

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ**

**РАДИОФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА РАДИОФИЗИКИ**

**Л.А.Бабенко**

**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
РАДИОВОЛН**

**УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ**

Учебное пособие

2006

## Содержание

Предварительные замечания.....	3
Некоторые операции векторного анализа.....	6
• Немного о векторах и криволинейных системах координат.....	7
• Градиент скалярного поля.....	10
• Дивергенция векторного поля.....	12
• Ротор («вихрь») векторного поля.....	15
Система уравнений и общие понятия электростатики.....	18
Стационарное магнитное поле.....	26
Плоские электромагнитные волны.....	30
• Поляризация волн.....	36
• Волновые явления на границе двух сред.....	37
Волны в прямоугольном волноводе.....	41
Элементарный электрический излучатель.....	48
Упражнения и задачи.....	54
• Векторный анализ.....	54
• Электростатика.....	54
• Стационарное магнитное поле.....	57
• Плоские электромагнитные волны.....	59
• Волноводы.....	62
• Излучение волн.....	64

*Нет лучшего метода сообщения уму знаний,  
чем метод преподнесения их в возможно  
более разнообразных формах.*

*Максвелл*

### **Предварительные замечания**

*Классическая*, или максвелловская, теория электромагнитного поля учитывает только *макроскопические* свойства вещества: предполагается, что размеры рассматриваемой области пространства и расстояние от источников поля до рассматриваемой точки велики по сравнению с размерами молекул, а характерное для изменения электромагнитного поля время (например, период колебаний) велико по сравнению со временем, характерным для внутримолекулярных колебательных процессов.

Электромагнитное поле описывают следующие векторные функции координат и времени:  $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$  – напряженность электрического поля [В/м],  $\vec{H} = \vec{H}(r, t)$  – напряженность магнитного поля [А/м],  $\vec{D} = \vec{D}(r, t)$  – электрическая индукция [Кл/м<sup>2</sup>],  $\vec{B} = \vec{B}(r, t)$  – магнитная индукция [Тл].

Электрический заряд  $q$  (или  $Q$ ) – фундаментальное свойство вещества. Существуют положительные и отрицательные заряды. Заряд *дискретен*. Наименьший по абсолютной величине отрицательный заряд  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. В макроскопической электродинамике структура материи игнорируется, среда представляется сплошной, а заряды и токи – непрерывно распределенными в объеме (иногда – на поверхности). Используют понятие

*плотности заряда*  $\rho$ , как характеристики источника  $\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$ ,  $\Delta q$  –

заряд малого объема  $\Delta V$ . Как мал объем? Достаточно мал, чтобы следовать изменению  $\rho$ , но большой, чтобы содержать большое число дискретных зарядов. Заметим, что куб с ребром в 1 микрон ( $10^{-6}$  м) при объеме  $V = 10^{-18}$  м<sup>3</sup> содержит  $10^{11}$  атомов.

Если считать, что заряд  $\Delta q$  принадлежит элементу поверхности  $\Delta S$  или элементу длины  $\Delta l$ , то следует определить поверхностную  $\rho_s$  и линейную  $\rho_l$  плотность заряда.

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad \rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Названные плотности заряда являются функциям координат и времени.

Изменение заряда во времени – это ток.  $I = - dq / dt$  [Кл / с = А]. Ток – функция времени. Он следует через ограниченное пространство. Точечная характеристика – *плотность тока проводимости*

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta S}.$$

$$\vec{j} = \vec{i}_0 \frac{dI}{dS} \quad - \quad \text{это ток через единичную площадку, расположенную}$$

перпендикулярно направлению тока. Для хороших проводников ток высокой частоты распределен в поверхностном слое, а не по объему. Поэтому определяют поверхностную плотность тока  $\vec{j}_s$  как ток через единицу длины на поверхности, перпендикулярную направлению движения.

Плотность тока и плотность заряда не являются независимыми, они связаны законом сохранения заряда. Из определения следует  $q = \int_V \rho dv$ ,  $I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$

Если заряд  $q$ , содержащийся в объеме  $V$  с поверхностью  $S$ , не остается постоянным, значит, поверхность пересекают носители заряда, проходит ток.

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Это дифференциальная форма закона. Непрерывные } \rho \text{ и}$$

$\vec{j}$  связаны по закону точечного соответствия.

Напряженность электрического поля  $\vec{E}$  определяют как силу, с которой электрическое поле действует на точечный положительный единичный заряд

$$\vec{E} = \vec{F} / q \quad \text{или точнее,} \quad \vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}$$

Сила, с которой электромагнитное поле воздействует на точечный электрический заряд, зависит не только от величины и местоположения заряда, но и от скорости его движения. Эту силу обычно раскладывают на

две: электрическую и магнитную. Электрическая сила не зависит от движения заряда  $\vec{F}_э = q\vec{E}$ . Магнитная сила зависит от величины и направления скорости  $\vec{v}$  движения заряда и всегда перпендикулярна ей:  $\vec{F}_м = q\vec{v} \times \vec{B}$ ,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции, характеризующий силовое воздействие поля, [Тл]. Магнитная индукция численно равна силе, с которой магнитное поле действует на точечный единичный положительный заряд, движущийся с единичной скоростью перпендикулярно линиям вектора  $\vec{B}$ .

В макроскопической электродинамике векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  связаны соотношениями, зависящими от свойств среды.

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Постоянный коэффициент  $\varepsilon_0$  называется *электрической постоянной*. Его

величина зависит от выбора системы единиц. В системе СИ  $\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}$  (Ф / м)

$\mu_0$  – постоянная величина, называемая *магнитной постоянной*, значение и размерность которой зависят от выбора системы единиц. В системе СИ  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  (Гн/м).

Свойства среды характеризуются параметрами  $\varepsilon_r$ ,  $\mu_r$  и  $\sigma$  ( $\sigma$  – удельная проводимость среды). Материальные среды обладают электрической проводимостью. Под действием электрического поля в них возникает ток, называемый током проводимости. Его плотность определяется законом Ома в дифференциальной форме:  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{E})$ ,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ . Перечисленные уравнения называют *материальными*, или *уравнениями состояния*.

Все электромагнитные процессы, относящиеся к макроскопической электродинамике, подчиняются законам, впервые сформулированным в виде

дифференциальных уравнений Дж. К. Максвеллом и опубликованным в 1873 году.

$$(1) \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (2) \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3) \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (4) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Все величины, входящие в уравнения, являются функциям координат (радиус-вектора  $\vec{r}_0$ ) и времени  $t$ . Плотность электрического тока  $\vec{j}$  и плотность заряда  $\rho$  характеризуют распределение источников электромагнитного поля в пространстве и во времени.

Уравнения в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} + I \quad (1'), \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2')$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = q \quad (3'), \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4').$$

Соотношения, показывающие связь между значениями векторов электромагнитного поля в разных средах у поверхности раздела, называются *граничными условиями*.

На поверхности раздела двух сред должны выполняться следующие граничные условия для нормальных и касательных составляющих векторов:

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad \text{или} \quad (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n}_0 = \rho_s; \quad B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad \text{или} \quad (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{n}_0 = 0$$

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0 \quad \text{или} \quad (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n}_0 = 0; \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = j_{sv} \quad \text{или} \quad \vec{n}_0 \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_s.$$

Эти соотношения справедливы для электромагнитных процессов, рассматриваемых в макроскопической электродинамике.

### **Некоторые операции векторного анализа.**

Формально поля определяются заданием в каждой точке рассматриваемой области пространства некоторой скалярной и векторной величины. Эти величины являются функциями четырех переменных – пространственных координат и времени.

***Немного о векторах и криволинейных системах координат.***

Вектор  $\vec{A} = \vec{a}_0 A$  имеет длину (модуль)  $A = |\vec{A}|$  и направление.  $\vec{a}_0 = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$ .

$\vec{a}_0$  - вектор единичной длины (орт), совпадающий с направлением вектора  $\vec{A}$

Скалярное произведение двух векторов  $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta_{AB}$  - скаляр. Если два вектора ортогональны, очевидно, что их скалярное произведение равно 0.

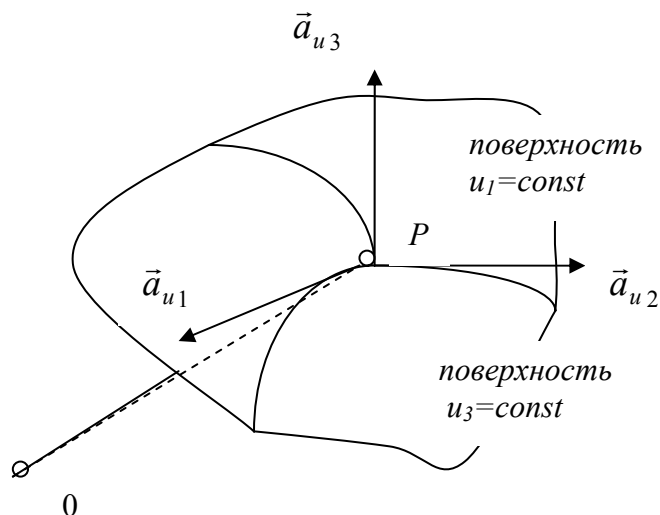
При перестановке векторов  $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Векторное произведение двух векторов  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{n}_0 |AB \sin \theta_{AB}|$  - это вектор, абсолютная величина которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , а направление совпадает с направлением нормали к плоскости, содержащей оба рассматриваемых вектора, и определяется из условия образования правой системы с векторами  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ .

Векторное произведение не коммутативно  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ .

Смешанное произведение векторов  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$  - скаляр. Двойное векторное произведение  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ .

Положение точки в пространстве определяется радиус – вектором  $\vec{R}$ , координаты которого  $(u_1, u_2, u_3)$  зависят от принятой системы координат. Положение точки можно однозначно определить пересечением трех поверхностей, семейства которых описываются, как  $u_1 = \text{const}$ ,  $u_2 = \text{const}$ ,  $u_3 = \text{const}$ . Пересечение двух поверхностей дает координатную линию; значения двух координат на этой линии постоянны, третья меняется. Координаты точки называют криволинейными. Система координат называется ортогональной криволинейной, если касательные к координатным линиям в каждой точке пересекаются под прямым углом. Эти касательные называются координатными осями. Их направление меняется от точки к точке.



Пусть  $\vec{a}_{u1}, \vec{a}_{u2}, \vec{a}_{u3}$  - единичные векторы в трехмерной системе координат.

Для праввинтовой ортогональной системы

$$\vec{a}_{u1} \times \vec{a}_{u2} = \vec{a}_{u3}, \quad \vec{a}_{u2} \times \vec{a}_{u3} = \vec{a}_{u1}, \quad \vec{a}_{u3} \times \vec{a}_{u1} = \vec{a}_{u2}.$$

Вектор, как сумма компонент по трем ортогональным направлениям

$$\vec{A} = \vec{a}_{u1} A_{u1} + \vec{a}_{u2} A_{u2} + \vec{a}_{u3} A_{u3},$$

модуль вектора  $A = |\vec{A}| = \sqrt{A_{u1}^2 + A_{u2}^2 + A_{u3}^2}$ .

