{K}$ будет постоянным тензором, и тогда представление (1.52) окажется вполне пригодным. Именно поэтому используется термин «принцип», а не «закон». Принцип может иногда нарушаться, а закон — никогда.

Кстати, способность внешнего магнитного поля сохранять или изменять механические свойства твердых или жидких тел находит практическое применение в науке о жидких кристаллах.

Итак, мы убеждены в том, что это принцип, а не закон. Однако в механике конструкционных материалов его можно трактовать и как закон.

2.2. Анализ двух движений материального тела, различающихся поступательным движением и поворотом

Рассматриваем два движения одного и того же материального тела.

$$I. \qquad \begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\mathbf{R},t), \\ T &= T(\mathbf{R},t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$II. \qquad \begin{aligned} \mathbf{r}_Q &= \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{r}(\mathbf{R},t), \\ T_Q &= T(\mathbf{R},t). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ — функции одного только времени, причем тензор $\mathbf{Q}$ является тензором поворота или вообще ортогональным тензором.

Первое движение называем основным. В нем, как это принято в кинематике, мы задаем текущее положение $\mathbf{r}$ материальной точки с начальной координатой $\mathbf{R}$, и как это принято в термодинамике, задаем температуру T ее окрестности.

Второе движение называем $\mathbf{Q}$–движением. Оно отличается от первого тем, что та же самая материальная точка $\mathbf{R}$ получает дополнительное перемещение $\mathbf{r}_0(t)$, а ее окрестность — дополнительный поворот, определяемый тензором $\mathbf{Q}(t)$. Таким образом, текущее состояние в $\mathbf{Q}-$движении может быть получено из текущего состояния основного движения поступательным перемещением $\mathbf{r}_0(t)$ и поворотом всего материального тела, как абсолютно твердого, определяемым тензором $\mathbf{Q}(t)$.

Текущие состояния материального тела в обоих движениях показаны на рис. 2.1.

В нижней части этого рисунка изображены орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ неподвижной системы координат, а также вектор текущего положения $\mathbf{r}$ основного движения и, наконец, начало координат — точка o.

В верхней части рис. 2.1 схематически показано текущее положение материального тела в $\mathbf{Q}-$движении. Кроме того, в этой же верхней части рис. 2.1 показано много вспомогательных элементов, позволяющих реконструировать само $\mathbf{Q}-$движение. Так, показано новое начало координат o_Q, расположенное в конце вектора $\mathbf{r}_0(t)$. Кроме того, показаны повернутые базисные векторы $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_1$, $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_3$, и, наконец, повернутый вектор $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}$. Из рисунка видно, что текущее положение в $\mathbf{Q}-$движении определяется суммой

$$\mathbf{r}_Q=\mathbf{r}_0(t)+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r},$$

как должно быть по первой формуле (2.5).

Установим связи между определяющими параметрами основного движения и $\mathbf{Q}-$движения.

Так, совершенно очевидно, что тензор поворота в $\mathbf{Q}-$движении является функцией двух параметров: поворота $\mathbf{B}(\mathbf{R},t)$ в основном движении и последующего за ним поворота $\mathbf{Q}(t)$. Таким образом, имеем

$$\mathbf{B}_Q(\mathbf{R},t)=\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{B}(\mathbf{R},t)$$

или, попросту,

$$\mathbf{B}_Q=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}. \qquad (2.6)$$

Далее, рассмотрим меру деформации Альманси в $\mathbf{Q}-$движении

$$\mathbf{g}_Q=(\nabla\mathbf{R})_Q\cdot(\nabla\mathbf{R})_Q^T. \qquad (2.7)$$

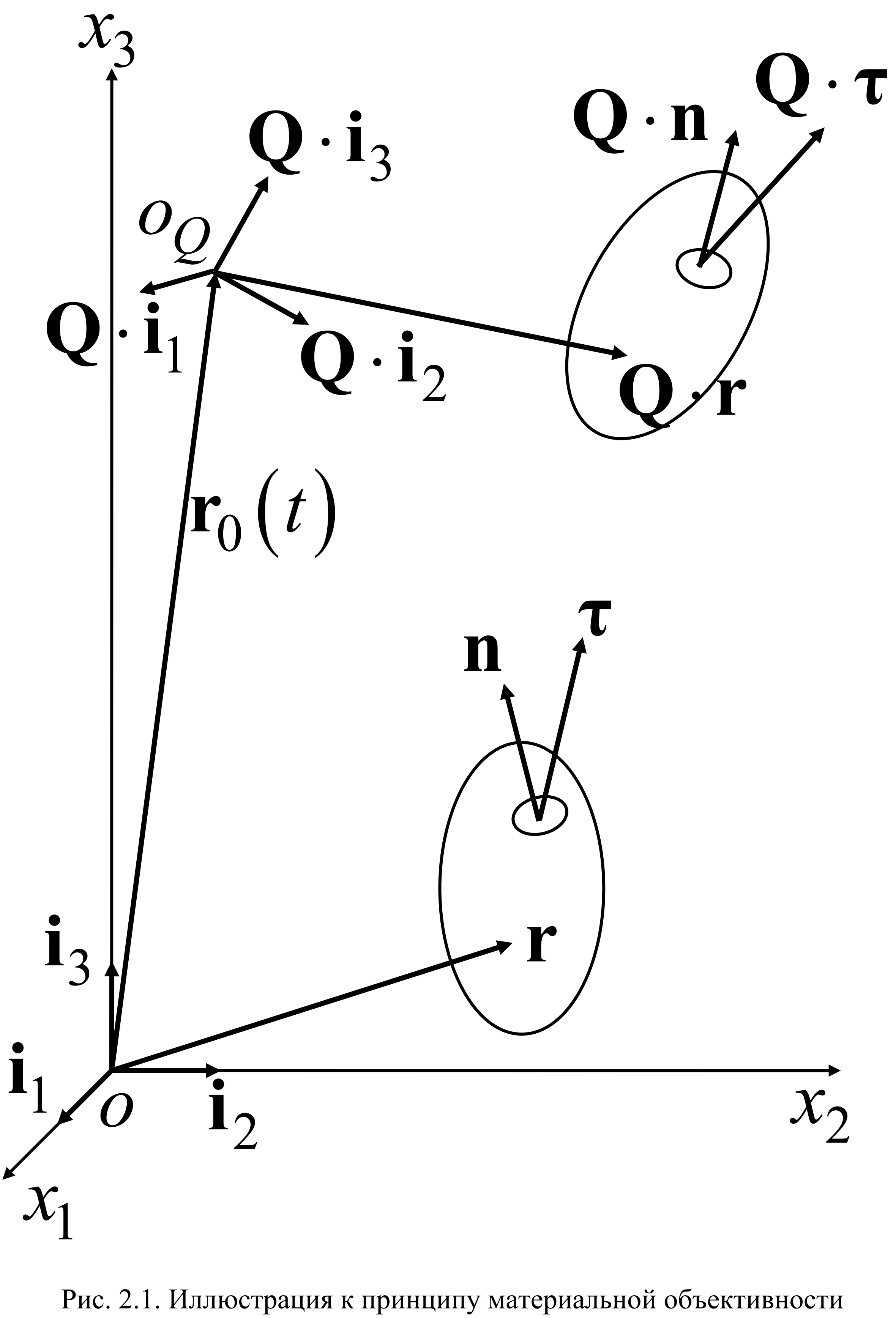

Рис. 2.1. Иллюстрация к принципу материальной объективности

Для того, чтобы продвинуться дальше необходимо вычислить $(\nabla\mathbf{R})_Q$. Имеем

$$(\nabla\mathbf{R})_Q = \nabla_Q \mathbf{R}_Q. \tag{2.8}$$

Возникает первый вопрос: что такое $\mathbf{R}_Q$? Разумеется, это начальное положение некоторой материальной точки M в $\mathbf{Q}$ – движении. Но ведь при написании уравнения $\mathbf{Q}$ – движения в (2.5) мы использовали для этой цели стандартное обозначение $\mathbf{R}$. Так что, имеем

$$\mathbf{R}_Q = \mathbf{R}.$$

Остается напомнить, что вектор $\mathbf{R}$ выражается через текущую координату основного движения по обращенной формуле (2.4)

$$\mathbf{R}_Q = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t).$$

Далее, вектор $\mathbf{r}$ в неподвижной декартовой системе координат имеет представление

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_k x_k, \tag{2.9}$$

причем x_k — декартовы координаты материальной точки M в текущем состоянии тела, а $\mathbf{i}_k$ — неподвижный базис. Следовательно, представление вектора $\mathbf{R}_Q$ можно переписать следующим образом

$$\mathbf{R}_Q = \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3, t). \tag{2.10}$$

Второй вопрос, который возникает в связи с (2.8): что такое оператор Гамильтона ∇_Q? Опять-таки, воспользуемся представлением вектора положения $\mathbf{r}_Q$ в декартовой системе координат

$$\mathbf{r}_Q = \mathbf{i}_l x_{Ql}, \tag{2.11}$$

где x_{Ql} — декартовы координаты вектора текущего состояния в $\mathbf{Q}$ – движении $\mathbf{r}_Q$. Тогда оператор Гамильтона ∇_Q запишется следующим образом

$$\nabla_Q = \mathbf{i}_l \frac{\partial}{\partial x_{Ql}}. \tag{2.12}$$

Подставив (2.10) и (2.12) в (2.8), получим

$$(\nabla\mathbf{R})_Q = \mathbf{i}_l \frac{\partial \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_{Ql}}. \tag{2.13}$$

Напомню, что координаты x_l и x_{Ql} — это разные координаты: первая — это декартова координата материальной точки M в основном движении, а вторая — декартова координата той же точки M, но уже в $\mathbf{Q}-$движении. Разумеется, эти координаты в силу (2.9), (2.11) и (2.5) связаны между собой. Как же вычислить производные, появившиеся в (2.13). Конечно же, по правилу дифференцирования сложной функции. Действуя по этому правилу, найдем

$$(\nabla\mathbf{R})_Q = \mathbf{i}_l \frac{\partial x_k}{\partial x_{Ql}} \frac{\partial \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}.$$

Это выражение можно переписать иначе

$$(\nabla\mathbf{R})_Q = \left(\mathbf{i}_l \frac{\partial \mathbf{i}_s x_s}{\partial x_{Ql}}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_k \frac{\partial \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}\right)$$

или, учитывая (2.9),

$$(\nabla\mathbf{R})_Q = \left(\mathbf{i}_l \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_{Ql}}\right) \cdot \left(\mathbf{i}_k \frac{\partial \mathbf{R}(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_k}\right).$$

Здесь выделилось сразу два оператора Гамильтона: ∇_Q и ∇. Так что, имеем следующий результат

$$(\nabla\mathbf{R})_Q = (\nabla_Q \mathbf{r}) \cdot (\nabla\mathbf{R}). \qquad (2.14)$$

Остается понять, как вычислить $\nabla_Q \mathbf{r}$. Воспользуемся первым уравнением (2.5) и разрешим его относительно $\mathbf{r}$. Результат таков:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}^T \cdot (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0) = (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q}.$$

Теперь уже легко увидеть, как вычислить $\nabla_Q \mathbf{r}$. Действительно, получаем

$$\nabla_Q \mathbf{r} = \nabla_Q (\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q}.$$

Таким образом, уравнение (2.14) принимает вид

$$(\nabla\mathbf{R})_Q = \mathbf{Q} \cdot (\nabla\mathbf{R}).$$

Получение подобной формулы обсуждалось в разделе 2.5 учебного пособия [7].

Остается подставить это выражение в (2.7), чтобы получить окончательный результат

$$\mathbf{g}_Q = \mathbf{Q} \cdot (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\nabla \mathbf{R})^T \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{Q}^T. \qquad (2.15)$$

Оказалось что мера деформации Альманси в $\mathbf{Q}$ – движении равна повернутой мере деформации Альманси основного движения.

Найдем теперь меру деформации Фингера в $\mathbf{Q}$ – движении. По определению (1.33) из [6] имеем

$$\mathbf{F}_Q = \mathbf{g}_Q^{-1}.$$

Учитывая (1.114) из [7], а также свойство тензора поворота

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T,$$

получим следующий результат

$$\mathbf{F}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T. \qquad (2.16)$$

Оказалось, что мера деформации Фингера в $\mathbf{Q}$ – движении равна повернутой мере деформации Фингера основного движения в той же материальной точке M.

Обсудим теперь вопрос о температуре T и ее градиенте $\mathbf{\Gamma}$ в двух движениях. Обратим внимание на то, в силу вторых уравнений (2.4) и (2.5) температуры в одной и той же точке в двух движениях одинаковы, так что имеем

$$T_Q = T. \qquad (2.17)$$

Это означает, что температура T_Q в точке $\mathbf{r}_Q$ в $\mathbf{Q}$ – движении (2.5) равна температуре T в точке $\mathbf{r}$ текущего состояния основного движения (2.4). Но ведь по (2.5) координата $\mathbf{r}_Q$ получается из $\mathbf{r}$ путем поступательного перемещения $\mathbf{r}_0(t)$ и поворота $\mathbf{Q}(t)$. А все это означает, что температурное поле текущего состояния $\mathbf{Q}$ – движения получается из температурного поля основного движения путем его поступательного перемещения $\mathbf{r}_0(t)$ и поворота $\mathbf{Q}(t)$. Только при таком перемещении температурного поля выполняется равенство (2.17). А что произойдет с градиентом температуры $\mathbf{\Gamma}$? Очевидно, что поступательное перемещение $\mathbf{r}_0(t)$ никакого влияния на него не окажет. А вот поворот поля окажет: градиент температуры повернется вместе с температурным полем. Таким образом

$$\mathbf{\Gamma}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}. \qquad (2.18)$$

Это означает, что градиент температуры в $\mathbf{Q}$ – движении $\mathbf{\Gamma}_Q$ равен повернутому градиенту температуры основного движения $\mathbf{\Gamma}$.

Итак, все определяющие параметры $\mathbf{Q}$ – движения выражаются через повернутые значения определяющих параметров основного движения. Поступательное движение $\mathbf{r}_0(t)$ никакого влияния на них не оказывает.

Так обстоят дела с определяющими параметрами. Однако при последующих рассмотрениях понадобятся некоторые другие сравнения двух введенных движений.

Обратим внимание на поле скоростей в $\mathbf{Q}$ – движении. Дифференцируя первое уравнение в (2.5), получим

$$\dot{\mathbf{r}}_Q = \dot{\mathbf{r}}_0(t) + \mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{r}.$$

Используем, далее, традиционное обозначение скорости, как материальной производной

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}.$$

Воспользуемся также уравнением для производной тензора поворота

$$\dot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{q}\cdot\mathbf{Q}, \tag{2.19}$$

где $\mathbf{q}$ — тензор вихря или спин для тензора поворота $\mathbf{Q}$. Это антисимметричный тензор.

С учетом введенных обозначений перепишем выражение скорости в следующем виде

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_0 + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q}\cdot(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}).$$

С помощью (2.5) найдем

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0$$

и подставим этот результат в представление скорости. Получим следующее уравнение

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_0 + \mathbf{Q}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{q}\cdot\left(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0\right)$$

или

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{Q}^T + \left(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0\right)\cdot\mathbf{q}. \tag{2.20}$$

Используем это выражение для вычисления тензора скоростей деформации и тензора вихря. По определению имеем

$$\mathbf{D}_Q = (\nabla\mathbf{v})_Q^S, \qquad \mathbf{\Omega}_Q = (\nabla\mathbf{v})_Q^A.$$

С помощью (2.20) вычисляем $(\nabla \mathbf{v})_Q$. Имеем

$$(\nabla \mathbf{v})_Q = \nabla_Q \mathbf{v}_Q = \nabla_Q \mathbf{v}_0 + \nabla_Q \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}^T + \nabla_Q \left(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0 \right) \cdot \mathbf{q}.$$

Первое слагаемое правой части здесь равно нулю, потому что $\mathbf{v}_0$ вообще не зависит от пространственных координат. Второе слагаемое вычисляем по аналогии с (2.14). Имеем

$$\nabla_Q \mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot (\nabla \mathbf{v}).$$

Третье слагаемое вычисляем вообще элементарно

$$\nabla_Q \left(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_0 \right) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}.$$

Результат вычислений таков

$$(\nabla \mathbf{v})_Q = \mathbf{Q} \cdot (\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}.$$

Отсюда находим следующие представления для тензора скоростей деформации и тензора вихря

$$\mathbf{D}_Q = (\nabla \mathbf{v})_Q^S = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{\Omega}_Q = (\nabla \mathbf{v})_Q^A = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}. \tag{2.22}$$

Здесь $\mathbf{D}$ и $\mathbf{\Omega}$ — тензоры скоростей деформации и вихря для основного движения.