Скалярное произведение векторов

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (\vec{a}_{u1} A_{u1} + \vec{a}_{u2} A_{u2} + \vec{a}_{u3} A_{u3}) (\vec{a}_{u1} B_{u1} + \vec{a}_{u2} B_{u2} + \vec{a}_{u3} B_{u3}) = \\ &= A_{u1} B_{u1} + A_{u2} B_{u2} + A_{u3} B_{u3}. \end{aligned}$$

Векторное произведение

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \vec{a}_{u1} & \vec{a}_{u2} & \vec{a}_{u3} \\ A_{u1} & A_{u2} & A_{u3} \\ B_{u1} & B_{u2} & B_{u3} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{a}_{u1} (A_{u2} B_{u3} - A_{u3} B_{u2}) + \vec{a}_{u2} (A_{u3} B_{u1} - A_{u1} B_{u3}) + \vec{a}_{u3} (A_{u1} B_{u2} - A_{u2} B_{u1}) / \end{aligned}$$

Смешанное произведение векторов

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} C_{u1} & C_{u2} & C_{u3} \\ A_{u1} & A_{u2} & A_{u3} \\ B_{u1} & B_{u2} & B_{u3} \end{vmatrix}$$

При вычислении линейных, поверхностных или объемных интегралов необходимо вычислить приращения изменения длины через приращения



координат. В криволинейной системе координат изменение координаты  $u_i$  на  $du_i$  приводит к перемещению  $dl_i$  вдоль координатной линии:  $dl_i = h_i du_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), где  $h_i$  зависят от вида координат и называются коэффициентами Ламэ. Когда координаты являются длиной, как, например, координаты декартовой системы, эти коэффициенты равны 1.

Направленное изменение длины в произвольном направлении можно записать

$$d\vec{l} = \vec{a}_{u_1} dl_1 + \vec{a}_{u_2} dl_2 + \vec{a}_{u_3} dl_3 \quad \text{или}$$

$$d\vec{l} = \vec{a}_{u_1} (h_1 du_1) + \vec{a}_{u_2} (h_2 du_2) + \vec{a}_{u_3} (h_3 du_3).$$

Изменение объема  $dv$ , образуемое изменением координат:

$$dv = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

К ортогональным криволинейным системам координат относятся прямоугольная (или декартова), цилиндрическая и сферическая система

а) Прямоугольные координаты.  $(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$

Точка  $P(x_1, y_1, z_1)$  определяется пересечением трех плоскостей  $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ . Радиус – вектор точки  $P$   $\vec{OP} = \vec{a}_x x_1 + \vec{a}_y y_1 + \vec{a}_z z_1$ .

Вектор  $\vec{A} = \vec{a}_x A_x + \vec{a}_y A_y + \vec{a}_z A_z$ .

Скалярное произведение  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$ .

Коэффициенты Ламэ  $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ . Элемент объема  $dv = dx dy dz$

Векторный дифференциал длины  $d\vec{l} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz$ .

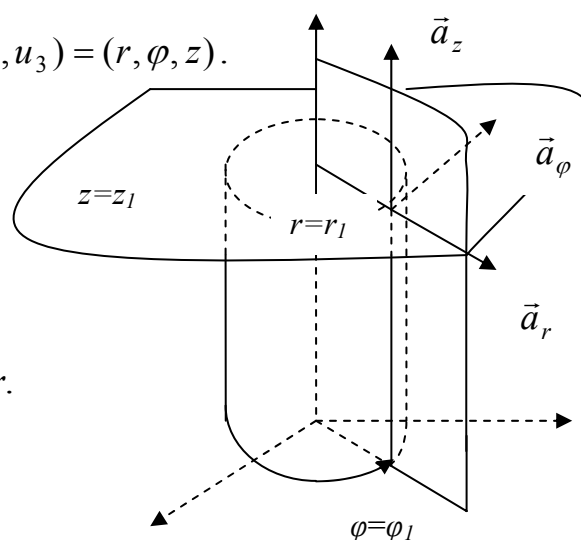
Векторный дифференциал поверхности:

$$\vec{dS}_x = \vec{a}_x dy dz, \quad \vec{dS}_y = \vec{a}_y dx dz, \quad \vec{dS}_z = \vec{a}_z dx dy$$

б) Цилиндрические координаты  $(u_1, u_2, u_3) = (r, \varphi, z)$ .

Точка  $P(r_1, \varphi_1, z_1)$  определяется пересечением поверхности цилиндра радиуса  $r = r_1$ , полуплоскости  $\varphi = \varphi_1$  и плоскости  $z = z_1$ .

Коэффициенты Ламэ  $h_1 = h_3 = 1, h_2 = r$ .



Элемент объема  $dv = r dr d\varphi dz$

Векторный дифференциал длины  $\vec{dl} = \vec{a}_r dr + \vec{a}_\varphi r dr + \vec{a}_z dz$ .

Векторный дифференциал поверхности:

$$\vec{dS}_r = \vec{a}_r r d\varphi dz, \quad \vec{dS}_\varphi = \vec{a}_\varphi dr dz, \quad \vec{dS}_z = \vec{a}_z r dr d\varphi.$$

в) Сферические координаты  $(u_1, u_2, u_3) = (R, \theta, \varphi)$ .

Точка  $P(R_1, \theta_1, \varphi_1)$  определяется пересечением поверхности сферы радиуса  $R = R_1$ ,

поверхности конуса с углом раскрыва

$2\theta = 2\theta_1$  и полуплоскости  $\varphi = \varphi_1$ .

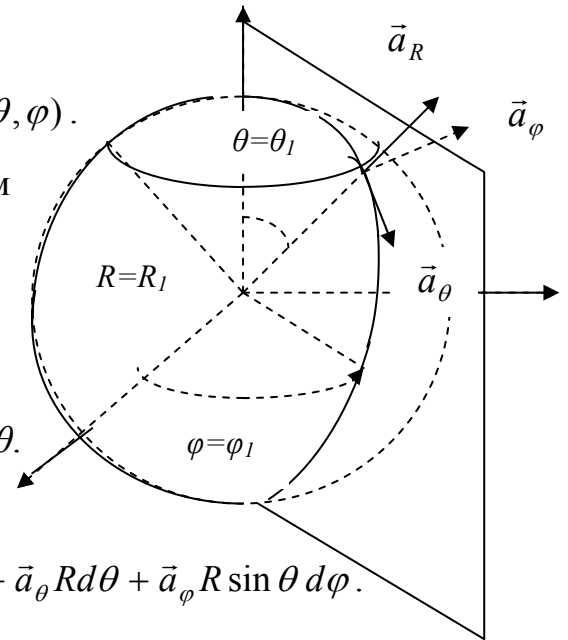
Коэффициенты Ламэ  $h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = R \sin\theta$ .

Элемент объема  $dv = R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi$ .

Векторный дифференциал длины  $\vec{dl} = \vec{a}_R dR + \vec{a}_\theta R d\theta + \vec{a}_\varphi R \sin\theta d\varphi$ .

Векторный дифференциал поверхности:

$$\vec{dS}_R = \vec{a}_R R^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \quad \vec{dS}_\theta = \vec{a}_\theta R \sin\theta dR d\varphi, \quad \vec{dS}_\varphi = \vec{a}_\varphi R dR d\theta.$$



В векторном анализе производятся специальные операции дифференцирования и интегрирования по отношению к соответствующим функциям пространственных координат.

### **Градиент скалярного поля.**

Рассмотрим способ описания изменения в пространстве *скалярного поля* в фиксированное время. По трем пространственным координатам могут существовать частные изменения, причем скорость изменения может быть различной в разных направлениях. Вводят вектор, определяющий скорость изменения скалярного поля в данной точке в данное время. Пусть  $v(u_1, u_2, u_3)$  – скалярная функция координат. Величина  $v$  зависит от положения точки в пространстве. *Вектор*, величина и направление которого совпадают с

максимальной пространственной скоростью изменения скалярной величины - это градиент этого скаляра.

$$\text{grad } v = \vec{a}_n \frac{dv}{dn} \quad \text{или} \quad \nabla v = \vec{a}_n \frac{dv}{dn},$$

$\vec{a}_n$  - орт внешней нормали, направление наиболее быстрого возрастания скаляра  $v$ .  $\nabla$  - набла, или оператор Гамильтона, который можно рассматривать как вектор. Под оператором понимается совокупность математических действий, в данном случае дифференцирование. Сам по себе оператор ничего не означает, он имеет смысл, когда применим к какой-либо величине.

$$\nabla = \vec{a}_1 \frac{\partial}{\partial l_1} + \vec{a}_2 \frac{\partial}{\partial l_2} + \vec{a}_3 \frac{\partial}{\partial l_3}, \quad l_i = h_i u_i$$

$$\nabla = \vec{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{grad } v = \nabla v = \vec{a}_x \frac{\partial v}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial v}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial v}{\partial z} -$$

в декартовой системе координат.

Градиент является *дифференциальной характеристикой скалярного поля*.

Пространственное изменение скаляра вдоль направления  $L$ :

$$\frac{dv}{dL} = \frac{dv}{dn} \cdot \frac{dn}{dL} = \frac{dv}{dn} \cos \theta_{nL} = \frac{dv}{dn} \vec{a}_n \cdot \vec{a}_L = \nabla v \cdot \vec{a}_L - \text{пространственная скорость}$$

возрастания  $v$  в направлении  $\vec{a}_L$  равна проекции градиента  $v$  на это направление.

Заметим, скалярное поле  $v$  порождает векторное поле  $\text{grad } v = \vec{F}$ . Такое векторное поле  $\vec{F}$  называется потенциальным полем, функция  $v$  - потенциал. Поверхности, на которых  $v = \text{const}$ , являются эквипотенциальными.

Рассмотрим некоторые примеры.

1). Вычислим градиент модуля радиус-вектора  $\vec{R} = \vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z$ .

$$\text{Модуль этого вектора } |\vec{R}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\text{Запишем } \text{grad } |\vec{R}| = \vec{x}_0 \frac{\partial |\vec{R}|}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial |\vec{R}|}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial |\vec{R}|}{\partial z}.$$

Вычислим частную производную

$$\frac{\partial |\vec{R}|}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{|\vec{R}|}. \text{ Следовательно}$$

$$\text{grad}|\vec{R}| = \vec{x}_0 \frac{x}{|\vec{R}|} + \vec{y}_0 \frac{y}{|\vec{R}|} + \vec{z}_0 \frac{z}{|\vec{R}|} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}.$$

2). Вычислим градиент квадрата модуля радиус-вектора.

$$\text{grad}|\vec{R}|^2 = \text{grad}(x^2 + y^2 + z^2) = \vec{x}_0 2x + \vec{y}_0 2y + \vec{z}_0 2z = 2\vec{R}$$

Запишем соотношение, позволяющее определять градиент модуля радиус-

вектора, взятого в произвольной степени  $n$ :  $\text{grad}|\vec{R}|^n = n|\vec{R}|^{n-2} \vec{R}$ .

Первые два примера подтверждают правильность приведенного соотношения. Проверим его, предположив, что  $n = -1$ .

$$\text{Вычислим } \text{grad} \frac{1}{|\vec{R}|} = -\frac{1}{2} |\vec{R}|^{-3} (2x\vec{x}_0 + 2y\vec{y}_0 + 2z\vec{z}_0) = -\frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^3}$$

*Дифференциальными характеристиками векторного поля являются дивергенция и ротор.*

### ***Дивергенция векторного поля.***

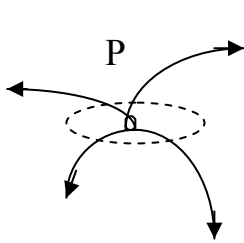
Рассмотрим пространственное изменение *векторного* поля. Векторное поле графически характеризуется векторными или силовыми линиями. Векторная линия – это кривая, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением векторного поля. Векторные линии характеризуют не только направление, но и величину поля. Плотность их больше там, где величина поля больше. Величина вектора определяется числом линий, проходящих через единичную поверхность, перпендикулярную вектору. Поток поля аналогичен поток жидкости: поток вне, если объем содержит источник. Может быть поток внутрь – если есть сток.

Определение: дивергенция векторного поля  $\vec{A}$  в точке (расходимость

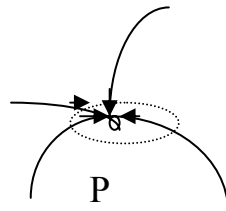
вектора)  $div \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}$ ,  $s$  – поверхность, ограничивающая объем  $\nabla V$

внутри которого находится рассматриваемая точка.  $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$  – поток вектора

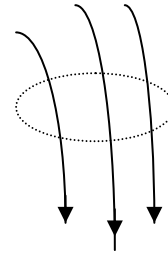
$\vec{A}$  через замкнутую поверхность. Поток может быть больше, меньше или равен 0.  $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$  – векторный дифференциал поверхности, направление вектора совпадает с направлением внешней по отношению к поверхности  $S$  нормали.



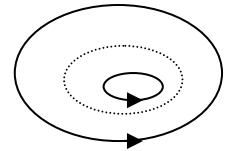
исток  
 $div \mathbf{A} > 0$ ,  
поток больше 0



сток  
 $div \mathbf{A} < 0$



$div \mathbf{A} = 0$ ,  
соленоидальное поле



Дивергенция – скалярная величина, значение которой определено в точке.

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

Для декартовой системы координат  $div \vec{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z$ .

$$div \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$$

Если дивергенция векторного поля равна 0  $div \vec{A} = 0$ , то  $\vec{A}$  – соленоидальное поле. Дивергенция определена как поток вектора через поверхность, ограничивающую единичный объем. Объемный интеграл от дивергенции векторного поля равен полному потоку вектора через поверхность этого объема.

$$\int_V div \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad \text{Это теорема Остроградского – Гаусса.}$$

Здесь  $d\vec{s}$  - векторный дифференциал поверхности – вектор, модуль которого равен  $ds$ , а направление совпадает с направлением внешней по отношению к объему  $dv$  нормали к элементу  $ds$ .

Рассмотрим некоторые примеры.

1). Определим дивергенцию радиус-вектора  $div\vec{R}$ .

В декартовой системе координат радиус-вектор  $\vec{R} = \vec{x}_0x + \vec{y}_0y + \vec{z}_0z$ .

Следовательно  $div\vec{R} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ . Будет ли зависеть результат от

выбора системы координат? Воспользуемся выражением для вычисления в цилиндрической системе координат:

$$div\vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Радиус-вектор в этой системе координат  $\vec{R} = \vec{r}_0r + \vec{\varphi}_0\theta + \vec{z}_0z$ . Следовательно

$div\vec{R} = \frac{1}{r} 2r + 1 = 3$ . Очевидно, что такой же результат получим, проведя

вычисления в сферической системе координат, где  $\vec{R} = \vec{R}_0R + \vec{\theta}_0\theta + \vec{\varphi}_0\varphi$ , а выражение для градиента выглядит так:

$$div\vec{A} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

2). При вычислении  $\nabla \cdot \vec{A}$  (а в дальнейшем и  $\nabla \times \vec{A}$ ) не следует забывать, что оператор набла  $\nabla$  - это одновременно и вектор, и дифференциальный оператор. Поэтому следует сначала рассматривать его действие, как действие дифференциального оператора (не забывая о правиле вычисления производной сложной функции  $(uv)' = u'v + uv'$ ), а потом рассматривать его как вектор (например, в скалярном  $\nabla \cdot \vec{A}$  или векторном  $\nabla \times \vec{A}$  произведениях).

Предположим, требуется определить  $div\vec{K}$ , если  $\vec{K} = \vec{R} \varphi(R)$ . Здесь  $R$  – модуль радиус-вектора. Тогда необходимо записать:

$$\operatorname{div} \vec{K} = \operatorname{div}(\vec{R} \varphi(R)) = \nabla \cdot (\vec{R} \varphi(R)) = (\nabla \cdot \vec{R}) \varphi(R) + \vec{R} \nabla \varphi(R) = \varphi(R) \operatorname{div} \vec{R} + \vec{R} \operatorname{grad} \varphi(R)$$

3). Определим поток радиус-вектора через сферическую поверхность  $s$ , центр которой совпадает с началом координат. Эту задачу можно решить двумя способами.

а). По определению поток  $\Phi = \oint_s \vec{R} \cdot \vec{ds}$ . В рассматриваемой задаче, благодаря ее сферической симметрии, можно утверждать, что векторы  $\vec{R}$  и  $\vec{ds}$  сонаправлены, следовательно скалярное произведение векторов, стоящее под знаком интеграла, можно заменить произведением модулей этих векторов. Кроме того, очевидно, что значение модуля радиус-вектора для всех точек поверхности интегрирования одинаково и, следовательно, сомножитель  $R$  можно вынести за знак интегрирования.

$$\Phi = \oint_s R \, ds = R \oint_s ds = R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi R^3$$

б). Поток вектора через поверхность связан с интегралом по объему, заключенному в рассматриваемую поверхность, от дивергенции этого вектора теоремой Остроградского – Гаусса. Следовательно второй способ решения указанной задачи:  $\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{R} \, dv = 3 \int_V dv = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$ .

4). Предположим, что требуется определить поток радиус-вектора сквозь поверхность цилиндра радиуса  $a$  и высоты  $z = h$ . В этом случае решение по способу а) предыдущей задачи затруднительно, т.к. требует вычисления скалярного произведения  $\vec{R} \cdot \vec{ds}$  для точек, принадлежащих торцам и боковой поверхности цилиндра. Поэтому удобно поток вычислить, как

$$\Phi = \int_V \operatorname{div} \vec{R} \, dv = 3 \int_V dv = 3(\pi a^2) h.$$

### **Ротор (вихрь) векторного поля.**

Можно говорить о вихревом источнике, который связан с циркуляцией векторного поля вокруг него. Циркуляция векторного поля по замкнутому

контуру  $C$  определяется как скалярный линейный интеграл  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$ .  $d\vec{l}$  – векторный дифференциал длины, направление вектора  $d\vec{l}$  совпадает в точках контура с направлением касательной к контуру интегрирования. Для определения в некоторой точке функции, которая является мерой силы вихревого источника, контур необходимо сделать малым и ориентировать его так, чтобы циркуляция была максимальной.

Определяют 
$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \vec{a}_n \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$\text{rot } \vec{A}$  – векторная функция точки. Если ротор векторного поля равен 0, то такое поле называют безвихревым (консервативным).

Если выражение для ротора проинтегрировать по поверхности, опирающейся на замкнутый контур  $C$ , получим соотношение, которое называют *теоремой Стокса*:

$$\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Если поверхностный интеграл вычислять по замкнутой поверхности (контур отсутствует), то  $\int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \vec{a}_{u_1} h_1 & \vec{a}_{u_2} h_2 & \vec{a}_{u_3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}.$$

В декартовой системе координат

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

1). Рассмотрим пример вычисления ротора функции, являющейся произведением вектора и скалярной функции координат. Итак, требуется определить  $\text{rot}(\varphi(R)\vec{R})$ , где  $\vec{R}$  – радиус-вектор, а  $R$  – модуль этого вектора.



$rot(\varphi \vec{R}) = \nabla \times \varphi \vec{R} = \nabla \varphi \times \vec{R} + \varphi(\nabla \times \vec{R})$ . Здесь учтено замечание, сделанное при вычислении дивергенции сложной функции. Нетрудно убедиться, что второе слагаемое в рассматриваемой задаче равно 0, так как  $rot \vec{R} = 0$ . Вычислим градиент, входящий в первое слагаемое.

$$\begin{aligned} \nabla \varphi &= grad \varphi = \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi(R)}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi(R)}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi(R)}{\partial z} = \\ &= \vec{x}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\vec{x}_0 x + \vec{y}_0 y + \vec{z}_0 z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \frac{\vec{R}}{R}. \end{aligned}$$

Продолжим вычисление  $rot(\varphi(R) \cdot \vec{R}) = \nabla \varphi \times \vec{R} = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{R} = 0$ .

Рассмотрены дифференциальные операции первого порядка со скалярными и векторными полями.

Дифференциальные операции второго порядка:

1.  $rot grad \varphi = \nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$ . Следовательно, если векторное поле – безвихревое, то его можно выразить как градиент скалярного поля. Если  $rot \vec{E} = 0$ , то можно определить скалярное поле  $\varphi$ , как  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ .

2.  $div rot \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$ . Следовательно, если дивергенция векторного поля равна 0, то поле можно представить как ротор другого векторного поля. Если  $div \vec{B} = 0$ , то можно определить векторное поле  $\vec{A}$ , такое, что  $\vec{B} = rot \vec{A}$ .

3.  $div grad \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi$ .

$\Delta$  - это оператор Лапласа. Он может быть применен как к векторной, так и к скалярной величине. В декартовой системе координат

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

4.  $rot rot \vec{A} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{A}(\nabla \cdot \nabla) = grad div \vec{A} - \Delta \vec{A}$

### Система уравнений и общие понятия электростатики.

Электростатическое поле описывается системой уравнений, которая получается из системы уравнений Максвелла в предположении, что векторы поля не зависят от времени и отсутствует перемещение зарядов ( $\vec{j} = 0$ ).

Дифференциальная форма уравнений:  $rot\vec{E} = 0$ ,  $div\vec{D} = \rho$ ,

и интегральная форма:  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$  – поле консервативно (независимость от пути интегрирования),  $\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dv = Q$ . Это соотношение иногда называют теоремой Гаусса.

Так как для электростатического поля  $rot\vec{E} = 0$ , это поле является потенциальным (безвихревым). Его силовые линии имеют истоки и стоки: они начинаются и заканчиваются на зарядах.

Вектор  $\vec{E}$  можно представить в виде градиента скалярной функции  $\vec{E} = -grad\varphi$ ;  $\varphi$  - электростатический потенциал, знак (-) соответствует принятому определению потенциала (при перемещении встречу вектору  $\vec{E}$  электростатический потенциал возрастает).

Физический смысл имеет разность потенциалов в двух точках – она определяет работу при перемещении единичного заряда в электростатическом поле между этими точками.  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} d\vec{l}$ .

Работа электрических сил не зависит от пути перемещения заряда, а определяется только положением начальной и конечной точек – это важнейшее свойство электростатического поля. (Это справедливо для любых потенциальных полей).

Если точки совпадают, то  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$ , т.е. в электростатическом поле при перемещении заряда по замкнутому пути работа не производится.

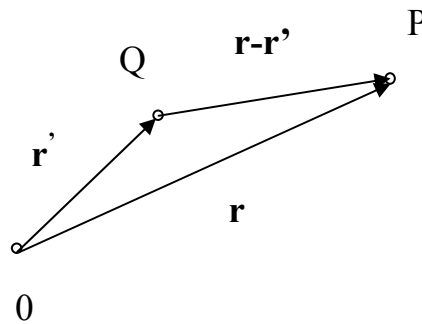
Если потенциал бесконечно удаленной точки считать равным 0, то потенциал в точке  $M$  можно определить как работу, которую надо совершить для перемещения единичного заряда из точки  $M$ , для которой он определяется, на бесконечность.

Уравнение для потенциала  $\varphi$ :  $\Delta \varphi = -\rho / \varepsilon_0 \varepsilon_r$  - уравнение Пуассона.