Тензор скоростей деформации $\mathbf{Q}-$движения оказался равным повернутому тензору скоростей деформации основного движения. Тензор вихря представлен двумя слагаемыми: повернутым тензором вихря основного движения и тензором вихря $\mathbf{q}$ для тензора поворота $\mathbf{Q}$.

2.3. Различные формулировки принципа материальной объективности

В настоящем разделе мы сформулируем требования, которые нужно наложить на реакции материала: тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, вектор теплового потока $\mathbf{h}$, плотность свободной энергии ψ и плотность внутренней энтропии S, руководствуясь соображениями здравого смысла. При этом мы отвлекаемся от возможности материального тела быть, например, жидким кристаллом и быть подверженным действию внешнего магнитного или иного поля. Итак, ограничиваемся рассмотрением только таких материалов, как конструкционная сталь, лед, стекло, затвердевшая эпоксидная смола, углеродные волокна, резина и т.д.

Итак, у нас в руках кусок такого материала и он претерпевает два рассмотренных выше движения. Какого различия или сходства в поведении этого куска в различных движениях мы ожидаем встретить из соображений здравого смысла?

Напомним, что оба движения различаются только дополнительной трансляцией и поворотом. Первое, что следует объявить: реакции материала в $\mathbf{Q}-$движении не зависят от трансляции $\mathbf{r}_0(t)$. Действительно, от $\mathbf{r}_0(t)$ не зависит ни один определяющий параметр. Полагаем, что не должны зависеть от $\mathbf{r}_0(t)$ и реакции материала. Однако определяющие параметры существенно зависят от тензора поворота. Значит, от него должны зависеть и реакции. Но как? Полагаем, что такие сокровенные свойства, как свободная энергия и внутренняя энтропия не зависят от $\mathbf{Q}$. Это означает следующее

$$\psi_Q = \psi, \qquad S_Q = S.$$

Далее, обратим внимание на поверхность тела в этих двух движениях. Малые элементы поверхности показаны на рис 2.1. На этом же рисунке показаны и нормали к поверхности, и векторы напряжений на этих площадках. Совершенно очевидно, что нормаль $\mathbf{n}_Q$ в $\mathbf{Q}-$движении представляет собой повернутый вектор нормали $\mathbf{n}$ в основном движении, т.е.

$$\mathbf{n}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}. \tag{2.23}$$

Здравый смысл подсказывает, что вектор напряжения в $\mathbf{Q}-$движении должен быть равен повернутому вектору напряжения основного движения, т.е.

$$\boldsymbol{\tau}_Q = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

Последнее, что следует обсудить — это вопрос о тепловом потоке g через поверхность в этих двух движениях. Здравый смысл подсказывает, что они равны, т.е.

$$g_Q = g,$$

потому что тепловые процессы в обоих движениях одинаковы.

Таким образом, приходим к первой и наиболее естественной формулировке принципа материальной объективности

$$\boldsymbol{\tau}_Q = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\tau}, \qquad g_Q = g, \qquad \psi_Q = \psi, \qquad S_Q = S. \tag{2.24}$$

Последние два условия уже содержат реакции материала. Первые же два могут быть преобразованы к виду, их содержащему. Начнем с первого условия. Запишем его в более удобном для последующего виде

$$\boldsymbol{\tau}_Q = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{Q}^T. \tag{2.25}$$

По формуле Коши (2.45) из [6] имеем

$$\boldsymbol{\tau}_Q = \mathbf{n}_Q \cdot \boldsymbol{\sigma}_Q, \qquad\qquad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Второе выражение преобразуем, записывая преобразования в виде следующей цепочки равенств

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Подстановка этого результата в (2.25) дает

$$\mathbf{n}_Q \cdot \boldsymbol{\sigma}_Q = \mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Но ведь это даже не уравнение, а тождество, и оно должно выполняться при произвольном векторе $\mathbf{n}_Q$. Значит, имеем

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T. \tag{2.26}$$

Это означает, что тензор напряжений в $\mathbf{Q}$ – движении равен повернутому тензору напряжений основного движения.

Обратимся теперь ко второму равенству (2.24). Учитывая представления тепловых потоков g_Q и g по (3.21) из [6]

$$g_Q = \mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{h}_Q, \qquad g = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h},$$

получим

$$\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{h}_Q = \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}. \tag{2.27}$$

Правую часть преобразуем, воспользовавшись следующей цепочкой равенств

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}.$$

Подстановка этого выражения в (2.27) приводит к тождеству

$$\mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{h}_Q = \mathbf{n}_Q \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}.$$

Значит, имеем уравнение

$$\mathbf{h}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}. \tag{2.28}$$

Это равенство выражает требование: вектор теплового потока в $\mathbf{Q}-$движении равен повернутому вектору теплового потока основного движения.

Заменив первые два условия в (2.24) на (2.26) и (2.28), приходим к альтернативной формулировке принципа материальной объективности

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{h}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}., \quad \psi_Q = \psi, \quad S_Q = S. \tag{2.29}$$

Эта формулировка более удобна, чем (2.24) потому, что последняя содержит реакции материала в явном виде.

Остановимся на деталях.

Пусть определяющие уравнение имеют вид операторных уравнений (1.17)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\}, \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\}, \\ \psi = \psi\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\}, \\ S = S\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Этими уравнениями задаются реакции материала в основном движении. А как записать выражения реакций в $\mathbf{Q}-$движении? Обращаю внимание на то, что материал тот же, а вот движение другое, так что следует написать следующие уравнения

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_Q = \boldsymbol{\sigma}\left\{T_Q, \boldsymbol{\Gamma}_Q, \mathbf{F}_Q, \mathbf{B}_Q\right\}, \\ \mathbf{h}_Q = \mathbf{h}\left\{T_Q, \boldsymbol{\Gamma}_Q, \mathbf{F}_Q, \mathbf{B}_Q\right\}, \\ \psi_Q = \psi\left\{T_Q, \boldsymbol{\Gamma}_Q, \mathbf{F}_Q, \mathbf{B}_Q\right\}, \\ S_Q = S\left\{T_Q, \boldsymbol{\Gamma}_Q, \mathbf{F}_Q, \mathbf{B}_Q\right\}. \end{cases} \tag{2.31}$$

Поскольку материал тот же, что и в (2.30), операторы здесь те же, что и в (2.30), а вот термомеханический процесс другой. Он определяется $\mathbf{Q}-$движением, в котором определяющие параметры имеют вид (2.17), (2.18), (2.15) и (2.6).

Учитывая это, подставим (2.31) и (2.30) в уравнения (2.29). Получим следующие уравнения

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_Q = \boldsymbol{\sigma}\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\right\} = \mathbf{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\}\cdot\mathbf{Q}^T(t),\\
&\mathbf{h}_Q = \mathbf{h}\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\right\} = \mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{h}\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\},\\
&\psi_Q = \psi\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\right\} = \psi\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\},\\
&S_Q = S\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\right\} = S\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Таково формальное содержание принципа материальной объективности. Это ограничения на операторы $\boldsymbol{\sigma}\{...\}$, $\mathbf{h}\{...\}$, $\psi\{...\}$ и $S\{...\}$.

Замечание 2.1. В правые части первого и второго уравнений (2.32) входят только значения тензора $\mathbf{Q}(t)$ — тензора поворота в момент времени t. Это означает, что напряжение $\boldsymbol{\sigma}_Q$, вектор теплового потока $\mathbf{h}_Q$ в $\mathbf{Q}-$движении не зависят от всей истории поворотов $\mathbf{Q}(\tau)$, а зависят только от значения тензора поворота $\mathbf{Q}(t)$ в текущий момент времени. Далее, свободная энергия и внутренняя энтропия в $\mathbf{Q}-$движении вообще не зависят ни от истории тензора поворота, ни от его значения в текущий момент времени.

Замечание 2.2. Пусть в основном движении тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и вектор теплового потока $\mathbf{h}$ имеют представление

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\sigma_{kl}, \qquad \mathbf{h} = \mathbf{i}_k h_k.$$

Значения тензора напряжений и вектора теплового потока в $\mathbf{Q}-$движении находим по формулам (2.29). Получаем

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l)\sigma_{kl}, \qquad \mathbf{h}_Q = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k)h_k. \tag{2.33}$$

Появившиеся в этих формулах векторы $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k$ представляют повернутые базисные векторы основной неподвижной системы координат $\mathbf{i}_k$. Тогда из (2.33) получаем следующее заключение: координаты тензора напряжений и вектора теплового потока $\mathbf{Q}-$движения в повернутом базисе оказались такими же, как были в основном движении в базисе неподвижной системы координат.

2.4. Простейшие примеры определяющих уравнений и их анализ с позиций принципа материальной объективности

1. Рассмотрим определяющее уравнение нестареющего теплопроводящего материала (1.51)

$$\mathbf{h} = -\kappa(T)\boldsymbol{\Gamma}. \tag{2.34}$$

Принцип материальной объективности накладывает следующее ограничение

$$\mathbf{h}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}. \tag{2.35}$$

Имеем представление левой части

$$\mathbf{h}_Q = -\kappa\left(T_Q\right)\boldsymbol{\Gamma}_Q = -\kappa(T)\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}.$$

Правая часть такова

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{Q} \cdot \left(-\kappa(T)\boldsymbol{\Gamma}\right) = -\kappa(T)\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}.$$

Сравнивая обе эти части, приходим к заключению, что они равны. Таким образом, определяющее уравнение (2.34) удовлетворяет принципу материальной объективности.

2. Рассмотрим определяющее уравнение (1.52)

$$\mathbf{h} = -\mathbf{K}(T) \cdot \boldsymbol{\Gamma}. \tag{2.36}$$

Опять следует проверить выполнение уравнения (2.35). Левая часть его равна следующему выражению

$$\mathbf{h}_Q = -\mathbf{K}\left(T_Q\right) \cdot \boldsymbol{\Gamma}_Q = -\mathbf{K}(T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}.$$

Правая же — имеет следующее представление

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{Q} \cdot \left(-\mathbf{K}(T) \cdot \boldsymbol{\Gamma}\right) = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}(T) \cdot \boldsymbol{\Gamma}.$$

Чтобы она равнялась левой необходимо потребовать выполнения равенства

$$-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}(T) \cdot \boldsymbol{\Gamma} = -\mathbf{K}(T) \cdot \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Gamma}.$$

Чтобы оно выполнялось при произвольном векторе $\boldsymbol{\Gamma}$, должно быть

$$-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}(T) = -\mathbf{K}(T) \cdot \mathbf{Q}$$

или после умножения справа на $-\mathbf{Q}^T$

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}(T) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{K}(T).$$

Это равенство требует, чтобы повернутый тензор второго ранга был бы равен исходному. Но это возможно только тогда, когда этот тензор либо равен нулю, либо является шаровым. В общем случае такое равенство невозможно. Следовательно, весьма популярное определяющее уравнение (2.36) не удовлетворяет принципу материальной объективности!

3. Рассмотрим определяющее уравнение (2.3)

$$\mathbf{h} = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}^*\left(T\right) \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{\Gamma}. \tag{2.37}$$

Опять необходимо проверить выполнение уравнения (2.35). Вычисляем левую часть

$$\mathbf{h}_Q = -\mathbf{B}_Q \cdot \mathbf{K}^*\left(T_Q\right) \cdot \mathbf{B}_Q^T \cdot \mathbf{\Gamma}_Q = -\mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}^*\left(T\right) \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma} =$$
$$= -\mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}^*\left(T\right) \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{\Gamma}\right).$$

Вычисляем правую часть

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = -\mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}^*\left(T\right) \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{\Gamma}\right).$$

Убеждаемся, что они равны!

Таким образом, определяющее уравнение (2.37) удовлетворяет принципу материальной объективности.

Сравнивая два последних примера, приходим к заключению о том, что высказанное в разделе 2.1 полностью оправдалось: определяющее уравнение (1.52) или что, то же, (2.36) не удовлетворяет принципу материальной объективности, тогда как (2.3) или (2.37) — удовлетворяет.

4. Рассмотрим определяющее уравнение стареющего материала (1.70)

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{\Gamma}.$$

Левая часть уравнения (2.35) имеет вид

$$\mathbf{h}_Q = \mathbf{h}_0\left(T_Q,t\right) - \kappa\left(\mathbf{T}_Q,t\right)\mathbf{\Gamma}_Q = \mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}.$$

Правая часть такова:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{\Gamma}\right) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}.$$

Никакого равенства этих двух частей не обнаруживаем. Значит, уравнение (1.70) неприемлемо.

5. А вот уравнение

$$\mathbf{h} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{\Gamma} \tag{2.38}$$

вполне приемлемо.

Действительно, левая и правая части в (2.35) равны, соответственно

$$\mathbf{h}_Q = \mathbf{B}_Q \cdot \mathbf{h}_0\left(T_Q,t\right) - \kappa\left(T_Q,t\right)\mathbf{\Gamma}_Q = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Gamma},$$

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{Q}\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{\Gamma}\right) = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \kappa\left(T,t\right)\mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Gamma}.$$

Они полностью совпадают.

6. Рассмотрим теперь скорректированное специальным образом определяющее уравнение (1.76)

$$\mathbf{h} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \mathbf{B}\cdot\mathbf{K}^*\left(T,t\right)\cdot\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{\Gamma}. \tag{2.39}$$

Коррекция состояла в том, что материальный вектор $\mathbf{h}_0$ заменен на повернутый вместе с телом вектор $\mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right)$, а материальный тензор $\mathbf{K}\left(T,t\right)$ — на повернутый тензор $\mathbf{B}\cdot\mathbf{K}^*\left(T,t\right)\cdot\mathbf{B}^T$.

Левая и правая части уравнения принципа материальной объективности равны соответственно

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_Q &= \mathbf{B}_Q\cdot\mathbf{h}_0\left(T_Q,t\right) - \mathbf{B}_Q\cdot\mathbf{K}^*\left(T_Q,t\right)\cdot\mathbf{B}_Q^T\cdot\mathbf{\Gamma}_Q = \\ &= \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{K}^*\left(T,t\right)\cdot\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Gamma} = \\ &= \mathbf{Q}\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \mathbf{B}\cdot\mathbf{K}^*\left(T,t\right)\cdot\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{\Gamma}\right),\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{Q}\cdot\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{h}_0\left(T,t\right) - \mathbf{B}\cdot\mathbf{K}^*\left(T,t\right)\cdot\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{\Gamma}\right).$$

Оказалось, что они равны.

Приведенный пример замечателен. Он отличается от уравнения (1.76) тем, что материальные вектор $\mathbf{h}_0$ и тензор $\mathbf{K}$ заменены на повернутые или, что то же самое, заданы в базисе, вращающимся вместе с телом. Это частное наблюдение приводит к всеохватывающему заключению: чтобы удовлетворить принципу материальной объективности, необходимо задавать во вращающемся с телом базисе все материальные векторы и тензоры, входящие в определяющие уравнения.