Решение этого уравнения имеет вид 
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$\vec{r}$  - радиус-вектор точки наблюдения,  $\vec{r}'$  - радиус-вектор точки интегрирования в среде, где присутствует заряд с плотностью  $\rho$ .

$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  - длина направленного отрезка - это функция положения точки наблюдения  $P$  при фиксированной точке  $Q$ .



В частном случае, когда в рассматриваемой области пространства заряд отсутствует ( $\rho = 0$ ), получаем уравнение Лапласа  $\Delta \varphi = 0$ .

Решения этого уравнения называются гармоническими функциями.

Электростатическое поле - частный случай электромагнитного, поэтому приведенные ранее граничные условия для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  должны выполняться и для электростатического поля.

Граничные условия для потенциала  $\varphi$ .  $(\partial\varphi / \partial\tau)_1 = (\partial\varphi / \partial\tau)_2$ , где  $\partial / \partial\tau$  - означает дифференцирование по любому направлению в плоскости, касательной к поверхности раздела в рассматриваемой точке.  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

$\varepsilon_0 \varepsilon_r 2 (\partial\varphi / \partial n)_2 - \varepsilon_0 \varepsilon_r 1 (\partial\varphi / \partial n)_1 = \rho_s$ ,  $\partial / \partial n$  - дифференцирование по нормали к поверхности раздела, направленной из среды 2 в 1.

Если одна из сред - проводник, граничные условия принимают более простой вид. Вектор  $\vec{E}$  электростатического поля внутри проводника равен 0. Это

особенность электростатического поля – оно равно 0 внутри любого проводника.

Согласно условию  $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\vec{\tau}_0 = 0$ ,  $E_{\tau}|_s = 0$  – в прилегающей диэлектрической среде. Условие  $\vec{E}\vec{\tau}_0 = 0$  можно истолковать, как постоянство потенциала на поверхности проводника:  $\vec{E}\vec{\tau}_0 = -\partial\varphi/\partial\tau = 0$  (дифференцирование по длине вдоль любого касательного направления). Следовательно,  $\varphi = \text{const}$  на  $S$ . Так как  $\vec{E} = 0$  в проводнике, следовательно,  $\varphi = \text{const}$  и в проводнике, т.е. проводящие тела – эквипотенциальны.  $\partial\varphi/\partial n|_s = -\rho_s/(\epsilon_0\epsilon_r)$ ,  $\vec{n}_0$  – внешняя нормаль по отношению к проводящей среде.

Поверхность проводника в электростатике заряжена ( $\vec{D}\vec{n}_0 = \rho_s$ ); .

Из соотношения  $\vec{D}\vec{n}_0 = \rho_s$  можно найти поле на поверхности проводящего шара в изотропной среде, если известен его полный заряд  $q$ :  $\vec{D} = \vec{r}_0 q / (4\pi R^2)$ .

### **Примеры расчета электростатических полей.**

1. Определим электрическое поле, создаваемое точечным зарядом  $Q$ , расположенным в безграничной среде, у которой  $\epsilon_r$  – скалярная постоянная ( $\epsilon_r = \text{const}$ ). Такую среду называют однородной и изотропной по отношению к электрическому полю.

а). Согласно закону Кулона сила, с которой точечный заряд  $Q$  действует на

точечный заряд  $q$ ,  $\vec{F} = \vec{r}_0 \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$ ,  $r$  – расстояние между зарядами,  $\vec{r}_0$  –

единичный вектор, направленный вдоль  $r$  от  $Q$  к  $q$ . Имея в виду *определение вектора  $\vec{E}$*  ( $\vec{E} = \vec{F}/q$ ), получаем, что напряженность электрического поля,

создаваемого точечным зарядом  $Q$ :  $\vec{E} = \vec{r}_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}$ , а вектор

$\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \vec{r}_0 \frac{Q}{4\pi r^2}$  в однородной изотропной среде не зависит от  $\epsilon_r$ .

Следовательно, при  $\varepsilon_r = \text{const}$  и одинаковом распределении свободных зарядов вектор  $\vec{D}$  имеет одинаковые значения в разных средах.

Заметим, что часто встречающийся множитель  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$  (м/Ф).

б). Воспользуемся *теоремой Гаусса* для определения поля точечного заряда. Предположим, что заряд расположен в начале координат. Задача имеет сферическую симметрию (нет предпочтительных направлений), следовательно, в качестве поверхности интегрирования можно выбрать сферу произвольного радиуса. Очевидно, что вектор  $\vec{E}$  по направлению совпадает с ортом  $\vec{R}_0$  координаты сферической системы и в точках поверхности сферы произвольного радиуса  $R$  его модуль постоянен.

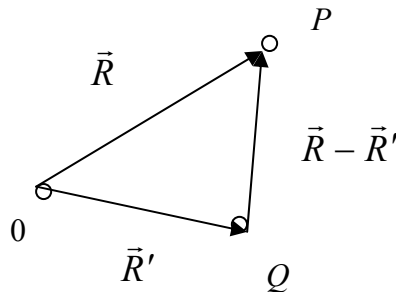
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S (\vec{R}_0 E_r) \cdot \vec{R}_0 ds = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad \text{или} \quad E_R \oint_S ds = E_R \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

Следовательно  $\vec{E} = \vec{R}_0 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r R^2}$ .

Если заряд находится в произвольной точке пространства, то поле, создаваемое зарядом  $Q$  в точке  $P$  будет определяться соотношением

$$\vec{E}_P = \vec{a}_{QP} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r |\vec{R} - \vec{R}'|^2}, \quad \text{где} \quad \vec{a}_{QP} = \frac{\vec{R} - \vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|} - \text{орт направления из точки, где}$$

расположен заряд  $Q$ , в точку  $P$ . Итак,  $\vec{E}_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r} \cdot \frac{\vec{R} - \vec{R}'}{|\vec{R} - \vec{R}'|^3}$

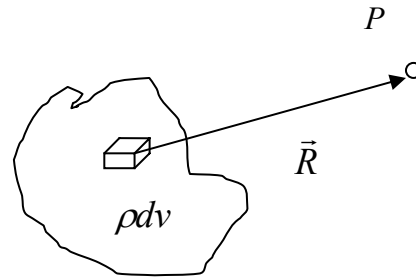


в). Если заряд распределен по объему равномерно с плотностью  $\rho$ , то напряженность поля, создаваемая в точке  $P$  элементом объема  $dv$

$$d\vec{E} = \vec{a}_R \frac{\rho dv}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r R^2}, \quad \text{где} \quad \vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{R} \quad . \quad R - \text{расстояние от элемента объема } dv \text{ до}$$

точки  $P$ . Так как для рассматриваемых полей применим принцип суперпозиции, напряженность поля, создаваемая всем распределенным

зарядом 
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_V \rho \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} dv.$$



Аналогичные соотношения можно записать, если заряд равномерно распределен по некоторой поверхности с плотностью  $\rho_S$ , либо, если задан нитевидный источник с равномерно распределенным зарядом с плотностью  $\rho_l$ .

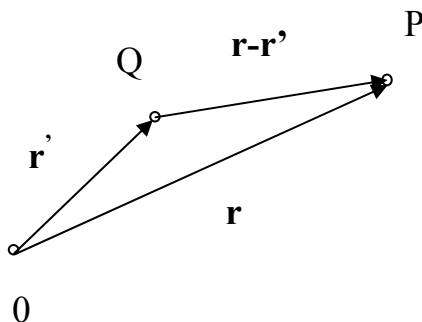
2. Вычислим потенциал  $\phi$  для точечного заряда, зная его поле

$$\vec{E} = \vec{r}_0 q / (4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r)$$

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

При  $r_2 \rightarrow \infty$   $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$

Если перенести заряд из точки  $r = 0$  в точку  $Q (\vec{r}_0')$ , то расстоянием станет

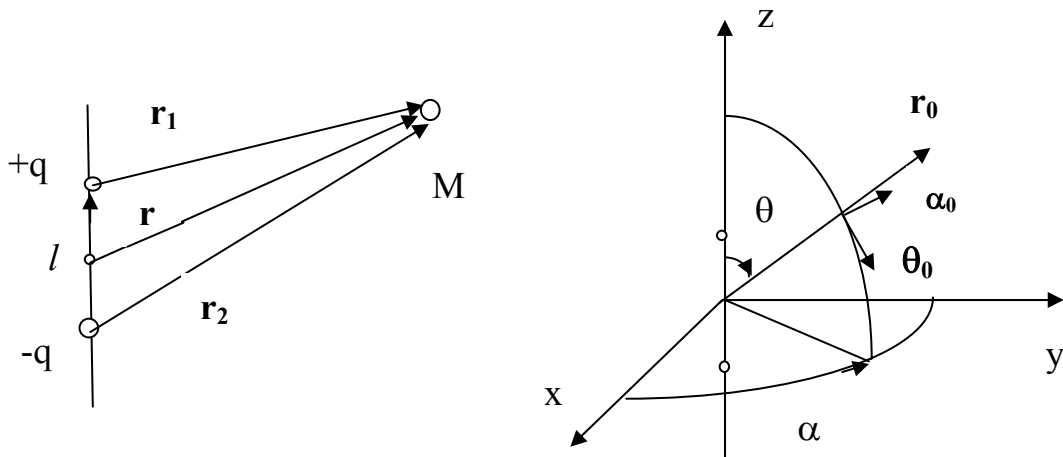


величина  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ , 
$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r |\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

В случае системы точечных зарядов, расположенных в однородной изотропной среде, по принципу суперпозиции

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \sum \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

3. *Поле электрического диполя.* Электрический диполь – система двух близко лежащих равных по величине разноименных точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ . Диполь характеризуется дипольным моментом  $\vec{p} = q\vec{l}$ ,  $\vec{l}$  – вектор, направленный от отрицательного к положительному заряду,  $l$  – расстояние между зарядами. Если сближать заряды, одновременно увеличивая их значения так, чтобы дипольный момент  $\vec{p}$  оставался неизменным, то в пределе получим точечный или идеальный диполь с тем же моментом.



Потенциал диполя найдем по принципу суперпозиции как сумму потенциалов зарядов  $(+q)$  и  $(-q)$ . 
$$\varphi_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right);$$
  $r_1, r_2$  –

расстояние от зарядов до точки, в которой вычисляем потенциал.

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - rl \cos \theta}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + rl \cos \theta}, \text{ считаем } r \gg l,$$

тогда

$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos \theta$ ,  $r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \theta$ . При этом разность можно представить

$$\text{в виде } \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{l \cos \theta}{r^2}, \text{ тогда } \varphi_M = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} = \frac{\vec{p}\vec{r}_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}.$$

$(\vec{p} = q\vec{l}, \vec{r}_0\vec{l} = l \cos \theta)$ ,  $\vec{r}_0$  – орт направления  $r$ .

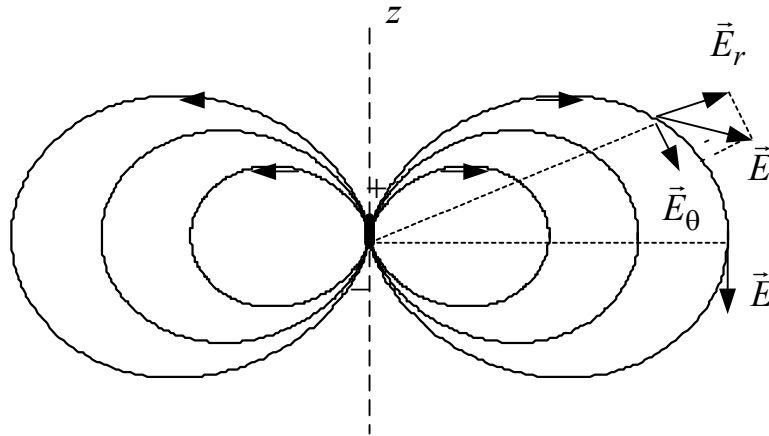
Определим напряженность электрического поля  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$

В сферической системе координат

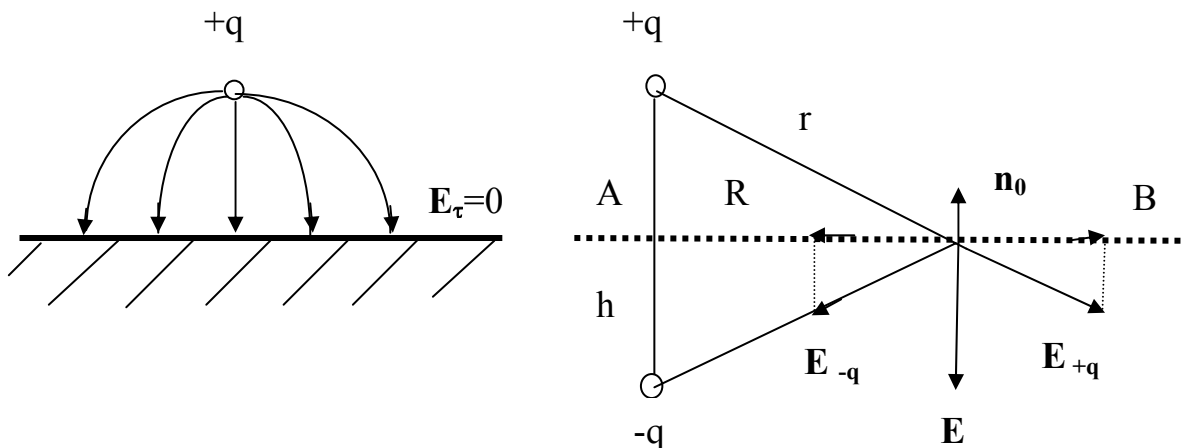
$grad\varphi = \vec{r}_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \vec{\alpha}_0 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ . Благодаря осевой симметрии  $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ .

$\vec{E} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^3} (\vec{r}_0 2 \cos\theta + \vec{\theta}_0 \sin\theta)$  - вектор  $\vec{E}$  не зависит от угла  $\alpha$  (поле обладает осевой симметрией) и имеет две составляющие. Картина силовых

линий поля диполя



4. *Поле точечного заряда, расположенного над идеально проводящей плоскостью.* Рассмотрим влияние точечного заряда на проводящую плоскость. В результате электростатической индукции на границе должен появиться некий заряд, создающий дополнительное поле, которое, налагаясь на первоначальное поле источника, приведет к удовлетворению граничных условий. Задача определения поля точечного заряда, расположенного над проводящей плоскостью, эквивалентна задаче определения поля двух зарядов: заданного  $q$  и некоторого фиктивного заряда  $(-q)$ , являющегося зеркальным изображением первого, находящихся в неограниченном диэлектрике.



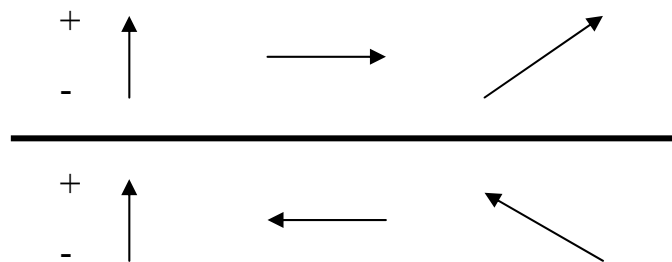


Поле в верхнем полупространстве удовлетворяет граничному условию  $E_\tau = 0$ , граница раздела – эквипотенциальная поверхность. Плоскость АВ, расположенная симметрично относительно зарядов, – эквипотенциальная поверхность с нулевым потенциалом, в точках этой плоскости вектор  $\vec{E}$  ориентирован в направлении  $(-\vec{n}_0)$ . Полный заряд, наведенный на плоскости АВ,

$$q' = \int_S \rho_s ds = -\frac{qh}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r^3} R dR d\alpha = -\frac{qh}{2\pi} 2\pi \int_h^\infty \frac{dr}{r^2} = -q, \quad R = \sqrt{r^2 - h^2},$$

плотность поверхностного заряда  $\rho_s = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \vec{n}_0$ , где вектор напряженности электрического поля определяется как результат сложения полей двух точечных зарядов, т.е. совпадает со значением вектора  $\vec{E}$  поля электрического диполя при  $\theta = \pi/2$ .  $\vec{E} = -\vec{n}_0 q h / (2\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^3)$ .

Введение фиктивного сосредоточенного заряда эквивалентно учету всех зарядов, наведенных на границе раздела. Метод замены проводящей поверхности фиктивным сосредоточенным зарядом получил название *метода зеркального изображения*. В силу принципа суперпозиции метод зеркального изображения можно обобщить на случай произвольной системы зарядов, расположенных над проводящей плоскостью.



### Стационарное магнитное поле.

Система уравнений стационарного электромагнитного поля (поле неизменно

$$\text{во времени, } \frac{\partial}{\partial t} = 0) \quad \text{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j}$$

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

При наличии тока ( $j \neq 0$ ) все уравнения взаимно связаны. Если плотность тока – заданная величина, магнитное поле может быть определено независимо от электрического при решении системы уравнений:

$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$  - магнитное поле соленоидальное (ротор поля не равен 0),

$\text{div} \vec{B} = 0$  - линии магнитного поля не имеют начала и конца (в природе не существует магнитного аналога  $\rho$ , т.е. не существует магнитных зарядов).

$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$  - в правой части равенства стоит алгебраическая сумма токов,

которые охватывает контур  $L$ ,

$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$  - поток вектора  $\vec{B}$  сквозь замкнутую поверхность равен 0.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Это система уравнений стационарного магнитного поля. Для однородной среды ( $\mu_r = \text{const}$ ) решение этой системы имеет вид

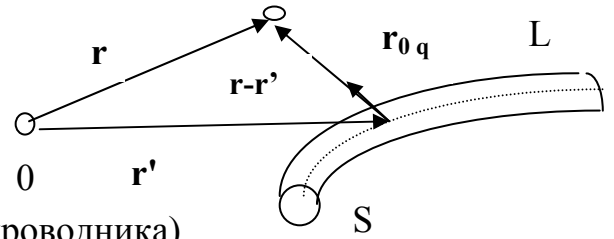
$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times \vec{r}_{0q}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} dv'$$

$\vec{r}$  – радиус – вектор точки наблюдения,  $\vec{r}'$  – радиус – вектор точки интегрирования в среде, где течет ток  $j$ . Это – обобщенный закон Био-Савара.

Для линейного тока  $I$ , проходящего по контуру  $L$ , магнитное поле описывается обычным законом Био-Савара

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}_{0q}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

(Линейным считается ток нитевидного проводника, если расстояния  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  остаются в процессе интегрирования значительно больше поперечного размера проводника).



Закон Био-Савара записывают и в форме дифференциала

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \frac{d\vec{l}' \times \vec{r}_{0q}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$

При этом  $d\vec{H}(\vec{r})$  – вклад в полное магнитное поле  $\vec{H}(\vec{r})$ , создаваемый элементом контура  $d\vec{l}'$  с током  $I$ .

Закон Био-Савара дает полное решение системы уравнений для заданного распределения тока в однородной среде. Но также используют и вспомогательные функции – потенциалы.

Вводят вспомогательную величину – векторный потенциал  $\vec{A}$ . По определению  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ . Для векторного потенциала справедливо уравнение

$$\text{Пуассона } \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \mu_r \vec{j}. \text{ Его решение } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv.$$

$$\text{Для линейных токов } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

После нахождения  $\vec{A}(\vec{r})$  магнитное поле определяется как  $\vec{H} = \text{rot}\vec{A} / \mu_0 \mu_r$ .

В ряде случаев такой путь оказывается менее трудоемким.

### **Рассмотрим несколько примеров.**

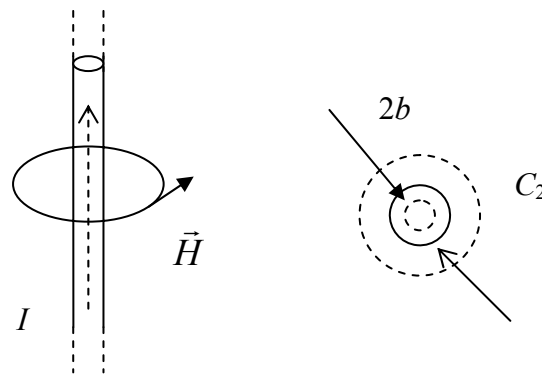
1). Определить напряженность магнитного поля внутри и вне бесконечно длинного прямого провода радиуса  $b$ , по которому течет ток  $I$ .

Задача имеет цилиндрическую симметрию: предложенная к рассмотрению система бесконечна вдоль оси  $z$  и нет зависимости от угла  $\varphi$ . Следовательно,

для решения задачи можно использовать теорему о циркуляции  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ ,

выбирая, в качестве конура интегрирования, окружность  $r = \text{const}$ , расположенную внутри или вне проводника при произвольном  $z$ .

Известно, что силовые линии магнитного поля линейного тока – окружности. Направление вектора  $\vec{H}$ , касательного к окружности, связано с направлением тока правилом правой руки. Если направление тока в проводнике совпадает с направлением оси  $z$ , то искомый вектор  $\vec{H} = \vec{\varphi}_0 H_\varphi$ . Векторный дифференциал длины направлен по касательной к рассматриваемому конуру  $d\vec{l} = \vec{\varphi}_0 r d\varphi$ .



а). Определяя напряженность поля внутри проводника, выберем в качестве конура интегрирования окружность  $C_1$ , радиус которой  $r_1$  меньше  $b$ .

$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} H_\varphi r_1 d\varphi = 2\pi r_1 H_\varphi = I_1$ . Здесь  $I_1$  – ток, протекающий через

площадку, ограниченную контуром  $C_1$ .  $I_1 = \frac{I}{\pi b^2} \cdot \pi r_1^2 = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 \cdot I$ .

Следовательно, внутри проводника (при  $r_1 < b$ ) напряженность поля

$$\vec{H} = \vec{\varphi}_0 H_\varphi = \vec{\varphi}_0 \frac{r_1}{2\pi b^2} I.$$

б). При определении напряженности магнитного поля вне проводника радиус контура интегрирования полагаем  $r_2 > b$ . При этом контур интегрирования

будет охватывать весь ток  $I$ .  $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r_2 H_\varphi = I$ .

Напряженность поля вне проводника ( $r_2 > b$ )  $\vec{H} = \vec{\varphi}_0 H_\varphi = \vec{\varphi}_0 \frac{1}{2\pi r_2} I$ .

2). По замкнутому проводнику протекает постоянный ток  $I$ . Определить вектор магнитной индукции, которую создает прямолинейный участок проводника длиной  $2L$  в точке  $P$ . Указанная точка расположена симметрично относительно концов участка на расстоянии  $r$  от его центра.

Предложенную задачу решим двумя способами.