7. Рассмотрим теперь определяющее уравнение, моделирующее напряжения, возникающие при вязком течении

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha\mathbf{D}, \qquad \alpha = const. \tag{2.40}$$

Наша задача состоит в том, чтобы проверить выполнение первого из уравнений принципа материальной объективности (2.29)

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{Q}^T. \tag{2.41}$$

Левая часть уравнения (2.41) имеет выражение (с учетом представления (2.21))

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \alpha \mathbf{D}_Q = \alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T,$$

в то время как правая равна

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot (\alpha \mathbf{D}) \cdot \mathbf{Q}^T = \alpha \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Следовательно, уравнение (2.40) удовлетворяет принципу материальной объективности и, значит, пригодно для описания вязкости.

8. Рассмотрим также альтернативное определяющее уравнение, тоже предназначенное для описания явления вязкости

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta \dot{\mathbf{F}}, \qquad \beta = const. \tag{2.42}$$

С учетом выражения $\dot{\mathbf{F}}$ по (1.86) из [6] получаем другое представление для (2.42)

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta\big((\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega})\big).$$

Левая часть этого уравнения равна

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \beta\Big(\big(\mathbf{D}_Q - \boldsymbol{\Omega}_Q\big) \cdot \mathbf{F}_Q + \mathbf{F}_Q \cdot \big(\mathbf{D}_Q + \boldsymbol{\Omega}_Q\big)\Big).$$

Применяя формулы (2.16), (2.21) и (2.22), получим

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \beta\Big(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{q}\Big) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T +$$

$$+\beta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \Big(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{q}\Big).$$

Перемножение и учет свойств тензора поворота $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E}$ приводит к следующему результату

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = \beta \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T + \beta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{Q}^T -$$

$$-\beta\Big(\mathbf{q} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{q}\Big).$$

Вычисление правой части немедленно приводит к совершенно другому результату

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = \beta \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T + \beta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Разница между ними равна

$$\boldsymbol{\sigma}_Q - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = -\beta\Big(\mathbf{q} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{q}\Big). \tag{2.43}$$

Чтобы безусловно выполнить требования принципа материальной объективности, ее следует обратить в ноль при произвольных значениях антисимметричного тензора вихря $\mathbf{q}$, симметричного тензора Фингера $\mathbf{F}$ и тензора поворота $\mathbf{Q}$. Пользуясь этим произволом выбираем типичный антисимметричный тензор

$$\mathbf{q} = \mathbf{ac} - \mathbf{ca},$$

типичный симметричный тензор

$$\mathbf{F} = \mathbf{aa}$$

и типичный тензор поворота

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}.$$

Кроме того, для простоты принимаем, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ ортогональны, т.е. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$. Подставляя эти значения в (2.43), получим

$$\boldsymbol{\sigma}_Q - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = -\beta\left(\mathbf{ac} - \mathbf{ca}\right) \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{aa} \cdot \mathbf{E} + \beta \mathbf{E} \cdot \mathbf{aa} \cdot \mathbf{E}\left(\mathbf{ac} - \mathbf{ca}\right) =$$

$$= \beta \mathbf{a}^2 \left(\mathbf{ca} + \mathbf{ac}\right) \neq 0.$$

Итак, определяющее уравнение (2.42) неприемлемо с позиций принципа материальной объективности.

9. Усовершенствуем определяющее уравнение (2.42) и примем

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta \mathbf{F}^{\nabla}, \tag{2.44}$$

где $\mathbf{F}^{\nabla}$ — производная Яуманна (1.117) из [6]

$$\mathbf{F}^{\nabla} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}.$$

Подставив это выражение в (2.44), приходим к представлению

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta\left(\mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}\right).$$

Действуя так же, как и в предыдущем примере, получаем

$$\boldsymbol{\sigma}_Q - \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = 0.$$

Общий вывод таков: использование производной Яуманна в определяющих уравнениях приводит к выполнению требования принципа материальной объективности.

10. Рассмотрим теперь определяющее уравнение более общего вида

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0 \mathbf{E} + A_1 \mathbf{D} + A_2 \mathbf{D}^2, \tag{2.45}$$

где коэффициенты A_k зависят от температуры и от главных инвариантов тензора скоростей деформаций I_1, I_2, I_3, т.е.

$$A_k = A_k\left(T, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3\right).$$

Проверим, выполняется ли уравнение (2.41). Левая часть равна

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = A_{0Q} \mathbf{E} + A_{1Q} \mathbf{D}_Q + A_{2Q} \mathbf{D}_Q^2,$$

где коэффициенты равны

$$A_{kQ} = A_k\left(T_Q, \mathrm{I}_{1Q}, \mathrm{I}_{2Q}, \mathrm{I}_{3Q}\right). \tag{2.46}$$

Имеем по (2.17) и (2.21)

$$T_Q = T, \qquad \mathbf{D}_Q = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T.$$

Далее, имеем по (1.143) из [7]

$$\mathrm{I}_{1Q} = \mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{D}_Q = \mathbf{E}\cdot\cdot\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T\right) = \left(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{Q}\right)\cdot\cdot\mathbf{D} = \mathbf{E}\cdot\cdot\mathbf{D} = \mathrm{I}_1. \qquad (2.47)$$

Второй главный инвариант находим из уравнения (1.144) из [7]

$$\mathrm{I}_{1Q}^2 - 2\mathrm{I}_{2Q} = \mathbf{D}_Q\cdot\cdot\mathbf{D}_Q = \left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T\right)\cdot\cdot\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T\right) =$$
$$= \left(\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}\right)\cdot\cdot\mathbf{D} = \mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{D}.$$

Учитывая (2.47), получаем

$$\mathrm{I}_{2Q} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}\cdot\cdot\mathbf{D} - \mathrm{I}_1^2\right) = \mathrm{I}_2.$$

Наконец, имеем

$$\mathrm{I}_{3Q} = \left|\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T\right| = |\mathbf{Q}||\mathbf{D}||\mathbf{Q}| = |\mathbf{D}| = \mathrm{I}_3.$$

Таким образом, коэффициенты A_{kQ} (2.46) равны коэффициентам A_k основного движения

$$A_{kQ} = A_k.$$

Возвращаемся к левой части уравнения (2.41), которая принимает вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_Q &= A_0\mathbf{E} + A_1\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T + A_2\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T = \\ &= A_0\mathbf{E} + A_1\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T + A_2\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}^2\cdot\mathbf{Q}^T.\end{aligned} \qquad (2.48)$$

Для правой части уравнения (2.41) получаем выражение

$$\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{Q}^T = A_0\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T + A_1\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T + A_2\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}^2\cdot\mathbf{Q}^T =$$
$$= A_0\mathbf{E} + A_1\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{Q}^T + A_2\mathbf{Q}\cdot\mathbf{D}^2\cdot\mathbf{Q}^T.$$

Оно в точности совпадает с (2.48). Таким образом, определяющее уравнение (2.45) удовлетворяет принципу материальной объективности.

11. Аналогичным образом исследуется определяющее уравнение

$$\boldsymbol{\sigma} = B_0\mathbf{E} + B_1\mathbf{F} + B_2\mathbf{F}^2, \qquad (2.49)$$

в котором коэффициенты B_k являются функциями температуры и главных инвариантов I_1, I_2, I_3 меры деформации Фингера, т.е.

$$B_k = B_k\left(T, \mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3\right).$$

По аналогии с предыдущим примером легко устанавливаем, что оно удовлетворяет принципу материальной объективности. Уравнение (2.49) устанавливает связь между деформацией и температурой с одной стороны и напряжением с другой. Такое поведение характерно для упругих материалов. Так что, уравнение (2.49) пригодно для описания упругих материалов частного вида — изотропных. Аналогично, уравнение (2.45) пригодно для описания вязких материалов.

12. Модель упругого поведения широко используется в механике деформируемых тел. Поэтому сконструируем более общую зависимость, связывающую тензор напряжений с мерой деформации Фингера. Предлагаем следующее выражение

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^2\mathbf{C} + {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{F} + \left({}^6\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot\cdot \mathbf{F} + \left(\left({}^8\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot\cdot \mathbf{F} + \ldots \qquad (2.50)$$

Здесь ${}^2\mathbf{C}$ — тензор второго ранга, ${}^4\mathbf{C}$ — тензор четвертого ранга, ${}^6\mathbf{C}$ — тензор шестого ранга и т.д. Это так называемые материальные тензоры. Полагаем, что они постоянны.

Следует проверить, выполняется ли требование принципа материальной объективности (2.41). Вычисления дают

$$\boldsymbol{\sigma}_Q = {}^2\mathbf{C} + {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T\right) + \left({}^6\mathbf{C} \cdot\cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T\right)\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T\right) +$$

$$+ \left(\left({}^8\mathbf{C} \cdot\cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T\right)\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T\right)\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T\right) + \ldots$$

$$\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot {}^2\mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \left({}^4\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \left(\left({}^6\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{Q}^T +$$

$$+ \mathbf{Q} \cdot \left(\left(\left({}^8\mathbf{C} \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot\cdot \mathbf{F}\right) \cdot \mathbf{Q}^T + \ldots$$

Отмечаем, что оба эти выражения сильно отличаются друг от друга, а значит в общем случае (при произвольном $\mathbf{Q}$) не равны: требование принципа материальной объективности не выполняется.

13. Воспользуемся теперь наблюдением, отмеченным выше при рассмотрении шестого примера: чтобы удовлетворить требованиям принципа материальной объективности, достаточно задавать все материальные векторы и тензоры в базисе, вращающемся вместе с окрестностью материальной точки. В разделе 1.9 из [6] мы обозначали элементы такого базиса $\mathbf{b}_l$, причем

$$\mathbf{b}_l = \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}_l, \qquad \mathbf{b}_l = \mathbf{i}_l \cdot \mathbf{B}^T. \qquad (2.51)$$

Материальными тензорами в (2.50) являются тензоры ${}^2\mathbf{C}$, ${}^4\mathbf{C}$, ${}^6\mathbf{C}$, ${}^8\mathbf{C}$... Зададим их своими координатами во вращающемся базисе

$$
\begin{aligned}
&{}^2\mathbf{C} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l C_{kl}(T),\\
&{}^4\mathbf{C} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n C_{klmn}(T),\\
&{}^6\mathbf{C} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n \mathbf{b}_r \mathbf{b}_s C_{klmnrs}(T),\\
&{}^8\mathbf{C} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n \mathbf{b}_r \mathbf{b}_s \mathbf{b}_p \mathbf{b}_q C_{klmnrspq}(T).
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Мы предположили, дополнительно, что координаты этих тензоров C_{klmnpq} во вращающемся базисе зависят только от температуры. Используем именно эти тензоры при написании уравнения (2.50). Убедимся, что уравнение (2.41) выполняется. Левая часть его равна

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_Q = {}^2\mathbf{C}_Q + {}^4\mathbf{C}_Q \cdot\cdot \mathbf{F}_Q + \left({}^6\mathbf{C}_Q \cdot\cdot \mathbf{F}_Q\right) \cdot\cdot \mathbf{F}_Q +\\
&+\left(\left({}^8\mathbf{C}_Q \cdot\cdot \mathbf{F}_Q\right) \cdot\cdot \mathbf{F}_Q\right) \cdot\cdot \mathbf{F}_Q + \ldots
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

Имеем по (2.17) и (2.16)

$$
T_Q = T, \qquad \mathbf{F}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T.
$$

Далее, по (2.51) и (2.6) находим

$$
\mathbf{b}_{lQ} = \mathbf{B}_Q \cdot \mathbf{i}_l = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{i}_l = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}_l .
$$

Следовательно, получаем по (2.52)

$$
\begin{aligned}
&{}^2\mathbf{C}_Q = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l) C_{kl}(T),\\
&{}^4\mathbf{C}_Q \cdot\cdot \mathbf{F}_Q = \left((\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_m)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_n) C_{klmn}(T)\right) \cdot\cdot \left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T\right) =\\
&= (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l) C_{klmn}(T) \left(\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_m\right) =\\
&= (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l) C_{klmn}(T) (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m).
\end{aligned}
$$

По аналогии находим

$$
\begin{aligned}
&\left({}^6\mathbf{C}_Q \cdot\cdot \mathbf{F}_Q\right) \cdot\cdot \mathbf{F}_Q = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l) C_{klmnpq}(T) \left(\mathbf{b}_q \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_p\right)(\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m),\\
&\left(\left({}^8\mathbf{C}_Q \cdot\cdot \mathbf{F}_Q\right) \cdot\cdot \mathbf{F}_Q\right) \cdot\cdot \mathbf{F}_Q =\\
&(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l) C_{klmnpqrs}(T) (\mathbf{b}_s \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_r)\left(\mathbf{b}_q \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_p\right)(\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m).
\end{aligned}
$$

Подставляя все эти результаты в (2.50), получим

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_Q = (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l)\big(C_{kl}(T) + C_{klmn}(T)(\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m) +\\
&+C_{klmnpq}(T)\left(\mathbf{b}_q \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_p\right)(\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m) +\\
&+C_{klmnpqrs}(T)(\mathbf{b}_s \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_r)\left(\mathbf{b}_q \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_p\right)(\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m) + \ldots\big).
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

Вычислим теперь правую часть уравнения (2.41). По определению находим

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{Q}^T &= \mathbf{Q}\cdot\Big(\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l C_{kl}(T)+\big(\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l\mathbf{b}_m\mathbf{b}_n C_{klmn}(T)\big)\cdot\cdot\,\mathbf{F}+\\
&\quad+\Big(\big(\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l\mathbf{b}_m\mathbf{b}_n\mathbf{b}_r\mathbf{b}_s C_{klmnrs}(T)\big)\cdot\cdot\,\mathbf{F}\Big)\cdot\cdot\,\mathbf{F}+\ldots\Big)\cdot\mathbf{Q}^T=\\
&= \mathbf{Q}\cdot\Big(\mathbf{b}_k\mathbf{b}_l\big(C_{kl}(T)+C_{klmn}(T)(\mathbf{b}_n\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m)+\\
&\quad+C_{klmnrs}(T)(\mathbf{b}_s\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_r)(\mathbf{b}_n\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m)+\\
&\quad+C_{klmnrspq}\big(\mathbf{b}_q\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_p\big)(\mathbf{b}_s\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_r)(\mathbf{b}_n\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m)+\ldots\big)\Big)\cdot\mathbf{Q}^T=\\
&= (\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_k)(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}_l)\big(C_{kl}(T)+C_{klmn}(T)(\mathbf{b}_n\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m)+\\
&\quad+C_{klmnrs}(T)(\mathbf{b}_s\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_r)(\mathbf{b}_n\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m)+\\
&\quad+C_{klmnrspq}\big(\mathbf{b}_q\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_p\big)(\mathbf{b}_s\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_r)(\mathbf{b}_n\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{b}_m)+\ldots\big).
\end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (2.54), убеждаемся, что они равны! Следовательно, определяющее уравнение (2.53), в котором материальные тензоры $\mathbf{C}$ заданы своими разложениями во вращающемся базисе, удовлетворяет принципу материальной объективности!

14. Представим в заключение этого раздела обобщение определяющего уравнения (2.45), демонстрирующего вязкое поведение. Это обобщение конструируем по аналогии с (2.50) и получаем, в конце концов, следующее уравнение

$$\boldsymbol{\sigma}={}^2\mathbf{A}+{}^4\mathbf{A}\cdot\cdot\,\mathbf{D}+\big({}^6\mathbf{A}\cdot\cdot\,\mathbf{D}\big)\cdot\cdot\,\mathbf{D}+\Big(\big({}^8\mathbf{A}\cdot\cdot\,\mathbf{D}\big)\cdot\cdot\,\mathbf{D}\Big)\cdot\cdot\,\mathbf{D}+\ldots \tag{2.55}$$

Исследование, аналогичное проведенному в примере 12, показывает, что если задать материальные тензоры $\mathbf{A}$ в неподвижном базисе, т.е. принять

$$\begin{aligned}
{}^2\mathbf{A}&=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l A_{kl}(T),\\
{}^4\mathbf{A}&=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n A_{klmn}(T),\\
{}^6\mathbf{A}&=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\mathbf{i}_p\mathbf{i}_q A_{klmnpq}(T),
\end{aligned}$$

то окажется, что определяющее уравнение (2.55) не удовлетворит принципу материальной объективности. Следовательно, оно неприемлемо! Однако исследование, аналогичное проведенному в примере 13, показывает, что если задать материальные тензоры $\mathbf{A}$ во вращающемся базисе, т.е. принять

$$
\begin{aligned}
&{}^2\mathbf{A} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l A_{kl}(T), \\
&{}^4\mathbf{A} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n A_{klmn}(T), \\
&{}^6\mathbf{A} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n \mathbf{b}_p \mathbf{b}_q A_{klmnpq}(T), \\
&{}^8\mathbf{A} = \mathbf{b}_k \mathbf{b}_l \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n \mathbf{b}_p \mathbf{b}_q \mathbf{b}_r \mathbf{b}_s A_{klmnpqrs}(T),
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

то окажется, что определяющее уравнение (2.55) удовлетворит требованию принципа материальной объективности (2.26).