а). Вспомним выражение для векторного потенциала для линейного тока

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \mu_r I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{l}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Предположим, что прямолинейный участок проводника

ориентирован по оси  $z$ :  $d\vec{l} = \vec{z}_0 dz$ . Расстояние от точки интегрирования до

точки  $P$ :  $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + r^2}$ . Следовательно, векторный потенциал в точке  $P$

$$\vec{A} = \vec{z}_0 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \vec{z}_0 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L}.$$

Далее определяем вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \text{rot}(\vec{z}_0 A_z) = \vec{r}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \vec{\varphi}_0 \frac{\partial A_z}{\partial r}.$$

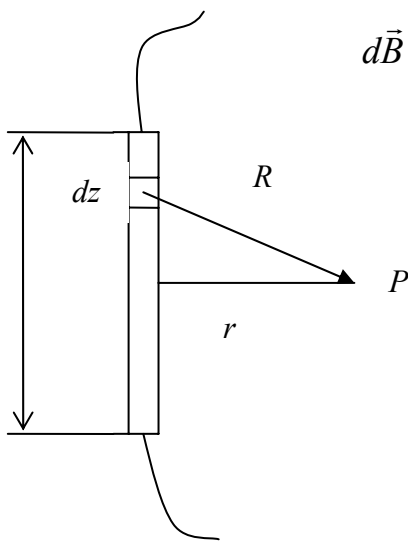
Цилиндрическая симметрия предполагает, что  $\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0$ . Следовательно

$$\vec{B} = -\vec{\varphi}_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \right] = \vec{\varphi}_0 \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}.$$

Если  $r \ll L$ , то  $\vec{B} = \vec{\varphi}_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , что соответствует результату, полученному при

решении задачи 1.

б). Воспользуемся дифференциальной формой закона Био-Савара:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

В нашей задаче вектор, соединяющий элемент  $dz$  участка проводника и точку  $P$ ,  $\vec{R} = \vec{r}_0 r - \vec{z}_0 z$ .

$$d\vec{l} \times \vec{R} = \vec{z}_0 dz \times (\vec{r}_0 r - \vec{z}_0 z) = \vec{\varphi}_0 r dz.$$

Следовательно

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \vec{\varphi}_0 \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^L \frac{rdz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \vec{\varphi}_0 \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}}$$

### Плоские электромагнитные волны.

В отсутствии сторонних источников любая декартова компонента векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Решение уравнения, зависящее только от одной координаты  $z$  и времени  $t$  представляет собой наложение двух возмущений, каждое из которых распространяется вдоль  $z$  в сторону возрастания или убывания  $z$  со скоростью  $v$

$$u(z, t) = u^+(t - z/v) + u^-(t + z/v),$$

$u^\pm$  - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Для гармонической (монохроматической) волны, распространяющейся в направлении оси  $z$  можно записать

$$u(z, t) = U_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \psi\right] = U_m \cos(\omega t - kz + \psi). \text{ Здесь}$$

$k = \omega/v = 2\pi/\lambda$  - волновое число.  $\lambda$  - длина волны - приращение координаты

$z$ , при котором фаза меняется на  $2\pi$ .  $v$  - скорость распространения волны.

Анализ гармонических процессов упрощается при использовании метода комплексных амплитуд.

При замене векторов поля комплексными представлениями:

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E), \vec{E} = \operatorname{Re} \dot{\vec{E}}, \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m \exp(i\omega t).$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t + \varphi_H); \vec{H} = \operatorname{Re} \dot{\vec{H}}; \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{H}}_m \exp(i\omega t),$$

однородные уравнения для комплексных амплитуд векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  выглядят следующим образом

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0; \quad \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0.$$

Скорость распространения волны для электромагнитного процесса

$v = c / \operatorname{Re} \sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}}$ ;  $v = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}$  - скорость распространения плоских однородных электромагнитных волн в идеальном диэлектрике. В вакууме ( $\epsilon_r = 1, \mu_r = 1$ )  $v = c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Каждое из уравнений эквивалентно трем скалярным относительно декартовых компонент.  $\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = 0$  - однородное уравнение Гельмгольца.  $k = \omega / v$  - волновое число,  $v$  - фазовая скорость.

Решения векторных уравнений складываются из своих проекций.

Для одномерного процесса, зависящего от координаты  $z$ ,  $\frac{d^2 \dot{u}_m}{dz^2} + k^2 \dot{u}_m = 0$

Общее решение этого уравнения  $\dot{u}_m(z) = \dot{u}_{m0}^+ e^{-ikz} + \dot{u}_{m0}^- e^{+ikz}$

$\dot{u}_{m0}^+, \dot{u}_{m0}^-$  - произвольные комплексные константы. Если положить

$\dot{u}_{m0}^+ = u_m^+ e^{i\varphi}, \dot{u}_{m0}^- = u_m^- e^{i\psi}$ , то при вычислении операции  $\operatorname{Re} [\dot{u}_m(z) e^{i\omega t}]$

получаем функцию  $u(z, t) = U_m^+ \cos(\omega t - kz + \varphi) + U_m^- \cos(\omega t + kz + \psi)$ , которая является решением волнового уравнения. Это - гармонические волны.

Рассматривая простейшие поля, зависящие только от декартовой координаты  $z$ , можно записать решения

$$\dot{\vec{E}}_m(z) = \dot{\vec{E}}_{m0}^+ e^{-ikz} + \dot{\vec{E}}_{m0}^- e^{+ikz} = \dot{\vec{E}}_m^+(z) + \dot{\vec{E}}_m^-(z)$$

$$\dot{\vec{H}}_m(z) = \dot{\vec{H}}_{m0}^+ e^{-ikz} + \dot{\vec{H}}_{m0}^- e^{+ikz} = \dot{\vec{H}}_m^+(z) + \dot{\vec{H}}_m^-(z)$$

$\dot{\vec{E}}_{m0}, \dot{\vec{H}}_{m0}$  - неопределенные векторные константы.

Компоненты  $\dot{\vec{E}}_m^\pm, \dot{\vec{H}}_m^\pm$  от координат  $x$  и  $y$  не зависят.

$$\dot{\vec{E}}_m^\pm = \pm Z_c \dot{\vec{H}}_m^\pm \times \vec{z}_0$$

$Z_c = \sqrt{\mu_0 \dot{\mu} / \epsilon_0 \dot{\epsilon}} = 120\pi \sqrt{\dot{\mu} / \dot{\epsilon}}$  - характеристическое сопротивление волны

(отношение поперечных к направлению распространения волны составляющих векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ )

1) векторы  $\vec{E}^\pm$  и  $\vec{H}^\pm$  не имеют продольных компонент:  $E_z^\pm = 0, H_z^\pm = 0$  - это поперечная волна; 2) эти векторы ортогональны, т.е.  $\vec{E}^\pm \cdot \vec{H}^\pm = 0$ ;

3) отношение скалярных величин  $\dot{E}_m^\pm$  и  $\dot{H}_m^\pm$  равно  $\pm Z_c$ .

В рамках метода комплексных амплитуд любой из параметров уравнений Максвелла надо рассматривать на комплексной плоскости.

Проницаемости  $\epsilon$  и  $\mu$   $\dot{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon''$ ,  $\dot{\mu} = \mu' - i\mu''$

Вводя обозначения  $\text{tg } \delta = \epsilon'' / \epsilon'$ ,  $\text{tg } \delta^M = \mu'' / \mu'$ ,  $\delta$  - угол электрических потерь,  $\delta^M$  - угол магнитных потерь, выражения для проницаемостей можно записать  $\dot{\epsilon} = \epsilon'(1 - i \text{tg } \delta)$ ,  $\dot{\mu} = \mu'(1 - i \text{tg } \delta^M)$ . Если  $\text{tg } \delta \gg 1$ , среду рассматривают как проводник, для диэлектриков  $\text{tg } \delta \ll 1$ .

Если *проницаемости*  $\dot{\epsilon} = \epsilon_r$ ,  $\dot{\mu} = \mu_r$  - *вещественны*, то среда не поглощает энергии электромагнитного поля. В этом случае  $k$  и  $Z_c = 120\pi \sqrt{\mu_r / \epsilon_r}$  - вещественные.

Если волна распространяется вдоль оси  $z$ , а вектор  $\vec{E}$  направлен вдоль оси  $x$ ,

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \vec{y}_0 (\dot{A} / Z_c) e^{-ikz}$$

При этом напряженности поля:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad \vec{H} = \vec{y}_0 (A / Z_c) \cos(\omega t - kz + \varphi).$$



В плоской волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно ортогональны и ортогональны направлению распространения. 
$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\mu_0 \mu}} \vec{z}_0 \times \vec{E}$$

Распространение волны сопровождается переносом энергии. Вектор Пойнтинга  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$  направлен по оси  $z$ ;  $\vec{P} = \vec{z}_0 (A^2 / Z_c) \cos^2 (\omega t - kz + \varphi)$ .

В однородной изотропной среде *при наличии потерь* параметр  $k$  следует считать комплексной величиной:  $k = k' - i k''$ .

Тогда для гармонической волны

$$u(z, t) = \operatorname{Re}\{U_m \exp[i(\omega t - kz + \varphi)]\} = U_m \exp(-k''z) \cos(\omega t - k'z + \varphi).$$

Если  $k'' > 0$  – это затухающая волна.  $k''$  – коэффициент затухания.

$k' = \omega/v = 2\pi/\lambda$  – коэффициент фазы. Фазовую скорость при этом рассматривают как скорость смещения фронта волны с нулевой амплитудой.

Длина волны  $\lambda$  уже не является периодом, но определяется по нулям функции.

Для затухающей электромагнитной волны  $\dot{k} = k' - ik'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r \mu_r (1 - itg\delta)}$ .

$$\text{(Считаем, что } \dot{\mu} = \mu_r) Z_c = \frac{\dot{k}}{\omega \dot{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r (1 - itg\delta)}} = |Z_c| e^{i\varphi_z}; \quad |Z_c| = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cos \delta};$$

$$\varphi_z = 1/2 \operatorname{arctg} tg\delta = \delta/2.$$

Затухающая электромагнитная волна  $\vec{E} = \vec{x}_0 A \exp(-k''z) \cos(\omega t - k'z + \varphi)$ ,

$\vec{H} = \vec{y}_0 (A/|Z_c|) \exp(-k''z) \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_z)$  – распространяется вдоль

направления  $z$  с фазовой скоростью  $v = \omega / k'$ ; характеристическое

сопротивление  $Z_c = Z_c' + i Z_c'' = |Z_c| \exp(i\varphi_z)$ ,  $\varphi_z$  – фазовый сдвиг между

векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

Распространение волны сопровождается переносом энергии. Выражение мгновенного значения вектора Пойнтинга ( $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ ) для волны в поглощающей среде

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{z}_0 (A^2 / |Z_c|) \exp(-2k''z) \cos(\omega t - k'z + \varphi) \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_z) = \\ &= \vec{z}_0 (A^2 / 2 |Z_c|) \exp(-2k''z) \{ \cos \varphi_z + \cos [2(\omega t - k'z + \varphi) - \varphi_z] \}\end{aligned}$$

При усреднении во времени ( $\vec{P} = \text{Re } \dot{\vec{P}}$ ,  $\dot{\vec{P}} = 1/2(\dot{\vec{E}}_m \times \dot{\vec{H}}_m^*)$ )

$\vec{P} = \vec{z}_0 (A^2 / 2 |Z_c|) \exp(-2k''z) \cos \varphi_z$  - средняя плотность потока энергии экспоненциально убывает вдоль  $z$ .

Запишем коэффициент затухания и коэффициент фазы для волны в диэлектрике и в проводнике.

$$k = k' - ik'' = |k| \exp[-i(\delta + \delta^M)/2] = K[(1 - i \operatorname{tg} \delta)(1 - i \operatorname{tg} \delta^M)]^{1/2},$$

$$\text{где } |k| = (\omega / c) \sqrt{|\hat{\epsilon}||\hat{\mu}|} \quad K = (\omega / c) (\epsilon' \mu')^{1/2}$$

В большинстве случаев магнитные потери в среде не учитывают ( $\mu'' = 0$ ).

При этом  $k = K(1 - i \operatorname{tg} \delta)^{1/2}$

В диэлектрике  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ .

Приближенные формулы  $k' \approx K = (\omega / c) (\epsilon' \mu')^{1/2}$ ,  $k'' \approx K/2 \operatorname{tg} \delta =$   
 $= 1/2 (\omega / c) (\epsilon' \mu')^{1/2} \operatorname{tg} \delta$ .

Характеристическое сопротивление волны в том же приближении

$$Z_c = Z_{c0} \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'(1 - itg\delta)}} \approx Z_{c0} \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \left(1 + i \frac{tg\delta}{2}\right). \quad Z_{c0} = 120\pi = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$

В проводнике  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ .  $k \approx K \sqrt{-itg\delta} = (1-i)K \sqrt{\frac{tg\delta}{2}}$ .

$$k' = k'' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu'} \sqrt{\frac{tg\delta}{2}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r \omega \sigma}{2}}; \quad \left( \operatorname{tg} \delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \right)$$

$$Z_c = Z_{c0} \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'(1 - itg\delta)}} \approx Z_{c0} \sqrt{i \frac{\mu'}{\epsilon' tg\delta}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu_r}{\sigma}} e^{i\pi/4}$$

Пусть  $E_m(z)$  – амплитуда напряженности электрического поля в точке с координатой  $z$ .  $E_m(z+l)$  – амплитуда в точке  $(z+l)$ . Отношение  $E_m(z) / E_m(z+l) = \exp(k''l)$  – показывает во сколько раз уменьшается амплитуда волны

при прохождении ею расстояния  $l$ . Затухание измеряется в неперах или в децибеллах:

$\ln [E_m(z) / E_m(z+l)] = k''l$  [неп],  $20 \lg [E_m(z) / E_m(z+l)] = k''l 20 \lg e \approx 8,69 k''l$  [дБ]. Расстояние  $\Delta^0$ , при прохождении которого электромагнитное поле ослабевает в  $e$  раз, называют глубиной проникновения поля в среду (толщиной скин-слоя).  $\Delta^0 = 1/k'' = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu_r \omega \sigma}}$ ,  $\Delta^0$  зависит от частоты.

### **Рассмотрим пример.**

Однородная плоская волна  $\vec{E} = \vec{x}_0 E$  распространяется в среде без потерь ( $\varepsilon_r, \mu_r = 1, \sigma = 0$ ) в направлении  $z$ . Предполагая, что модуль вектора  $E$  – гармоническая функция частоты  $f$  имеет максимальное значение  $E_0$  при  $t = 0$  и  $z = l$ , записать выражение для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  для любых  $t$  и  $z$  и определить точку, где  $E$  имеет положительный максимум в момент времени  $t = t_1$ .

Запишем

$$\vec{E}(z, t) = \vec{x}_0 E = \vec{x}_0 E_0 \cos(2\pi f t - k z + \psi). k = 2\pi f \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} -$$

волновое число. Амплитуда вектора  $E$  принимает максимальные значения, когда аргумент косинуса  $(2\pi f t - k z + \psi) = \pm 2 n \pi$ . При  $n = 0$  по условию задачи, в частности, при  $t = 0, z = l$ . Значит  $\psi = k l$ . Если максимального значения косинус достигает в момент  $t = t_1$ , это соответствует значениям  $z_n = (\lambda f t_1 + l) \pm n \lambda$ , т.е. точкам, отстоящим друг от друга на длину волны  $\lambda$ .

Таким образом  $\vec{E}(z, t) = \vec{x}_0 E_0 \cos[2\pi f t - k(z - l)]$ .

Вектор  $\vec{H}$  волны ортогонален вектору  $\vec{E}$  и направлению распространения волны.  $\vec{H}(z, t) = \vec{y}_0 H = \vec{y}_0 \frac{E}{Z_c}$ .  $Z_c = 120\pi \sqrt{\mu_r / \varepsilon_r}$ . Следовательно,

$$\vec{H}(z, t) = \vec{y}_0 \frac{E_0}{Z_c} \cos[2\pi f t - k(z - l)].$$

### ***Поляризация волн.***

Ориентация векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  относительно осей  $x$ ,  $y$  зависит от источника. Пусть вектор  $\vec{E}$  имеет одну составляющую  $E_x$ . Тогда поле такой плоской волны в среде без потерь определяется формулами

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad \vec{H}_0 = \vec{y}_0 (E_0 / Z_c) \cos(\omega t - kz + \varphi),$$

$\varphi$  - начальная фаза векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , т.е. фаза в точке  $z = 0$  при  $t = 0$ .

В фиксированной точке пространства ( $z = \text{const}$ ) конец вектора  $\vec{E}$  с течением времени перемещается вдоль отрезка прямой линии, величина вектора  $\vec{E}$  изменяется от  $E_0$  до  $(-E_0)$ . Это – *линейно поляризованная волна*.

Плоскость, проходящая через вектор  $\vec{E}$  и направление распространения (в рассматриваемом случае - пл.  $xoz$ ), называется *плоскостью поляризации*.

В общем случае волну можно рассматривать как суперпозицию двух плоских линейно поляризованных волн с взаимно перпендикулярной ориентацией векторов  $\vec{E}$ , распространяющихся в одном (вдоль  $z$ ) направлении.

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_{mx} \cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \vec{y}_0 E_{my} \cos(\omega t - kz + \varphi_2),$$

где  $E_{mx}$ ,  $E_{my}$  – амплитуды составляющих  $E_x$  и  $E_y$  соответственно,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – фазы этих составляющих в точке  $z = 0$  при  $t = 0$ .

Характер изменения вектора  $\vec{E}$  волны с течением времени в фиксированной точке пространства зависит от соотношения между начальными фазами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и от амплитуд  $E_{mx}$ ,  $E_{my}$ . В общем случае угол  $\theta$  может меняться со временем.

1. Если  $\varphi_1 = \varphi_2$ , вектор  $\vec{E}$  в любой момент времени лежит в плоскости, проходящей через ось  $z$  и составляющей угол  $\theta = \text{arctg}(E_{my} / E_{mx})$  с плоскостью  $xoz$ . С течением времени конец вектора  $\vec{E}$  перемещается вдоль отрезка прямой, составляющей с осью  $x$  угол  $\theta$ . Волна является линейно поляризованной.

2. Если амплитуды волн  $E_{mx} = E_{my} = E_0$ , а фазы отличаются на  $\pi / 2$ . Тогда  $\theta = \omega t - kz + \varphi_1 + m\pi$ ,  $m$  – целое - в фиксированной точке пространства угол  $\theta$  увеличивается пропорционально  $t$ . Величина модуля вектора  $\vec{E}$  при этом остается неизменной.  $|\vec{E}| = E_0$ . Конец вектора описывает окружность – это *волна круговой поляризации*. Если вектор  $\vec{E}$  вращается по часовой стрелке (если смотреть вдоль направления распространения) ( $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi / 2$ ), то это *правая круговая* поляризация. При вращении вектора против часовой стрелки – *левая круговая* поляризация. Вектор  $\vec{E}$  вращается в направлении от опережающей по фазе составляющей вектора к отстающей.

Волну с линейной поляризацией можно представить как суперпозицию двух волн круговой поляризации, имеющих одинаковые амплитуды и противоположные направления вращения.

3. В общем случае амплитуда и направление вектора  $\vec{E}$  не остаются постоянными. Вектор  $\vec{E}$ , вращаясь в плоскости  $z = \text{const}$ , изменяет свою длину так, что его конец описывает эллипс. Это *волна эллиптической поляризации*.

Заметим, что направление вектора  $\vec{H}$  меняется в пространстве и во времени также как и направление вектора  $\vec{E}$ , поскольку пространственный угол между ними составляет  $90^\circ$ , а фазовые углы равны (в среде без потерь).

### ***Волновые явления на границе двух сред***

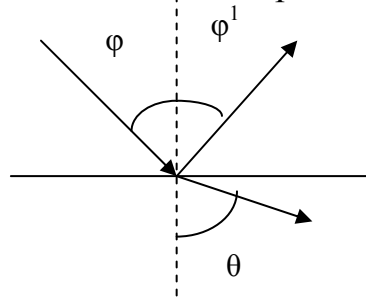
В общем случае направление распространения волны можно охарактеризовать волновым комплексным вектором  $\vec{k} = \vec{k}' - i\vec{k}''$ . При этом поле падающей волны описывается выражением

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{E}}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{H}}_0 e^{-i\vec{k}\vec{r}},$$

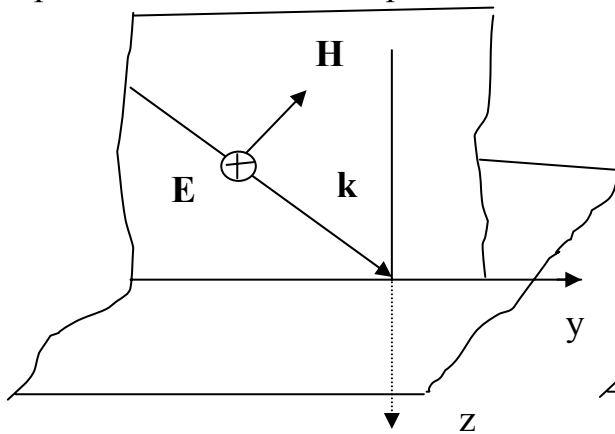
где  $\vec{r}$  – радиус – вектор, определяющий положение в пространстве исследуемой точки.

Пусть две однородные изотропные среды, из которых первая характеризуется параметрами  $\varepsilon_{r1}, \mu_{r1}$ , а вторая  $\varepsilon_{r2}, \mu_{r2}$ , разделены плоской границей. В первой

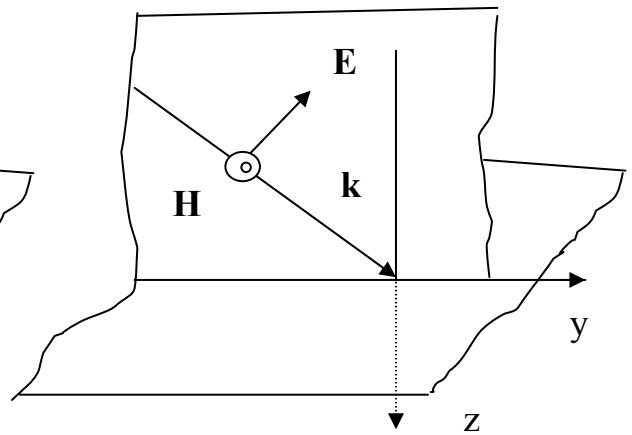
среде под углом  $\varphi$  от нормали к границе раздела распространяется плоская однородная волна  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  - падающая волна. Угол  $\varphi$  – это *угол падения*. Плоскость, проведенная через нормаль к поверхности раздела и направление распространения волны, называется *плоскостью падения*. В первой среде возникает *отраженная волна*  $\vec{E}^-, \vec{H}^-$ , и во второй – *прошедшая или преломленная волна*  $\vec{E}^+, \vec{H}^+$ . Угол  $\varphi'$ , образованный направлением распространения отраженной волны и направлением нормали к плоскости раздела, называется *углом отражения*, угол, образованный направлением распространения преломленной волны и нормалью, - *углом преломления*  $\theta$ .