Замечание 2.3. Дадим комментарий к последним определяющим уравнениям. Они содержат так называемые материальные тензоры $\mathbf{C}$ и $\mathbf{A}$. Под материальными тензорами мы понимаем тензоры, которые используются для описания свойств материала, но которые не являются определяющими параметрами. В следующей главе будет доказано, что их наличие демонстрирует, что соответствующие материалы являются анизотропными. Так что, уравнение (2.50) при условии (2.52) описывает анизотропный упругий материал, а (2.55) при условии (2.56) — анизотропный вязкий материал.

3. ИЗОТРОПНЫЕ И АНИЗОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

3.1. Качественное отличие изотропных материалов от анизотропных

Материалы реагируют по-разному на их деформирование, нагрев или нагружение. С понятием изотропного материала связано интуитивное представление о равноправности направлений деформирования или нагружения. Бесспорно, мы отнесем воду, машинное масло и другие жидкости к изотропным материалам. А вот дерево, конечно, мы отнесем к анизотропным материалам, ибо деформирование его вдоль направления ствола приводит к значительно большим напряжениям, чем при деформировании поперек него. Точно так же мы резко разграничим теплопроводящие материалы. Многие металлы хорошо проводят тепло по всем направлениям, и поэтому мы отнесем их к изотропным материалам. Вместе с тем в современной технике используются такие специальные материалы, которые плохо проводят тепло в одном направлении и вполне хорошо в других — ортогональных первому. В этой главе мы дадим четкое определение изотропного материала. Все, что не удовлетворяет этому определению — анизотропные материалы.

3.2. Определение изотропного материала

Рассматриваем однородный материал.

Определение 3.1. Изотропным называем такой материал, для которого реакции $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{h}$, ψ и S в точке с эйлеровой координатой $\mathbf{r}$ в момент времени t не изменят своих значений при наложении произвольного начального поворота.

Чтобы уяснить формальный смысл этого определения, следует рассмотреть два разных движения: основное движение и движение с дополнительным начальным поворотом.

Даем стандартное описание основного движения

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\mathbf{R},t), \\ T &= T(\mathbf{r},t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Как всегда, $\mathbf{r}$ — текущее положение материальной точки M, а $\mathbf{R}$ — ее начальное положение. Это движение изображено на рис. 3.1.

Во втором движении мы задаем описание движения совершенно другой материальной точки N

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_H &= \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \\ T_H &= T(\mathbf{r}_H, t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Это второе движение мы называем $\mathbf{H}-$движением в знак того факта, что это движение содержит дополнительный начальный поворот $\mathbf{H}$. В чем же различие двух движений? Полагаем, что во втором движении, т.е. в $\mathbf{H}-$движении, координата $\mathbf{R}$ уже не является начальной координатой! Полагаем, что это промежуточная координата в описании движения материальной точки N и получается из начальной $\mathbf{R}_H$ поворотом, так что

$$\mathbf{R} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{R}_H, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{H}$ — некоторый постоянный тензор. В соответствии с определением изотропного материала этот тензор произволен.

Все то, что сказано, изображено на рис. 3.1. В основном движении начальной координатой точки M является $\mathbf{R}$, а текущей — $\mathbf{r}$. В $\mathbf{H}-$движении начальной координатой точки N является вектор $\mathbf{R}_H$. В начальный момент все деформируемое тело испытывает мгновенный поворот, так что точка N попадает в положение M и принимает координату $\mathbf{R}$. Затем материальная точка N совершает такое же движение, как и точка M в основном движении и в момент времени t занимает положение $\mathbf{r}_H$. Сопоставление (3.1) и (3.2) приводит к заключению

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{r}. \tag{3.4}$$

Из сравнения движений следует, что $\mathbf{H}-$движение началось немного раньше, чем основное. Сначала произошел поворот всего тела как целого, а уже потом последовало такое же движение, как и основное. Следует иметь в виду, что в $\mathbf{H}-$движении участвует материальная точка N, а не M, но при $t > 0$ она проходит те же положения в те же моменты времени, что и точка M в основном движении.

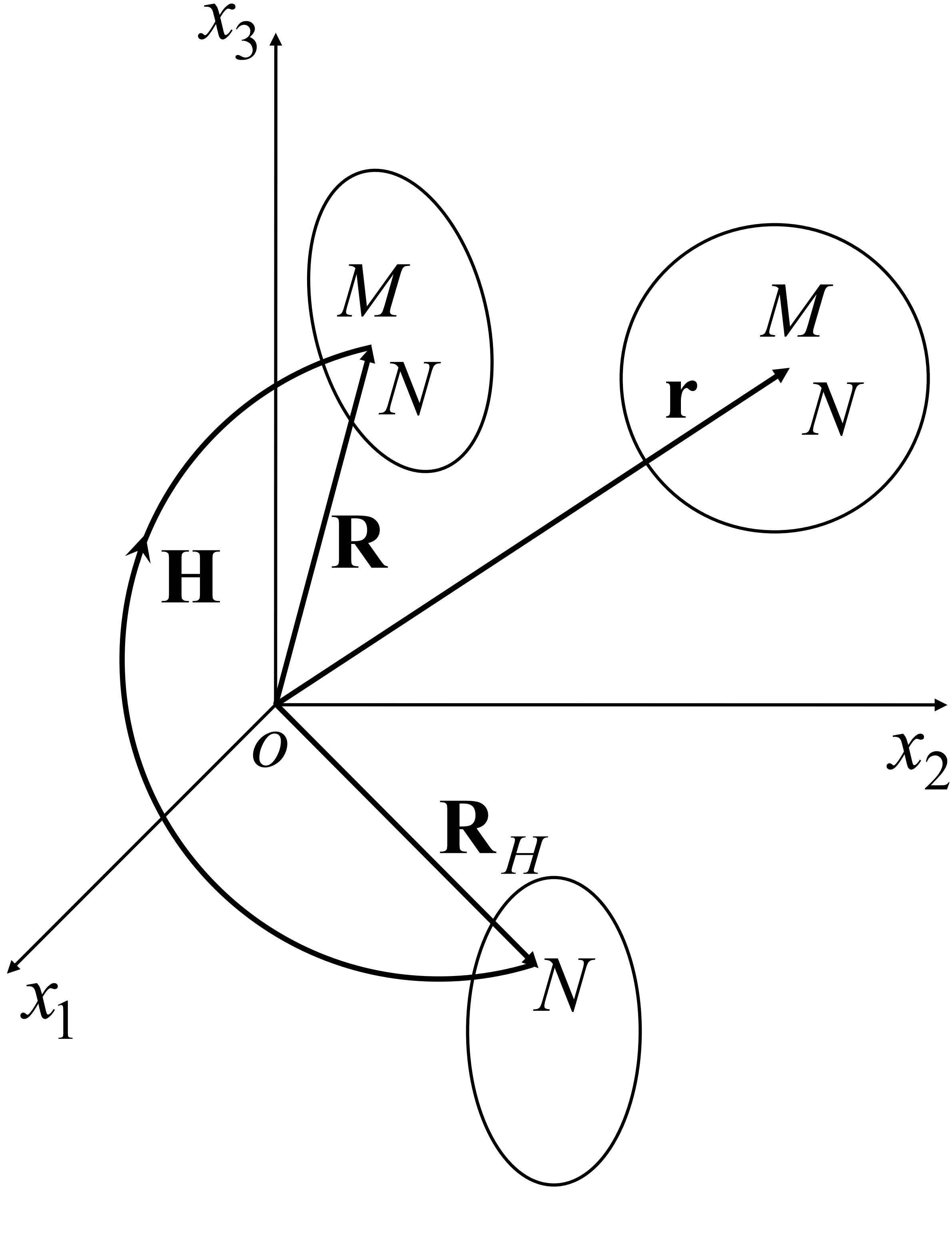

Рис. 3.1. Иллюстрация к определению изотропного материала

В соответствии с определением требование изотропии означает

$$\boldsymbol{\sigma}_H = \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{h}_H = \mathbf{h}, \quad \psi_H = \psi, \quad S_H = S, \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{\sigma}_H$, $\mathbf{h}_H$, ψ_H, S_H — значения операторов $\boldsymbol{\sigma}\{...\}$, $\mathbf{h}\{...\}$, $\psi\{...\}$, $S\{...\}$ в $\mathbf{H}-$движении, а $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{h}$, ψ, S — их значения в основном движении.

В развернутой форме условия изотропии (3.5) записываются следующим образом

$$\boldsymbol{\sigma}\{T_H, \boldsymbol{\Gamma}_H, \mathbf{F}_H, \mathbf{B}_H\} = \boldsymbol{\sigma}\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\},$$
$$\mathbf{h}\{T_H, \boldsymbol{\Gamma}_H, \mathbf{F}_H, \mathbf{B}_H\} = \mathbf{h}\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\},$$
$$\psi\{T_H, \boldsymbol{\Gamma}_H, \mathbf{F}_H, \mathbf{B}_H\} = \psi\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\},$$
$$S\{T_H, \boldsymbol{\Gamma}_H, \mathbf{F}_H, \mathbf{B}_H\} = S\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}.$$

Установим связь между определяющими параметрами $\mathbf{H}-$движения и основного движения. Напоминаем, что имеет место равенство (3.4). А это означает, что температура в $\mathbf{H}-$движении равна температуре в основном движении

$$T_H = T. \tag{3.6}$$

Далее, имеем

$$\boldsymbol{\Gamma}_H = (\nabla T)_H = \nabla_H T_H.$$

Но по (3.4) имеем $\nabla_H = \nabla$, а по (3.6) — $T_H = T$. Следовательно,

$$\boldsymbol{\Gamma}_H = \nabla T = \boldsymbol{\Gamma}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь меру деформации Альманси

$$\mathbf{g}_H = (\nabla \mathbf{R})_H \cdot (\nabla \mathbf{R})_H^T. \tag{3.8}$$

Имеем

$$(\nabla \mathbf{R})_H = \nabla_H \mathbf{R}_H = \nabla \mathbf{R}_H. \tag{3.9}$$

Координату $\mathbf{R}_H$ находим из (3.3). Она равна

$$\mathbf{R}_H = \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{H}.$$

Подставив это значение в (3.9), получим

$$(\nabla \mathbf{R})_H = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{H}.$$

Тогда по (3.8) находим

$$\mathbf{g}_H = \nabla \mathbf{R} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^T \cdot (\nabla \mathbf{R})^T = (\nabla \mathbf{R}) \cdot (\nabla \mathbf{R})^T = \mathbf{g}.$$

Тензор Фингера в $\mathbf{H}-$движении находим обращением

$$\mathbf{F}_H = \mathbf{g}_H^{-1} = \mathbf{g}^{-1} = \mathbf{F}. \tag{3.10}$$

Наконец, найдем тензор поворота в $\mathbf{H}$ – движении. Совершенно очевидно, что поворот $\mathbf{B}_H$ состоит из двух поворотов, совершающихся последовательно: сначала $\mathbf{H}$, а потом $\mathbf{B}$. Таким образом, имеем равенство

$$\mathbf{B}_H = \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \tag{3.11}$$

Для дальнейшего нам понадобится знание тензора скоростей деформации и тензора вихря в $\mathbf{H}$ – движении. Для этого обращаемся к первой формуле (3.2)

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t).$$

В соответствии с (3.3) имеем

$$\mathbf{r}_H = \mathbf{r}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{R}_H, t). \tag{3.12}$$

Начальная координата $\mathbf{R}_H$ фиксирована, а $\mathbf{H}$ не зависит от времени. Следовательно, для скорости в $\mathbf{H}$ – движении получаем выражение

$$\mathbf{v}_H = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{R}_H, t)}{\partial t}.$$

Произведение $\mathbf{H} \cdot \mathbf{R}_H$ исключаем отсюда с помощью (3.12). Получаем

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}(\mathbf{r}_H, t)$$

или

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Далее, легко находим

$$(\nabla \mathbf{v})_H = \nabla_H \mathbf{v}_H = \nabla \mathbf{v}$$

и, наконец, приходим к следующим формулам

$$\mathbf{D}_H = (\nabla \mathbf{v})_H^S = \mathbf{D}, \qquad \mathbf{\Omega}_H = (\nabla \mathbf{v})_H^A = \mathbf{\Omega}. \tag{3.13}$$

Полученные формулы понятны с точки зрения здравого смысла: ведь в $\mathbf{H}$ – движении все происходит так же, как и в основном движении; все, за исключением тензора поворота $\mathbf{B}_H$. Последний по (3.11) приобретает множитель $\mathbf{H}$ справа.

Возвращаемся к требованиям изотропии (3.5). В соответствии с (3.6), (3.7), (3.10) и (3.11) они принимают следующий простой вид

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\} &= \boldsymbol{\sigma}\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \\
\mathbf{h}\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\} &= \mathbf{h}\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \\
\psi\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\} &= \psi\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \\
S\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}\} &= S\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Итак, материал называем изотропным, если при произвольном постоянном тензоре поворота $\mathbf{H}$ выполняются условия (3.14). Если же они не выполняются, то материал называем анизотропным.

3.3. Структура определяющих уравнений изотропных материалов

Определяющие уравнения изотропных материалов обладают очень важным свойством. Это свойство формулируется в следующей теореме.

Теорема 3.1. В определяющие уравнения изотропного материала не входят никакие другие тензоры и векторы, кроме тех тензоров и векторов, которые являются определяющими параметрами либо такими тензорами, которые являются изотропными тензорами четного ранга.

Дадим пояснения к этой теореме. Изотропным называется такой тензор, координаты которого в любом ортогональном базисе одинаковы. Изотропным тензором первого ранга, т.е. изотропным вектором является нулевой вектор. Изотропным тензором второго ранга, кроме нулевого, является только единичный тензор. Изотропным тензором третьего ранга является только тензор Леви – Чивита. Изотропных тензоров четвертого ранга уже три

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{E}_1 &= \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kl}\delta_{mn},\\
{}^4\mathbf{E}_2 &= \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kn}\delta_{lm},\\
{}^4\mathbf{E}_3 &= \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{km}\delta_{ln}.
\end{aligned}
$$

Для полной ясности привожу результат умножения этих тензоров на какой-нибудь тензор второго ранга $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$
\begin{aligned}
{}^4\mathbf{E}_1\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kl}\delta_{mn}\right)\cdot\cdot\left(\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s\varepsilon_{rs}\right) = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\delta_{kl}\delta_{mn}\delta_{nr}\delta_{ms}\varepsilon_{rs} =\\
&= \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\delta_{kl}\varepsilon_{mm} = \mathbf{E}\mathbf{E}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon},\\
{}^4\mathbf{E}_2\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kn}\delta_{lm}\right)\cdot\cdot\left(\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s\varepsilon_{rs}\right) = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\delta_{kn}\delta_{lm}\delta_{nr}\delta_{ms}\varepsilon_{rs} =\\
&= \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\delta_{rk}\delta_{ls}\varepsilon_{rs} = \mathbf{i}_r\mathbf{i}_s\varepsilon_{rs} = \boldsymbol{\varepsilon},\\
{}^4\mathbf{E}_3\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{km}\delta_{ln}\right)\cdot\cdot\left(\mathbf{i}_r\mathbf{i}_s\varepsilon_{rs}\right) = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\delta_{km}\delta_{ln}\delta_{nr}\delta_{ms}\varepsilon_{rs} =\\
&= \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\varepsilon_{lk} = \boldsymbol{\varepsilon}^T.
\end{aligned}
$$

Итак, теорема не отвергает возможность появления изотропных тензоров в определяющих уравнениях изотропных материала.

Обратим внимание на еще одно обстоятельство. Теорема не отвергает возможность появления в определяющих уравнениях тензоров и векторов, которые сами являются операторами от определяющих параметров.

Доказательство проведем методом «от противного».

Итак, допустим, что в определяющие уравнения входит какой-нибудь один материальный тензор второго ранга $\mathbf{P}$. Выпишем, например, уравнение для тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{P}\right\}. \tag{3.15}$$

Рассмотрим выражение

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\}, \tag{3.16}$$

где $\mathbf{Q}$ — некоторый постоянный тензор поворота.

В записанном выражении мы заменили векторный и тензорный базисы на повернутые, а координаты векторов и тензоров оставили теми же. Великая прелесть тензорных соотношений состоит в том, что в операторах или функциях базисы тоже заменяться на повернутые, а координаты останутся теми же самыми. Формально это означает, что имеет место следующее тождество при любом постоянном тензоре поворота $\mathbf{Q}$

$$\boldsymbol{\sigma}\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\} = \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}, \mathbf{P}\right\}\cdot\mathbf{Q}^T. \tag{3.17}$$

Вновь повторю, что это общее свойство тензорных соотношений, и оно выполняется как для изотропных материалов, так и для анизотропных. Этот вопрос подробно обсуждался в разделе 1.19 из [7].

А теперь вычислим значение напряжения (3.16) для изотропного материала. В силу определения (3.14) имеем

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\} = \\ &= \boldsymbol{\sigma}\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

При переходе от левой части к правой пропал только множитель $\mathbf{Q}^T$, стоявший в левой части справа от $\mathbf{B}$. Именно это предписывает свойство изотропии (3.14). Продолжим преобразование выражения (3.18), воспользовавшись принципом материальной объективности. В соответствии с (2.32) получаем

$$\boldsymbol{\sigma}\left\{T,\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T,\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{Q}^T,\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\}= \\ =\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\left\{T,\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{F},\mathbf{B},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\}\cdot\mathbf{Q}^T. \qquad (3.19)$$

Итак, мы получили два разных выражения для одной и той же переменной: (3.17) и (3.19). Так что, для изотропного материала имеет место равенство

$$\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\{T,\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{F},\mathbf{B},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\}\cdot\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\left\{T,\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{F},\mathbf{B},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\}\cdot\mathbf{Q}^T.$$

Умножим скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{Q}^T$ слева и на $\mathbf{Q}$ — справа. Получим

$$\boldsymbol{\sigma}\{T,\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{F},\mathbf{B},\mathbf{P}\}=\boldsymbol{\sigma}\left\{T,\boldsymbol{\Gamma},\mathbf{F},\mathbf{B},\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T\right\}.$$

Это означает, что в тензорном операторе $\boldsymbol{\sigma}\{...\}$ один из аргументов, а именно $\mathbf{P}$, может быть заменен на повернутый. В общем случае такое невозможно. А это значит, что мы пришли к противоречию. Оно — прямое следствие нашего предположения о том, что в определяющее уравнение изотропного материала входит тензор $\mathbf{P}$, не являющийся ни определяющим параметром, ни оператором от него. Однако если окажется, что повернутый тензор равен исходному

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T=\mathbf{P},$$

то такой тензор может входить в определяющее уравнение изотропного материала.

Если внести сюда представление тензора $\mathbf{P}$ в координатной форме $\mathbf{P}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l P_{kl}$, то получим

$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T=\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)P_{kl}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l P_{kl}. \qquad (3.20)$$

Как видно из (3.20) такой тензор является изотропным.

Так обстоит дело со случаем, когда в определяющее уравнение входит тензор второго ранга, не являющийся определяющим параметром. Только единичный тензор $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (3.20).

Обсудим более широкие возможности. Положим, что в определяющие уравнения помимо тензора второго ранга $\mathbf{P}$ входят еще другие материальные тензоры — вектор $\mathbf{b}$, тензор третьего ранга ${}^3\mathbf{M}$, тензор четвертого ранга ${}^4\mathbf{N}$, тензор пятого ранга ${}^5\mathbf{T}$ и т.д. Повторяя процесс рассуждений и в этом случае придем к заключению, что ни один из этих объектов не может входить в определяющие уравнения за исключением ситуации, когда их «повернутые» значения равны их исходным значениям, т.е.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k b_k=\mathbf{i}_k b_k,\\
&\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}^T=\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)P_{kl}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l P_{kl},\\
&\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_m\right)M_{klm}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m M_{klm},\\
&\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_n\right)N_{klmn}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n N_{klmn},\ldots
\end{aligned}\tag{3.21}$$

Все эти тождества должны выполняться при произвольном тензоре поворота $\mathbf{Q}$, а говоря точнее, при произвольном ортогональном тензоре $\mathbf{Q}$.

Допустим, например, что тензор $\mathbf{Q}$ является тензором инверсии

$$\mathbf{Q}=-\mathbf{E}=-\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2-\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3.$$

Подставив это выражение в (3.21), получим следующие тождества

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{i}_k b_k=\mathbf{i}_k b_k,\\
&\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l P_{kl}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l P_{kl},\\
&-\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m M_{klm}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m M_{klm},\\
&\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n N_{klmn}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n N_{klmn},\ldots
\end{aligned}\tag{3.22}$$

Рассматривая эти равенства, приходим к заключению о том, что второе, четвертое, и т.д. равенства представляют собой действительно тождества, а вот первое, третье, пятое, и т.д., т.е. нечетные равенства обращаются в тождества только тогда, когда $b_k=0,\ \ M_{klm}=0$ и т.д. Это дает

$$\mathbf{b}=0,\qquad {}^3\mathbf{M}=0,\qquad {}^5\mathbf{T}=0,\ldots,$$

т.е. тензоры нечетных рангов принимают постоянные нулевые значения. Случай

$$\mathbf{b}\neq 0,\qquad {}^3\mathbf{M}\neq 0,\qquad {}^5\mathbf{T}\neq 0,\ldots$$

абсолютно недопустим!

Это значит, что тензоры $\mathbf{b}$, ${}^3\mathbf{M}$, ${}^5\mathbf{T}$, оставаясь все время нулевыми, никак не проявляют своего влияния на значение $\boldsymbol{\sigma}$, т.е. не входят в определяющие уравнения изотропного материала.

Таким образом, появление материальных тензоров нечетного ранга в определяющих уравнениях изотропных материалов недопустимо.

Это означает, например, что появление вектора $\mathbf{h}_0(t)$ в определяющем уравнении (1.70) изотропного материала недопустимо, а вот его появление в определяющем уравнении стареющего материала (2.39) — допустимо, просто потому, что оно описывает поведение анизотропного материала.

Далее, обратим внимание на то, что тензор Леви – Чивита — это отличный от нуля тензор третьего ранга. Он не может входить в определяющее уравнение. Но ведь тензор Леви – Чивита входит в представление векторного произведения (1.61) из [7]. А это приводит к важному, но несколько неожиданному выводу: векторное произведение определяющих параметров не может входить в определяющие уравнения изотропных материалов!

Обратимся теперь к уравнениям (3.21) для тензоров четных рангов. Если тензор $\mathbf{Q}$ представляет тензор инверсии, они обратились в тождества. Но означает ли это, что эти материальные тензоры могут входить в определяющие уравнения изотропных материалов?

Они должны удовлетворять более сильным ограничениям (3.21). Однако, не все тензоры четных рангов удовлетворяют им. Например, Среди тензоров второго ранга только один удовлетворяет ему. В этом легко убедиться прямой подстановкой. Действительно, возьмем $\mathbf{P} = \mathbf{E} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \delta_{kl}$ и подставим это значение в (3.20). Тогда получим

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_l)\delta_{kl} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \delta_{kl}.$$

Процесс вычисления левой части демонстрирует следующая цепочка равенств

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_l)\delta_{kl} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_k)\left(\mathbf{i}_l \cdot \mathbf{Q}^T\right)\delta_{kl} =$$

$$= \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \delta_{kl}) \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{E} = \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \delta_{kl}.$$

Получилось, что левая часть в точности равна правой.

Проделаем соответствующие вычисления для уже встречавшихся ранее изотропных тензоров

$$\begin{aligned} {}^4\mathbf{E}_1 &= \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \delta_{kl} \delta_{mn}, \\ {}^4\mathbf{E}_2 &= \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \delta_{kn} \delta_{lm}, \\ {}^4\mathbf{E}_3 &= \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \mathbf{i}_m \mathbf{i}_n \delta_{km} \delta_{ln}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Полагая ${}^4\mathbf{N} = {}^4\mathbf{E}_1$, получим предполагаемое равенство

$$\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_n\right)\delta_{kl}\delta_{mn}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kl}\delta_{mn}.$$

Вычисление левой части демонстрирует следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_n\right)\delta_{kl}\delta_{mn}=\\&=\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{i}_l\cdot\mathbf{Q}^T\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{i}_n\cdot\mathbf{Q}^T\right)\delta_{kl}\delta_{mn}=\\&=\mathbf{Q}\cdot\left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\delta_{kl}\right)\cdot\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\cdot\left(\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{mn}\right)\cdot\mathbf{Q}^T=\\&=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Q}^T=\mathbf{E}\mathbf{E}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kl}\delta_{mn}.\end{aligned}$$

Результат этого вычисления в точности совпадает со значением правой части (3.23).

Для второго изотропного тензора можно проделать аналогичные вычисления. Полагая ${}^4\mathbf{N}={}^4\mathbf{E}_2$ и подставив это значение в (3.22), придем к предполагаемому равенству

$$\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_m\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_n\right)\delta_{kn}\delta_{lm}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kn}\delta_{lm}.$$

Запишем его по-другому, используя (1.34) из [7]

$$\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{Q}^T\right)\left(\mathbf{i}_n\cdot\mathbf{Q}^T\right)\delta_{kn}\delta_{lm}=\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{kn}\delta_{lm}. \tag{3.24}$$

Обратим внимание на то, что слева здесь стоит повернутый тензор, т.е. ${}^4\mathbf{E}_2'$, а справа ${}^4\mathbf{E}_2$, так что (3.24) фактически имеет вид

$${}^4\mathbf{E}_2'={}^4\mathbf{E}_2.$$

Умножив обе части этого равенства на $\mathbf{i}_r$ слева и на $\mathbf{i}_q$ справа, получим

$$\mathbf{i}_r\cdot{}^4\mathbf{E}_2'\cdot\mathbf{i}_q=\mathbf{i}_r\cdot{}^4\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{i}_q.$$

Снова умножим обе части этого равенства на $\mathbf{i}_s$ слева, а на $\mathbf{i}_p$ справа. Придем к следующему равенству

$$\mathbf{i}_s\cdot\left(\mathbf{i}_r\cdot{}^4\mathbf{E}_2'\cdot\mathbf{i}_q\right)\cdot\mathbf{i}_p=\mathbf{i}_s\cdot\left(\mathbf{i}_r\cdot{}^4\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{i}_q\right)\cdot\mathbf{i}_p.$$

В подробной записи это равенство имеет следующий вид

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{i}_r\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{i}_s\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{i}_q\right)\left(\mathbf{i}_n\cdot\mathbf{Q}^T\cdot\mathbf{i}_p\right)\delta_{kn}\delta_{lm}=\\&=\left(\mathbf{i}_r\cdot\mathbf{i}_k\right)\left(\mathbf{i}_s\cdot\mathbf{i}_l\right)\left(\mathbf{i}_m\cdot\mathbf{i}_q\right)\left(\mathbf{i}_n\cdot\mathbf{i}_p\right)\delta_{kn}\delta_{lm}.\end{aligned}$$

Вычислим по отдельности правую и левую части. Для правой части легко получаем следующее значение

$$R=\delta_{rk}\delta_{sl}\delta_{mq}\delta_{np}\delta_{kn}\delta_{lm}$$

и далее

$$R = \delta_{rn}\delta_{sm}\delta_{mq}\delta_{np} = \delta_{rp}\delta_{sq}. \tag{3.25}$$

Чтобы вычислить левую часть учтем, что все скобки представляют собой скаляры. Поэтому их можно группировать произвольно. Сгруппируем первую скобку с четвертой и внесем в результат δ_{kn}, и вторую с третьей и внесем в результат δ_{lm}. Получим следующее выражение

$$L = \left(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_k\right)\delta_{kn}\left(\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{i}_p\right)\left(\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{i}_l\right)\delta_{lm}\left(\mathbf{i}_m \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_q\right).$$

Перемножим рядом стоящие скобки. Тогда придем к следующему простому результату

$$L = \left(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{i}_k\mathbf{i}_n\delta_{kn}\right) \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{i}_p\right)\left(\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \left(\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\delta_{lm}\right) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_q\right).$$

Во внутренних скобках стоят тензорные единицы. Так что имеем

$$\begin{aligned} L &= \left(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{i}_p\right)\left(\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_q\right) = \\ &= \left(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{i}_p\right)\left(\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{i}_q\right) = \\ &= \left(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_p\right)\left(\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_q\right) = \left(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_p\right)\left(\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{i}_q\right) = \delta_{rp}\delta_{sq}. \end{aligned}$$

Это выражение совпало с (3.25), что означает, что равенство (3.24) действительно является тождеством.

Используя ту же самую процедуру доказательства можно доказать, что существует еще один изотропный тензор четвертого ранга

$${}^4\mathbf{E}_3 = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\delta_{km}\delta_{ln}. \tag{3.26}$$

Складывая и вычитая друг из друга ${}^4\mathbf{E}_2$ и ${}^4\mathbf{E}_3$, получим еще два изотропных тензора

$${}^4\mathbf{E}_4 = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\left(\delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{km}\delta_{ln}\right), \tag{3.27}$$

$${}^4\mathbf{E}_5 = \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l\mathbf{i}_m\mathbf{i}_n\left(\delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{ln}\right). \tag{3.28}$$

В координатной форме эти тензоры имеют представление

$$E_{klmn} = \delta_{kn}\delta_{lm} + \delta_{km}\delta_{ln} \tag{3.29}$$

и

$$E_{klmn} = \delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{ln}. \tag{3.30}$$

Первый из них симметричен по первой и второй паре индексов, а второй — антисимметричен.

Обратимся теперь к анизотропным материалам. Существуют такие материалы, для которых условия (3.14) выполняются при произвольном повороте вокруг одной фиксированной в теле оси. Такие материалы называются трансверсально изотропными. Существуют также материалы, для которых условия (3.14) выполняются при поворотах только на 180° вокруг каждой из трех ортогональных фиксированных в теле осей. Такие материалы называются ортотропными.

3.4. Примеры определяющих уравнений и их анализ с позиций определения изотропного материала.

1. Рассмотрим определяющее уравнение теплопроводности (2.34)

$$\mathbf{h} = -\kappa(T)\mathbf{\Gamma}. \tag{3.31}$$

В соответствии с теоремой 3.1 это определяющее уравнение изотропного материала.

2. Рассмотрим определяющее уравнение (2.36)

$$\mathbf{h} = -\mathbf{K}(T)\cdot\mathbf{\Gamma}. \tag{3.32}$$

В соответствии с теоремой 3.1 это определяющее уравнение анизотропного материала, поскольку в него входит материальный тензор $\mathbf{K}(T)$, не являющийся тензорным определяющим параметром. Однако с удивлением обнаруживаем, что (3.32) удовлетворяет определению (3.5) изотропного материала! Действительно, по (3.32) находим

$$\mathbf{h}_H = -\mathbf{K}(T_H)\cdot\mathbf{\Gamma}_H,$$

что при учете (3.6) и (3.7) дает

$$\mathbf{h}_H = -\mathbf{K}(T)\cdot\mathbf{\Gamma} = \mathbf{h}.$$

Так что, определение (3.5) выполнено. В чем же дело? Каким же является материал с определяющим уравнением (3.32) — изотропным или анизотропным?

Разгадка проста: как показано в разделе 2.4, определяющее уравнение (3.32) вообще не может быть определяющим уравнением, ибо не удовлетворяет принципу материальной объективности.

3. Рассмотрим определяющее уравнение (2.37), представляющее усовершенствованное уравнение теплопроводности

$$\mathbf{h} = -\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{K}^*(T)\cdot\mathbf{B}^T\right)\cdot\mathbf{\Gamma}. \tag{3.33}$$

Оно удовлетворяет принципу материальной объективности и, значит, имеет право на ответственную роль определяющего уравнения. В него входят два определяющих параметра $\mathbf{B}$ и $\mathbf{\Gamma}$, и кроме этого материальный тензор $\mathbf{K}^*(T)$. Наличие последнего свидетельствует о том, что (3.33) — это определяющее уравнение анизотропного материала.

4. Рассмотрим определяющее уравнение (2.45)

$$\boldsymbol{\sigma} = A_0\mathbf{E} + A_1\mathbf{D} + A_2\mathbf{D}^2, \qquad (3.34)$$

где

$$A_k = A_k\left(T, \mathrm{I}_{1\mathbf{D}}, \mathrm{I}_{2\mathbf{D}}, \mathrm{I}_{3\mathbf{D}}\right).$$

В это уравнение не входит ни один тензорный или векторный определяющий параметр. Однако в него входит тензор скоростей деформаций, который является оператором от $\mathbf{F}$ и $\mathbf{B}$. Таким образом, определяющее уравнение (2.45) описывает поведение изотропного вязкого материала в полном соответствии с разъяснениями к теореме 3.1. В этом можно убедиться и непосредственно, если использовать формулы (3.13).

5. А вот определяющее уравнение (2.49)

$$\boldsymbol{\sigma} = B_0\mathbf{E} + B_1\mathbf{F} + B_2\mathbf{F}^2, \qquad B_k = B_k\left(T, \mathrm{I}_{1\mathbf{F}}, \mathrm{I}_{2\mathbf{F}}, \mathrm{I}_{3\mathbf{F}}\right)$$

описывает поведение изотропного упругого материала. Действительно, в него входит тензор Фингера, который, несомненно, является определяющим параметром.

6. Рассматриваем теперь определяющее уравнение (2.50)

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^2\mathbf{C} + {}^4\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{F} + \left({}^6\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{F}\right)\cdot\cdot\mathbf{F} + \left(\left({}^8\mathbf{C}\cdot\cdot\mathbf{F}\right)\cdot\cdot\mathbf{F}\right)\cdot\cdot\mathbf{F} + \ldots \qquad (3.35)$$

В разделе 2.4 было показано, что материальные тензоры ${}^2\mathbf{C}$, ${}^4\mathbf{C}$, ${}^6\mathbf{C}$... должны быть заданы своими разложениями (2.52) во вращающемся базисе, и только тогда ограничения принципа материальной объективности будут выполнены. Так что, уравнение (2.50) описывает поведение анизотропного упругого материала.

7. Наконец, рассматриваем определяющее уравнение (2.55)

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^2\mathbf{A} + {}^4\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{D} + \left({}^6\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{D}\right)\cdot\cdot\mathbf{D} + \left(\left({}^8\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{D}\right)\cdot\cdot\mathbf{D}\right)\cdot\cdot\mathbf{D} + \ldots \qquad (3.36)$$

при условиях, что материальные тензоры ${}^m\mathbf{A}$ заданы своими разложениями (2.56) во вращающемся базисе. Убеждаемся, что последнее уравнение описывает поведение анизотропного вязкого материала.

4. МЕТОД РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

4.1. Реологические модели в механике деформируемых тел

Метод реологических моделей впервые появился в линейной механике деформируемых тел [8].

Реология — это наука о течении. Таков перевод с греческого языка. Под словами «реология» понимается течение материалов под нагрузкой, т.е., иными словами, деформирование материалов под нагрузкой. Но ведь эта же задача стоит и перед теорией определяющих уравнений. Правда проблема формулируется несколько иначе: какие нагрузки нужно приложить к материалу, если деформировать его по какому-нибудь закону. Таким образом, мы усматриваем сходство проблем названных наук. Так что, реологию следует считать предшественницей теории определяющих уравнений.

В реологии каждому реологическому уравнению ставиться в соответствие некоторая символическая модель. Это может быть символическая модель упругого поведения — пружинка. Это может быть модель вязкого поведения — демпфер вязкого трения. Это может быть модель пластического поведения — демпфер сухого трения. Наконец, это могут быть модели сложного поведения. Например, символическая модель вязкоупругого поведения составлялась из пружинок и демпферов вязкого трения. Далее, символическая модель упругопластического поведения составлялась из пружинок и демпферов сухого трения. Наконец, символическая модель вязко-упруго-пластического поведения составлялась из пружинок, демпферов вязкого трения и демпферов сухого трения. Эти символические модели являются реологическими моделями. В них элементы, описывающие чисто упругое, чисто вязкое и чисто пластическое поведения соединялись параллельно или последовательно. Получалась реологическая модель, описывающая символически поведение материала. Реологические модели наглядно, но качественно демонстрировали характер поведения. Так вот, с помощью этих моделей по определенным правилам составлялись реологические уравнения материалов со сложными свойствами. Переведя на современный язык, можно сказать, что составлялись определяющие уравнения.

Цель этой главы состоит в приспособлении идеи метода реологических моделей к составлению определяющих уравнений в нелинейной термомеханике деформируемых тел. Один вариант такого приспособления представлен в книге [9].

4.2. Модифицированная форма определяющих уравнений

Везде выше мы записывали определяющие уравнения в форме операторов (1.15), (1.16) и, наконец, в форме (1.17)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}, \\ \mathbf{h} = \mathbf{h}\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}, \\ \psi = \psi\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}, \\ S = S\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Введем новые реакции: модифицированный тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}$ и модифицированный вектор теплового потока $\mathbf{H}$ — по следующим формулам

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}\sqrt{|\mathbf{F}|}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{h}\sqrt{|\mathbf{F}|}, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{F}$ — тензор Фингера.

В результате определяющие уравнения (4.1) преобразуются к следующему виду

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}, \\ \psi = \psi\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}, \\ S = S\{T,\, \boldsymbol{\Gamma},\, \mathbf{F},\, \mathbf{B}\}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Конечно, стоящие здесь операторы $\boldsymbol{\Sigma}$ и $\mathbf{H}$ отличаются от операторов $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{h}$. Модифицированный тензор напряжений имеет в литературе еще и другое название. Это — тензор напряжений Кирхгофа первого рода, а модифицированный вектор теплового потока никакого нового названия не имеет.

Очевидно, что в новых переменных (4.2) принцип материальной объективности имеет форму, аналогичную (2.29), т.е.

$$\mathbf{\Sigma}_Q = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{H}_Q = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{H}, \quad \psi_Q = \psi, \quad S_Q = S. \tag{4.4}$$

А вот с универсальным диссипативным неравенством

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\cdot\mathbf{D} - \rho\dot{\psi} - \rho S\dot{T} - \frac{1}{T}\mathbf{h}\cdot\mathbf{\Gamma} \geq 0$$

что-то произойдет.

Чтобы увидеть это, умножим обе части этого неравенства на положительную величину $\sqrt{|\mathbf{F}|}$. Тогда получим

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\sqrt{|\mathbf{F}|}\right)\cdot\cdot\mathbf{D} - \rho\sqrt{|\mathbf{F}|}\dot{\psi} - \rho\sqrt{|\mathbf{F}|}S\dot{T} - \frac{1}{T}\left(\mathbf{h}\sqrt{|\mathbf{F}|}\right)\cdot\mathbf{\Gamma} \geq 0.$$

Новые переменные уже выделились, но появилась величина $\rho\sqrt{|\mathbf{F}|}$, которая в силу формулы (2.8) из [6] равна начальной плотности ρ_0, т.е.

$$\rho\sqrt{|\mathbf{F}|} = \rho_0.$$

Таким образом, универсальное диссипативное неравенство принимает немного измененный вид

$$\mathbf{\Sigma}\cdot\cdot\mathbf{D} - \rho_0\dot{\psi} - \rho_0 S\dot{T} - \frac{1}{T}\mathbf{H}\cdot\mathbf{\Gamma} \geq 0. \tag{4.5}$$

Чрезвычайно важно для последующего то, что ρ_0 не изменяется во времени. Последнее требование — требование изотропии (3.5)

$$\mathbf{\Sigma}_H = \mathbf{\Sigma}, \quad \mathbf{H}_H = \mathbf{H}, \quad \psi_H = \psi, \quad S_H = S. \tag{4.6}$$

4.3. Описание метода реологических моделей

Как уже говорилось во введении к этой главе, метод реологических моделей позволяет получать новые определяющие уравнения путем комбинирования некоторых уже известных. Ниже мы опишем процедуру такого комбинирования.

Допустим, что мы имеем семейство определяющих уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \\ \psi = \psi_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \\ S = S_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \end{cases}$$
$$\alpha = 1,2,3,...,N. \tag{4.7}$$

Полагаем, что это хорошие определяющие уравнения, т.е. что они удовлетворяют универсальному диссипативному неравенству (4.5), принципу материальной объективности (4.4) и, наконец, требованию изотропии (4.6).

Полагаем, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= (\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}), \\ \dot{\mathbf{B}} &= -\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{B}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

встречавшиеся в механике деформируемых тел (см. например [6]).

Возникает необходимость рассматривать разные термомеханические процессы в разных членах семейства определяющих уравнений (4.7), причем различать будем только $\mathbf{F}$. Тогда термомеханический процесс будет разным в разных членах семейства (4.7)

$$T = T(\mathbf{R}, \tau), \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{R}, \tau), \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{R}, \tau), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{R}, \tau), \quad 0 < \tau < t. \tag{4.9}$$

Но тогда окажется, что и реакции $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{H}$, ψ и S в определяющих уравнениях тоже будут разными, т.е. будут иметь номер α

$$\begin{cases} \mathbf{\Sigma}_\alpha = \mathbf{\Sigma}_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\}, \\ \mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\}, \\ \psi_\alpha = \psi_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\}, \\ S_\alpha = S_\alpha \{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\}, \end{cases}$$
$$\alpha = 1,2,3,...,N. \tag{4.10}$$

Полагаем, что все эти уравнения для каждого α удовлетворяют требованиям принципа материальной объективности (4.4)

$$\mathbf{\Sigma}_{\alpha Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Sigma}_\alpha \cdot \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{H}_{\alpha Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{H}_\alpha, \quad \psi_{\alpha Q} = \psi_\alpha, \quad S_{\alpha Q} = S_\alpha \tag{4.11}$$

и требованиям универсального диссипативного неравенства (4.5)

$$\mathbf{\Sigma}_\alpha \cdot\cdot\, \mathbf{D}_\alpha - \rho_0 \dot{\psi}_\alpha - \rho_0 S_\alpha \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{\Gamma} \geq 0. \tag{4.12}$$

Наконец, полагаем, что выполняются равенства (4.8), опять-таки для каждого α

$$\dot{\mathbf{F}}_\alpha = \left(\mathbf{D}_\alpha - \mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha\cdot\left(\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{\Omega}\right). \tag{4.13}$$

Кроме того, считаем, что они соответствуют определению изотропного материала (4.6)

$$\mathbf{\Sigma}_{\alpha H} = \mathbf{\Sigma}_\alpha, \quad \mathbf{H}_{\alpha H} = \mathbf{H}_\alpha, \quad \psi_{\alpha H} = \psi_\alpha, \quad S_{\alpha H} = S_\alpha. \tag{4.14}$$

Каждому уравнению семейства (4.10) ставим в соответствие некоторую символическую или реологическую модель и тоже отмечаем эту модель индексом α. Такие модели показаны на рис. 4.1а.

В качестве принципа композиции новых реологических моделей принимаем параллельное и последовательное соединения элементов. Они показаны на рис. 4.1б и 4.1в. Это все просто и понятно. Но пока не понятно, какие уравнения следует записать. Будем рассуждать так. Если бы это были реальные механические модели, то мы, не без основания, сказали бы, что при параллельном соединении этих моделей усилия складываются, а удлинения принимаются равными, а при последовательном — удлинения складываются, а усилия принимаются равными. А теперь воспользуемся соображениями аналогии: тензоры напряжений аналогичны силам, а удлинения — деформациям или скорости удлинений аналогичны тензору скоростей деформаций. Эта аналогия подталкивает написать следующие законы соединения.

1. Параллельное соединение

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_\alpha + \mathbf{\Sigma}_\beta, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}_\alpha = \mathbf{D}_\beta. \tag{4.15}$$

2. Последовательное соединение

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_\alpha = \mathbf{\Sigma}_\beta, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta. \tag{4.16}$$

Кроме этих условий принимаем в обоих случаях

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\beta, \quad \psi = \psi_\alpha + \psi_\beta, \quad S = S_\alpha + S_\beta. \tag{4.17}$$

Упомянутая выше аналогия только подталкивала написать уравнения (4.15), (4.16), (4.17). Однако, в конце концов, это проявление нашей воли, и надо воспринимать написанные формулы как определения. Ведь мы могли написать и иначе. Ну, например, в (4.15) и (4.16) мы могли вместо тензора скоростей деформаций использовать какой-нибудь тензор деформаций.

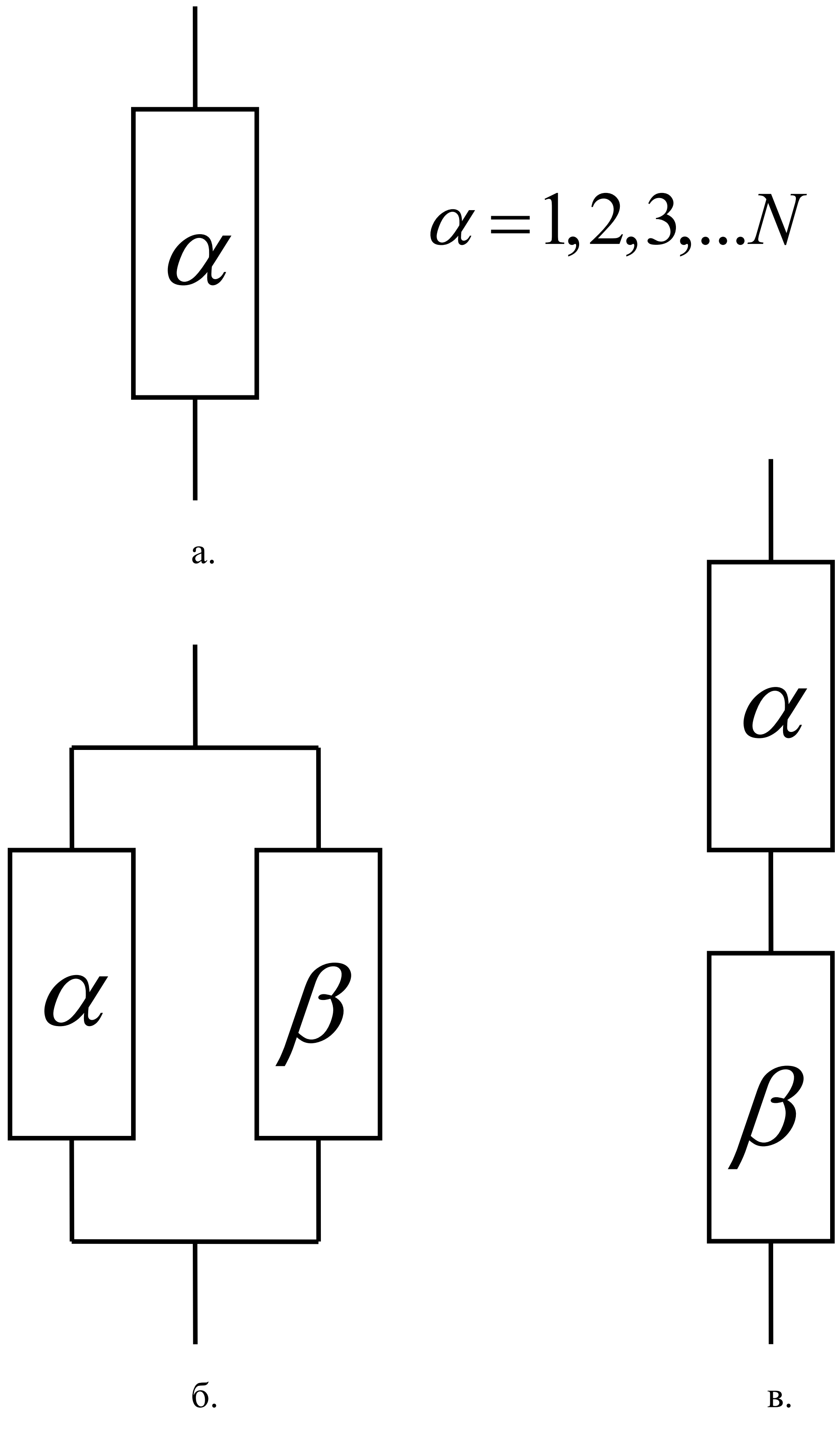

Рис. 4.1. Реологические модели

Однако мы не сделали этого! Почему? Кроме того, в этих формулах соединения вместо модифицированных напряжений мы могли использовать не модифицированные напряжения, т.е. напряжения Коши. Однако мы не сделали и этого! Почему? А просто потому, что мы не смогли бы тогда доказать важные теоремы, о которых речь пойдет ниже.

Легко видеть, что каждый из способов соединения действительно приводит к новым определяющим уравнениям.

Действительно, при параллельном соединении имеем следующие уравнения

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{F}}_\alpha = \left(\mathbf{D}_\alpha - \mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha\cdot\left(\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{\Omega}\right),\\
&\dot{\mathbf{F}}_\beta = \left(\mathbf{D}_\beta - \mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F}_\beta + \mathbf{F}_\beta\cdot\left(\mathbf{D}_\beta + \mathbf{\Omega}\right),\\
&\dot{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}\right),\\
&\mathbf{D} = \mathbf{D}_\alpha = \mathbf{D}_\beta.
\end{aligned}$$

К этим уравнениям следует добавить какие-нибудь начальные условия. Пусть, например, они одинаковы

$$t = 0, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}_a = \mathbf{F}_\beta = \mathbf{E}.$$

Легко увидеть, что в этом случае уравнения и начальные условия для $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_\alpha$ и $\mathbf{F}_\beta$ одинаковы. По теореме о единственности решения задачи Коши в любой момент будем иметь

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_\beta = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{D}_a = \mathbf{D}_\beta = \mathbf{D}.$$

Подставив эти выражения в силовое условие (4.15) и в дополнительные условия (4.17), получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_\alpha + \mathbf{\Sigma}_\beta = \mathbf{\Sigma}_\alpha\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\} + \mathbf{\Sigma}_\beta\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\},\\
&\mathbf{H} = \mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\beta = \mathbf{H}_\alpha\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\} + \mathbf{H}_\beta\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\},\\
&\psi = \psi_\alpha + \psi_\beta = \psi_\alpha\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\} + \psi_\beta\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\},\\
&S = S_\alpha + S_\beta = S_\alpha\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\} + S_\beta\left\{T, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Это и есть новые определяющие уравнения, полученные при параллельном соединении элементов реологической модели.

С последовательным соединением элементов модели дело обстоит намного сложнее. При последовательном соединении имеем следующие уравнения

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\Sigma}_\alpha\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\beta, \mathbf{B}\}, \\
\dot{\mathbf{F}}_\alpha = (\mathbf{D}_\alpha - \boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{F}_\alpha\cdot(\mathbf{D}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}), \\
\dot{\mathbf{F}}_\beta = (\mathbf{D}_\beta - \boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{F}_\beta + \mathbf{F}_\beta\cdot(\mathbf{D}_\beta + \boldsymbol{\Omega}), \\
\dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{D} - \boldsymbol{\Omega})\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot(\mathbf{D} + \boldsymbol{\Omega}), \\
\mathbf{D} = \mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta.
\end{cases}
\tag{4.19}
$$

Это система функционально-дифференциальных уравнений для определения неизвестных $\mathbf{F}_\alpha$, $\mathbf{F}_\beta$, $\mathbf{D}_\alpha$, $\mathbf{D}_\beta$ и $\mathbf{D}$ по заданному термомеханическому процессу T, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{B}$. В качестве начальных условий примем

$$
t = 0, \qquad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_\beta = \mathbf{E}.
$$

Полагаем, что решение этой задачи Коши существует и единственно. Тогда все неизвестные величины оказываются функционалами термомеханического процесса. Например, для $\mathbf{F}_\alpha$ и $\mathbf{F}_\beta$ получим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_\alpha &= \mathbf{F}_\alpha\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}, \\
\mathbf{F}_\beta &= \mathbf{F}_\beta\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}, \mathbf{B}\}.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Выписывая теперь силовые условия (4.16) и дополнительные условия (4.17), получим

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\beta, \mathbf{B}\}, \\
\mathbf{H} = \mathbf{H}_\alpha\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\} + \mathbf{H}_\beta\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\beta, \mathbf{B}\}, \\
\psi = \psi_\alpha\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\} + \psi_\beta\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\beta, \mathbf{B}\}, \\
S = S_\alpha\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\alpha, \mathbf{B}\} + S_\beta\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_\beta, \mathbf{B}\}.
\end{cases}
\tag{4.21}
$$

Поскольку $\mathbf{F}_\alpha$ и $\mathbf{F}_\beta$ в силу (4.20) — операторы термомеханического процесса T, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$, их подстановка в (4.21) приводит к операторам от термомеханического процесса $\boldsymbol{\Sigma}\{...\}$, $\mathbf{H}\{...\}$, $\psi\{...\}$ и $S\{...\}$.

Таким образом, выражения (4.21) с учетом решений (4.20) представляют собой определяющие уравнения материала, реологическая модель которого представляет последовательное соединение составляющих элементов.

Полученные определяющие уравнения можно включить в семейство (4.7) и использовать при последующем комбинировании. Таким образом, метод реологических моделей дает возможность получать все новые и новые определяющие уравнения материалов со все более и более сложными свойствами.

4.4. Теоремы об определяющих уравнениях, полученных методом реологических моделей

Справедливы следующие три теоремы о новых определяющих уравнениях.

Теорема 4.1. Новые определяющие уравнения, полученные с использованием реологических моделей, удовлетворяют универсальному диссипативному неравенству.

Теорема 4.2. Новые определяющие уравнения удовлетворяют принципу материальной объективности.

Теорема 4.3. Новые определяющие уравнения соответствуют некоторому изотропному материалу, если все определяющие уравнения семейства (4.7) и (4.10) представляли собой определяющие уравнения изотропных материалов.

Докажем первую теорему. Начнем с параллельного соединения. Подставляя представление напряжения по (4.15) и выражения остальных переменных по (4.17) в (4.5), получим

$$\left(\mathbf{\Sigma}_\alpha + \mathbf{\Sigma}_\beta\right)\cdot\cdot\,\mathbf{D} - \rho_0\left(\dot{\psi}_\alpha + \dot{\psi}_\beta\right) - \rho_0\left(S_\alpha + S_\beta\right)\dot{T} - \frac{1}{T}\left(\mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\beta\right)\cdot\mathbf{\Gamma} \geq 0.$$

Разделяя теперь переменные с разными индексами, придем к следующему неравенству

$$\left(\mathbf{\Sigma}_\alpha \cdot\cdot\,\mathbf{D} - \rho_0\dot{\psi}_\alpha - \rho_0 S_\alpha \dot{T} - \frac{1}{T}\mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{\Gamma}\right) +$$
$$+\left(\mathbf{\Sigma}_\beta \cdot\cdot\,\mathbf{D} - \rho_0\dot{\psi}_\beta - \rho_0 S_\beta \dot{T} - \frac{1}{T}\mathbf{H}_\beta \cdot \mathbf{\Gamma}\right) \geq 0.$$

Учтем, наконец, кинематическое условие (4.15)

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_\alpha = \mathbf{D}_\beta$$

и в первую скобку внесем $\mathbf{D} = \mathbf{D}_\alpha$, а во вторую — $\mathbf{D} = \mathbf{D}_\beta$. Тогда это неравенство преобразуется к следующему виду

$$\begin{gathered}\left(\boldsymbol{\Sigma}_\alpha \cdot\cdot \mathbf{D}_\alpha - \rho_0 \dot{\psi}_\alpha - \rho_0 S_\alpha \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{H}_\alpha \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) + \\ + \left(\boldsymbol{\Sigma}_\beta \cdot\cdot \mathbf{D}_\beta - \rho_0 \dot{\psi}_\beta - \rho_0 S_\beta \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{H}_\beta \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) \geq 0. \end{gathered} \tag{4.22}$$

С большим удовольствием обнаруживаем, что в силу (4.12) каждая скобка неотрицательна. Так что, универсальное диссипативное неравенство выполняется.

Обратимся теперь к последовательному соединению реологических элементов в модели.

Подставив (4.16) и все остальные переменные по (4.17) в (4.5), придем к следующему неравенству

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot\cdot \left(\mathbf{D}_\alpha + \mathbf{D}_\beta \right) - \rho_0 \left(\dot{\psi}_\alpha + \dot{\psi}_\beta \right) - \rho_0 \left(S_\alpha + S_\beta \right) \dot{T} - \frac{1}{T} \left(\mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\beta \right) \cdot \boldsymbol{\Gamma} \geq 0.$$

Разделив переменные с разными индексами, преобразуем его к такой форме

$$\begin{gathered}\left(\boldsymbol{\Sigma} \cdot\cdot \mathbf{D}_\alpha - \rho_0 \dot{\psi}_\alpha - \rho_0 S_\alpha \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{H}_\alpha \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) + \\ + \left(\boldsymbol{\Sigma} \cdot\cdot \mathbf{D}_\beta - \rho_0 \dot{\psi}_\beta - \rho_0 S_\beta \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{H}_\beta \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) \geq 0. \end{gathered}$$

Учтем теперь силовое условие (4.16)

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \boldsymbol{\Sigma}_\beta$$

и подставим в первую скобку $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha$, а во вторую — $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta$. Тогда последнее неравенство примет следующий вид

$$\begin{gathered}\left(\boldsymbol{\Sigma}_\alpha \cdot\cdot \mathbf{D}_\alpha - \rho_0 \dot{\psi}_\alpha - \rho_0 S_\alpha \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{H}_\alpha \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) + \\ + \left(\boldsymbol{\Sigma}_\beta \cdot\cdot \mathbf{D}_\beta - \rho_0 \dot{\psi}_\beta - \rho_0 S_\beta \dot{T} - \frac{1}{T} \mathbf{H}_\beta \cdot \boldsymbol{\Gamma} \right) \geq 0. \end{gathered} \tag{4.23}$$

С неменьшей радостью, чем раньше, обнаруживаем, что каждая скобка в силу (4.12) неотрицательна, так что универсальное диссипативное неравенство (4.23) выполняется тождественно.

Анализируя процесс доказательства, замечаем, что решающую роль в этом процессе играет кинематическое условие (4.16). Если написать по-другому, например, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta$, то доказательство развалится.

Перейдем к доказательству второй и третьей теорем.

Начнем с параллельного соединения элементов модели. Выше было показано, что определяющие уравнения могут быть представлены в форме (4.18).

Подставляя их в требование принципа материальной объективности (4.4), получим следующие предполагаемые равенства

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha Q} + \boldsymbol{\Sigma}_{\beta Q} = \mathbf{Q} \cdot \left(\boldsymbol{\Sigma}_\alpha + \boldsymbol{\Sigma}_\beta \right) \cdot \mathbf{Q}^T, \\
&\mathbf{H}_{\alpha Q} + \mathbf{H}_{\beta Q} = \mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\beta \right), \\
&\psi_{\alpha Q} + \psi_{\beta Q} = \psi_\alpha + \psi_\beta, \\
&S_{\alpha Q} + S_{\beta Q} = S_\alpha + S_\beta.
\end{aligned}$$

В силу принятых ранее предположений (4.11) об элементах модели эти равенства выполняются тождественно. Следовательно, требование принципа материальной объективности выполнено.

Подставим уравнения (4.18) в (4.6), выражающие требование изотропии материала. Получим следующие равенства

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha H} + \boldsymbol{\Sigma}_{\beta H} = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha + \boldsymbol{\Sigma}_\beta, \\
&\mathbf{H}_{\alpha H} + \mathbf{H}_{\beta H} = \mathbf{H}_\alpha + \mathbf{H}_\beta, \\
&\psi_{\alpha H} + \psi_{\beta H} = \psi_\alpha + \psi_\beta, \\
&S_{\alpha H} + S_{\beta H} = S_\alpha + S_\beta.
\end{aligned}$$

Сравнивая эти уравнения с условиями (4.14), убеждаемся в том, что они выполняются тождественно. Таким образом, определяющие уравнения, полученные путем параллельного соединения элементов, описывают поведение изотропного материала.

Значительно труднее доказать теоремы 4.2 и 4.3 для случая последовательного соединения элементов. Нам предстоит доказать, что уравнения (4.21) удовлетворяют требованиям принципа материальной объективности. Доказательство существенно осложняется тем, что нам заранее неизвестно, как выражаются тензоры Фингера $\mathbf{F}_{\alpha Q}$ и $\mathbf{F}_{\beta Q}$ в $\mathbf{Q}$ – движении. Необходимо вспомнить, что в основном движении они определялись системой уравнений (4.19). Поэтому для их определения следует использовать ту же систему уравнений, но записанную для $\mathbf{Q}$ – движения. Последняя имеет следующий вид

$$\begin{cases} \mathbf{\Sigma}_\alpha\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}_{\alpha Q}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\right\} = \mathbf{\Sigma}_\beta\left\{T, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Gamma}, \mathbf{F}_{\beta Q}, \mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}\right\}, \\ \dot{\mathbf{F}}_{\alpha Q} = \left(\mathbf{D}_{\alpha Q} - \mathbf{\Omega}_Q\right)\cdot\mathbf{F}_{\alpha Q} + \mathbf{F}_{\alpha Q}\cdot\left(\mathbf{D}_{\alpha Q} + \mathbf{\Omega}_Q\right), \\ \dot{\mathbf{F}}_{\beta Q} = \left(\mathbf{D}_{\beta Q} - \mathbf{\Omega}_Q\right)\cdot\mathbf{F}_{\beta Q} + \mathbf{F}_{\beta Q}\cdot\left(\mathbf{D}_{\beta Q} + \mathbf{\Omega}_Q\right), \\ \dot{\mathbf{F}}_Q = \left(\mathbf{D}_Q - \mathbf{\Omega}_Q\right)\cdot\mathbf{F}_Q + \mathbf{F}_Q\cdot\left(\mathbf{D}_Q + \mathbf{\Omega}_Q\right), \\ \mathbf{D}_Q = \mathbf{D}_{\alpha Q} + \mathbf{D}_{\beta Q}. \end{cases} \tag{4.24}$$

Это система уравнений для определения неизвестных $\mathbf{F}_{\alpha Q}$, $\mathbf{F}_{\beta Q}$, $\mathbf{D}_{\alpha Q}$, $\mathbf{D}_{\beta Q}$, $\mathbf{D}_Q$ по заданному термомеханическому процессу T, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{F}_Q = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}^T$ и $\mathbf{B}$, причем тензор $\mathbf{Q}$ — произвольный ортогональный тензор, произвольно зависящий от времени.

Далее, из общей теории принципа материальной объективности имеем следующие представления $\mathbf{\Omega}_Q$ (2.22)

$$\mathbf{\Omega}_Q = \mathbf{Q}\cdot\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{Q}^T + \mathbf{q}, \tag{4.25}$$

причем антисимметричный тензор $\mathbf{q}$ вычисляется по уравнению

$$\mathbf{q} = -\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^T. \tag{4.26}$$

В качестве начальных условий примем, как и выше, следующие условия

$$t = 0, \qquad \mathbf{F}_{\alpha Q} = \mathbf{E}, \qquad \mathbf{F}_{\beta Q} = \mathbf{E}. \tag{4.27}$$

Итак, нам предстоит найти решение задачи Коши (4.24), (4.27) при дополнительных условиях (4.25).

Рассуждение начнем с утверждения о том, что, как всякая задача Коши, сформулированная задача имеет решение, и оно единственно. Значит, остается угадать какое-нибудь решение, и оно будет тем, которое мы разыскиваем. Общая теория принципа материальной объективности помогает отгадать это решение.

Как уже указано в комментарии к сформулированной задаче Коши, из общей теории известен закон изменения тензора Фингера в $\mathbf{Q}$ – движении. Он таков:

$$\mathbf{F}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T, \tag{4.28}$$

где $\mathbf{F}$ — известный тензор Фингера в основном движении.

Но ведь из общей теории известно, что тензор скоростей деформаций в этом же движении имеет следующее представление (2.21)

$$\mathbf{D}_Q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T, \tag{4.29}$$

где $\mathbf{D}$ — известный тензор скоростей деформаций в основном движении.

Получилось так, что одна из неизвестных задачи Коши (4.24), (4.27) при дополнительном условии (4.25) известна. Но ведь она входит в четвертое уравнение системы (4.24). Возникает тяжелый вопрос, удовлетворяется ли оно тождественно решением (4.29) при условии (4.28). Непосредственная проверка показывает, что оно действительно удовлетворяется! Чтобы убедиться в этом, вычислим по отдельности левую и правую части этого четвертого уравнения $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$. Имеем

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}_Q = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{Q}}^T.$$

С учетом (4.26) это выражение упрощается и принимает следующий вид

$$\mathbf{L} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{q}$$

или

$$\mathbf{L} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{F}_Q + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{F}_Q \cdot \mathbf{q}. \tag{4.30}$$

Прямое вычисление правой части четвертого уравнения с учетом (4.25) дает следующий результат

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \left(\mathbf{D}_Q - \mathbf{\Omega}_Q\right) \cdot \mathbf{F}_Q + \mathbf{F}_Q \cdot \left(\mathbf{D}_Q + \mathbf{\Omega}_Q\right) = \\ &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{F}_Q + \mathbf{Q} \cdot \left(\left(\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}\right) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}\right)\right) \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{F}_Q \cdot \mathbf{q}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Приравняем теперь левую и правую части, т.е. запишем условие

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}.$$

Прямая подстановка сюда (4.30) и (4.31) приводит к следующему уравнению

$$\begin{aligned} &-\mathbf{q} \cdot \mathbf{F}_Q + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{F}_Q \cdot \mathbf{q} = \\ &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{F}_Q + \mathbf{Q} \cdot \left(\left(\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}\right) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}\right)\right) \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{F}_Q \cdot \mathbf{q}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

В правой и левой частях много одинаковых слагаемых, и они, конечно, взаимно уничтожаются, и уравнение (4.32) принимает вид

$$\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \left(\left(\mathbf{D} - \mathbf{\Omega}\right) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \left(\mathbf{D} + \mathbf{\Omega}\right)\right) \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Замечаем, что в силу (4.8) оно действительно удовлетворяется!

А теперь сравним второе и третье уравнения системы (4.24) с уже решенным четвертым уравнением. Они очень похожи. Это сходство подсказывает попытаться найти их решение по аналогии с тем, как это было сделано с четвертым, т.е. написать формулы подобные (4.28) и (4.29)

$$\mathbf{F}_{\alpha Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{Q}^T, \qquad \mathbf{F}_{\beta Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{\beta} \cdot \mathbf{Q}^T, \tag{4.33}$$

$$\mathbf{D}_{\alpha Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_{\alpha} \cdot \mathbf{Q}^T, \qquad \mathbf{D}_{\beta Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_{\beta} \cdot \mathbf{Q}^T. \tag{4.34}$$

Воспроизводя все вычисления, связанные с четвертым уравнением, увидим, что оба уравнения удовлетворяются, если имеет место (4.13). Не зря же мы накладывали это дополнительное условие! Вот оно и понадобилось. Если теперь внести (4.34) и (4.29) в пятое уравнение системы, то получим

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{D}_{\alpha} + \mathbf{D}_{\beta} \right) \cdot \mathbf{Q}^T.$$

В силу условия последовательного соединения (4.16) оно удовлетворяется.

Остается разобраться с первым уравнением системы (4.24). Для этого запишем его и подставим в него (4.33). Получим следующее уравнение

$$\mathbf{\Sigma}_{\alpha} \left\{ T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \right\} = \mathbf{\Sigma}_{\beta} \left\{ T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Gamma}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}_{\beta} \cdot \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \right\}.$$

Здесь слева и справа оказались значения модифицированных напряжений $\mathbf{\Sigma}_{\alpha}$ и $\mathbf{\Sigma}_{\beta}$ в $\mathbf{Q}-$движении. Получаем возможность упростить это уравнение с помощью принятых ранее дополнительных условий (4.11). Результат упрощений таков

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Sigma}_{\alpha} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Sigma}_{\beta} \cdot \mathbf{Q}^T.$$

Умножая на $\mathbf{Q}^T$ слева и на $\mathbf{Q}$ справа, получим

$$\mathbf{\Sigma}_{\alpha} = \mathbf{\Sigma}_{\beta}.$$

Но ведь это силовое условие последовательного соединения (4.16), и, значит, оно выполняется.

У нас еще не были рассмотрены последние три уравнения (4.21). Теперь уже легко убедиться, что в силу (4.33) все они тоже удовлетворяют принципу материальной объективности.

Перейдем теперь к доказательству того, что система определяющих уравнений (4.21) описывает изотропный материал. Нам предстоит доказать, что определяющие уравнения удовлетворяют условию (4.6). Чтобы сделать это запишем (4.21) для $\mathbf{H}-$движения

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_H = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\alpha H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\beta H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\}, \\ \mathbf{H}_H = \mathbf{H}_\alpha\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\alpha H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\} + \mathbf{H}_\beta\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\beta H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\}, \\ \psi_H = \psi_\alpha\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\alpha H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\} + \psi_\beta\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\beta H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\}, \\ S_H = S_\alpha\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\alpha H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\} + S_\beta\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\beta H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\}. \end{cases} \tag{4.35}$$

К сожалению, нам не известны значения функций $\mathbf{F}_{\alpha H}$ и $\mathbf{F}_{\beta H}$. Для их определения следует использовать систему уравнений (4.19), записанную для $\mathbf{H}-$движения. Она имеет следующий вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_\alpha\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\alpha H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\beta H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\}, \\ \dot{\mathbf{F}}_{\alpha H} = \left(\mathbf{D}_{\alpha H} - \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F}_{\alpha H} + \mathbf{F}_{\alpha H}\cdot\left(\mathbf{D}_{\alpha H} + \boldsymbol{\Omega}\right), \\ \dot{\mathbf{F}}_{\beta H} = \left(\mathbf{D}_{\beta H} - \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F}_{\beta H} + \mathbf{F}_{\beta H}\cdot\left(\mathbf{D}_{\beta H} + \boldsymbol{\Omega}\right), \\ \dot{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{D}_H - \boldsymbol{\Omega}\right)\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{D}_H + \boldsymbol{\Omega}\right), \\ \mathbf{D}_H = \mathbf{D}_{\alpha H} + \mathbf{D}_{\beta H}. \end{cases} \tag{4.36}$$

Напомню, что это система уравнений для определения $\mathbf{F}_{\alpha H}$, $\mathbf{F}_{\beta H}$, $\mathbf{D}_{\alpha H}$, $\mathbf{D}_{\beta H}$, $\mathbf{D}_H$ по заданному термомеханическому процессу T, $\boldsymbol{\Gamma}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{B}$. Из общей теории известна одна из неизвестных, а именно $\mathbf{D}_H$

$$\mathbf{D}_H = \mathbf{D}.$$

Далее, полагаем, что

$$\mathbf{F}_{\alpha H} = \mathbf{F}_\alpha, \qquad \mathbf{F}_{\beta H} = \mathbf{F}_\beta, \tag{4.37}$$

$$\mathbf{D}_{\alpha H} = \mathbf{D}_\alpha, \qquad \mathbf{D}_{\beta H} = \mathbf{D}_\beta. \tag{4.38}$$

Этими решениями удовлетворяются все четыре последних уравнения (4.36). При этом, конечно, нужно вспомнить кинематическое условие (4.16) для последовательного соединения элементов реологической модели. Первое же уравнение примет вид

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\alpha H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta\left\{T, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{F}_{\beta H}, \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right\}.$$

Здесь в обеих частях уравнения оказались значения модифицированных напряжений для $\mathbf{H}-$движения. Используя выражения (4.14) для них, получим, что первое уравнение системы примет вид

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\alpha,\,\mathbf{B}\right\} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\beta,\,\mathbf{B}\right\}$$

или просто

$$\boldsymbol{\Sigma}_\alpha = \boldsymbol{\Sigma}_\beta.$$

Силовое условие (4.16) подтверждает, что оно выполняется.

Внесем, наконец, выражения (4.37) в (4.35) и получим следующий результат

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}_H = \boldsymbol{\Sigma}_\alpha\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\alpha,\,\mathbf{B}\right\} = \boldsymbol{\Sigma}_\beta\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\beta,\,\mathbf{B}\right\}, \\ \mathbf{H}_H = \mathbf{H}_\alpha\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\alpha,\,\mathbf{B}\right\} + \mathbf{H}_\beta\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\beta,\,\mathbf{B}\right\}, \\ \psi_H = \psi_\alpha\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\alpha,\,\mathbf{B}\right\} + \psi_\beta\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\beta,\,\mathbf{B}\right\}, \\ S_H = S_\alpha\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\alpha,\,\mathbf{B}\right\} + S_\beta\left\{T,\,\boldsymbol{\Gamma},\,\mathbf{F}_\beta,\,\mathbf{B}\right\} \end{cases}$$

или по (4.21)

$$\boldsymbol{\Sigma}_H = \boldsymbol{\Sigma}, \qquad \mathbf{H}_H = \mathbf{H}, \qquad \psi_H = \psi, \qquad S_H = S.$$

А это, как раз, и есть условия изотропии (4.6).

Итак, все три теоремы 4.1, 4.2 и 4.3 доказаны.

Может возникнуть сомнение в полезности этих теорем, если вдруг окажется, что семейство определяющих уравнений (4.7) пусто. Чтобы убедиться в том, что это не так, следует указать хотя бы несколько примеров. Их легко найти в тех примерах, которые рассматривались выше. Вот некоторые из них.

1. Недеформируемый изотропный теплопроводящий материал (см. раздел 1.4)

$$\boldsymbol{\Sigma} \text{ — произвольно,}$$

$$\mathbf{H} = -\kappa\boldsymbol{\Gamma},$$

$$\psi = \psi(T),$$

$$S = -\frac{\partial\psi}{\partial T}.$$

2. Идеальный теплопроводящий газ (см. раздел 1.6)

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\Sigma} = -\dfrac{\rho_0 RT}{\mu}\mathbf{E}, \\
\mathbf{H} = -\kappa\boldsymbol{\Gamma}, \\
\psi = \psi(T), \\
S = -\dfrac{\partial\psi}{\partial T}.
\end{cases}
$$

3. Вязкая жидкость (см. раздел 1.7)

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\Sigma} = \lambda(T)\mathrm{I}_1\,\mathbf{E} + 2\eta(T)\mathbf{d}, \\
\mathbf{H} = -\kappa\boldsymbol{\Gamma}, \\
\psi = \psi(T), \\
S = -\dfrac{\partial\psi}{\partial T}.
\end{cases}
$$

4. Линейный изотропный упругий материал (см. раздел 1.8)

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{\Sigma} = k\theta\mathbf{E} + 2G\mathbf{e}, \\
\mathbf{H} = -\kappa\boldsymbol{\Gamma}, \\
\psi = \psi(T, \boldsymbol{\varepsilon}), \\
S = -\dfrac{\partial\psi}{\partial T},
\end{cases}
$$

где θ — объемная деформация, а $\mathbf{e}$ — девиатор тензора малой деформации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии представлена современная теория определяющих уравнений в нелинейной термомеханике деформируемых тел. Определяющие уравнения потому так и называются — определяющие — поскольку именно они определяют, как ведет себя материал при деформировании и тепловом нагружении. Известна точка зрения, в соответствии с которой они могут быть сформулированы только на основе экспериментальных данных. В предлагаемом учебном пособии принята другая точка зрения: проблема формулировки определяющих уравнений подобна проблеме идентификации «черного ящика» в теории управления. Поэтому здесь использован применяемый в теории идентификации подход: определяющие уравнения просто «выдумываются» и лишь потом проверяются на эксперименте. Процесс «выдумывания» очень сложен, ибо по неосторожности может привести к таким уравнениям, которые описывают вечный двигатель второго рода. Чтобы предотвратить это, в учебном пособии «выдумываемые» определяющие уравнения подчинены требованию второго закона термодинамики в форме универсального диссипативного неравенства.

Кроме того, чтобы сделать определяющие уравнения нечувствительными к вращению координатной системы, в которой записываются последние, в учебном пособии использован так называемый принцип материальной объективности. Наконец, заслуживает упоминания вполне удовлетворительное определение изотропного материала. Это избавляет от рассмотрения трудной для восприятия «теории симметрии». Далее, доказана важная теорема: в определяющие уравнения изотропного материала входят только такие тензоры и векторы, которые являются определяющими параметрами, и не входят никакие другие материальные тензоры, кроме изотропных тензоров четного ранга. Эта теорема отвергает возможность попадания в конструкцию определяющих уравнений векторного произведения определяющих параметров, ибо в написание его входит тензор третьего ранга — тензор Леви – Чивита. Приведены простейшие примеры определяющих уравнений. В первой группе таких уравнений рассмотрены известные из курса физики определяющие уравнения: уравнения теплопроводности, уравнения газа, уравнения вязкой жидкости Ньютона и, наконец, закон Гука. Показано, что все они удовлетворяют введенным выше трем ограничениям. Ко второй группе принадлежат новые определяющие уравнения, и они сразу подчинены всем трем ограничениям.

Последняя глава учебного пособия отведена методу реологических моделей — методу, который позволяет записывать такие определяющие уравнения, которые заведомо удовлетворяют сразу всем трем перечисленным условиям. По этому поводу сформулировано и доказано три теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКТЙ СПИСОК

1. Зубчанинов В.Г. Механика сплошных деформируемых сред. — Тверь: Изд-во государственного технического университета, 2000. — 703с.

2. Ильюшин А.А. Пластичность. — М.: Изд-во Гостехиздат, 1948. — 376с.

3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 310с.

4. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. — М.: Изд-во Высшая школа, 1986. — 512с.

5. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Изд-во Мир, 1975. — 592с.

6. Пальмов В.А. Фундаментальные законы природы в механике деформируемых тел: Учебное пособие. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008. — 141с.

7. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа: Учебное пособие. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008. — 108с.

8. Рейнер М. Реология. — М.: Изд-во Наука, 1985. — 223с.

9. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. — М.: Изд-во Наука, 1976. — 328с.

Учебное издание

Владимир Александрович ПАЛЬМОВ

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОМЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97
Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т. 2;
95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 07.11.2008. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд. 7,0. Тираж 80. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором, в Цифровом типографском центре Издательства Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 550-40-14.
Тел./факс: (812) 297-57-76.