Вектор  $\vec{E}^0$  падающей волны (говорим о линейно поляризованных волнах) перпендикулярен направлению распространения. Обычно ограничиваются рассмотрением случая горизонтальной и вертикальной поляризации. Все другие случаи можно представить как суперпозицию этих двух. Если вектор  $\vec{E}$  параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *горизонтальной*. При этом вектор  $\vec{H}$  лежит в плоскости падения. Если вектор  $\vec{E}$  лежит в плоскости падения, а вектор  $\vec{H}$  параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *вертикальной*.



Горизонтальная ( $\perp$ ) поляризация



Вертикальная ( $\parallel$ ) поляризация

Угол падения волны  $\varphi$ , угол отражения  $\varphi'$  и угол преломления  $\theta$  связаны законами Снелиуса.

$\varphi = \varphi'$  – угол падения равен углу отражения. Это *первый закон Снелиуса*.

$$\sin\theta / \sin\varphi = k_1 / k_2 = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1} \mu_{r1}}}{\sqrt{\epsilon_{r2} \mu_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} \quad - \text{второй закон Снелиуса.}$$

$n_1, n_2$  – коэффициенты преломления сред.  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1} \mu_{r1}} = c/v_1$ ,

$$n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2} \mu_{r2}} = c/v_2$$

$v_1, v_2$  – фазовые скорости волны в среде.  $\sin\theta / \sin\varphi = v_2 / v_1$ .

Если первая среда оптически более плотная.  $n_1 > n_2$ , то при некотором угле

$\varphi = \varphi^*$  ( $\varphi^*$  – предельный угол внутреннего отражения),  $\theta = \pi/2$ .

$$\sin \varphi^* = k_2 / k_1 = n_2 / n_1.$$

Комплексные амплитуды поля отраженной и прошедшей волн (при заданной падающей волне) должны зависеть от поляризации падающей волны.

По определению  $R_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\perp}^{-}}{\dot{E}_{\perp}^0}$ ,  $T_{\perp} = \frac{\dot{E}_{\perp}^{+}}{\dot{E}_{\perp}^0}$

$R_{\perp}$  – коэффициент отражения нормально поляризованной волны (горизонтальная поляризация),  $T_{\perp}$  – коэффициент прохождения нормально поляризованной волны.

$$R_{\perp} = \frac{Z_{c2} \cos \psi - Z_{c1} \cos \theta}{Z_{c2} \cos \psi + Z_{c1} \cos \theta}, \quad T_{\perp} = \frac{2Z_{c2} \cos \psi}{Z_{c2} \cos \psi + Z_{c1} \cos \theta}.$$

Коэффициенты отражения и прохождения в случае параллельно

поляризованной волны (вертикальная поляризация)  $R_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\parallel}^{-}}{\dot{E}_{\parallel}^0}$ ,  $T_{\parallel} = \frac{\dot{E}_{\parallel}^{+}}{\dot{E}_{\parallel}^0}$

$$R_{\parallel} = -\frac{Z_{c2} \cos \theta - Z_{c1} \cos \psi}{Z_{c2} \cos \theta + Z_{c1} \cos \psi}, \quad T_{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \psi}{Z_{c2} \cos \theta + Z_{c1} \cos \psi}$$

Это *формулы Френеля*.

$Z_{c1,2}$  – характеристические сопротивления волны (волновые сопротивления) в среде 1 и 2.  $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$

При определенном угле падения  $\varphi_B$  параллельно поляризованной волны коэффициент отражения  $R_{||}$  обращается в 0.  $R_{||} = 0$  при  $\varphi = \varphi_B$

Для  $\mu_{r2} = \mu_{r1}$   $\varphi_B = \arctg \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}$ .  $\varphi_B$  – угол Брюстера – угол полного

прохождения параллельно поляризованной волны.

### ***Рассмотрим несколько примеров.***

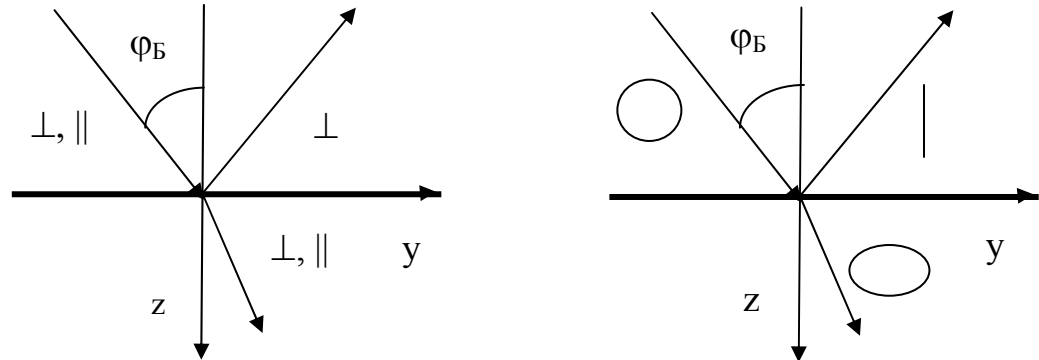
а). Предположим, что на границу раздела сред под углом Брюстера падает линейно поляризованная волна. Плоскость поляризации волны составляет угол  $\beta$  с плоскостью падения. Какова поляризация отраженной и преломленной волн? В рассматриваемом случае падающая волна имеет составляющие с горизонтальной и вертикальной поляризацией. Следовательно, отраженная волна содержит только составляющую с горизонтальной поляризацией, а составляющая с вертикальной поляризацией проходит через границу раздела сред.

б). Волна круговой поляризации падает на границу раздела сред. Какова поляризация отраженной и преломленной волн?

Плоскую волну круговой поляризации можно представить в виде суперпозиции двух линейно поляризованных волн, в частности волн с горизонтальной и вертикальной поляризациями. Следовательно, волна круговой поляризации будут отражаться при любых углах падения. Соотношение между амплитудами волн с горизонтальной и вертикальной поляризациями в отраженных и преломленных волнах будет иным, чем в падающей волне. Значит, эти волны будут иметь эллиптическую поляризацию. Если плоская волна с круговой поляризацией падает под углом Брюстера, то отраженная волна оказывается линейно поляризованной, а



преломленная – эллиптически поляризованной волной. Если верхняя среда оптически более плотная, то при углах падения, превышающих угол полного внутреннего отражения  $\varphi^*$ , преломленной волны не будет.



### Волны в прямоугольном волноводе

Решение однородного скалярного уравнения Гельмгольца  $\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = 0$  для пространственной структуры, однородной в направлении  $z$  (все сечения структуры плоскостью  $z = \text{const}$  тождественны), где параметр  $k$  имеет постоянное значение в подобластях,  $\dot{u}_m$  на границах удовлетворяет заданным условиям, можно представить в виде произведения двух функций разных аргументов  $\dot{u}_m(x, y, z) = T(x, y) Z(z)$ .

Для этих функций  $T(x, y)$  и  $Z(z)$  справедливы уравнения

$$d^2Z/dz^2 + \Gamma^2 Z = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 T + \chi^2 T = 0. \quad \chi^2 = k^2 - \Gamma^2.$$

Введено обозначение  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ .

Использованный прием решения называется *методом разделения переменных*.

Решение дифференциального уравнения для  $Z(z)$  можно записать в форме

$$Z(z) = \dot{A} \exp(-i\Gamma z) + \dot{B} \exp(i\Gamma z). \quad \dot{A} \text{ и } \dot{B} - \text{неопределенные константы.}$$

При этом  $\dot{u}_m = \dot{A} T(x, y) \exp(-i\Gamma z) + \dot{B} T(x, y) \exp(i\Gamma z)$ .

По форме два члена решения – комплексные амплитуды волн. Это неоднородные волны, так как их амплитуды зависят от поперечных координат  $x, y$ . Если  $\Gamma$  – вещественная величина, то она играет такую же роль, как  $k$  – волновое число. При комплексном  $\Gamma = \Gamma' - i\Gamma''$  ( $\Gamma', \Gamma'' > 0$ ) имеем  $\Gamma' = \omega / v_{\phi} = 2\pi / \Lambda$ , где  $\Lambda$  – длина волны,  $v_{\phi}$  – ее фазовая скорость,  $\Gamma''$  – коэффициент затухания. Величина  $\Gamma$  называется *продольным волновым числом*, или *постоянной распространения*. Параметр  $\chi$  – *поперечное волновое число*.

Не известны функция  $T(x,y)$  и параметр  $\chi^2$ . Само по себе уравнение  $\nabla_{\perp}^2 T + \chi^2 T = 0$  не имеет определенных решений. Необходимо поставить *краевую (граничную) задачу*. Например, если задать на контуре  $L_{\perp}$  обобщенного цилиндра  $T = 0$ , будет сформулирована *задача Дирихле*. Предположим, что задача внутренняя, т.е. решение  $T$  ищется внутри обобщенного цилиндра. Тогда задача имеет бесконечное множество решений  $T_n$ , каждое из которых реализуется при определенном значении параметра  $\chi^2$ . Решения  $T_n$  называются *собственными функциями*, а соответствующие им значения  $\chi_n^2$  параметра  $\chi^2$  – *собственными значениями*. Если разным собственным функциям соответствуют одинаковые собственные значения, то последние называются *вырожденными*.

Если на контуре  $L_{\perp}$  задано  $\partial T / \partial n = 0$  – то это *краевая задача Неймана*. Это задача также порождает систему собственных функций, которым отвечают собственные значения.

В продольно однородной структуре поперечные компоненты поля (составляющие векторов, лежащие в поперечной плоскости сечения структуры) и продольные компоненты (совпадающие с направлением вдоль структуры) связаны соотношениями.

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau} = -i \frac{\Gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \dot{E}_{mz} - \frac{i\omega\mu_0\mu_r}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \dot{\vec{H}}_{mz}$$

$$\dot{\vec{H}}_{m\tau} = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \dot{E}_{mz} - i \frac{\Gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \dot{H}_{mz}$$

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau} = \dot{\vec{E}}_{mx} + \dot{\vec{E}}_{my}, \quad \dot{\vec{H}}_{m\tau} = \dot{\vec{H}}_{mx} + \dot{\vec{H}}_{my}$$

Индекс ( $\perp$ ) употреблен в качестве знака отсутствия производных по  $z$ .

Волна, переносящая энергию в направлении  $z$ , обязательно должна иметь как поперечную электрическую  $\dot{\vec{E}}_{m\tau}$ , так и поперечную магнитную компоненты  $\dot{\vec{H}}_{m\tau}$ . В противном случае вектор Пойнтинга  $\vec{\Pi} = \vec{z}_0 \Pi = 0$ .

При этом достаточно, чтобы электромагнитное поле имело только одну продольную компоненту – либо  $H_z$ , либо  $E_z$ . Общее решение может рассматриваться как наложение двух частных, для одного из которых  $E_z \neq 0$ ,  $H_z = 0$  – класс  $E$ - волн, или *электрических* волн ( $TM$  - волны), а для другого  $H_z \neq 0$ ,  $E_z = 0$  – класс  $H$ - волн, или *магнитных* волн ( $TE$  – волны). Волновые процессы, имеющие как электрическую, так и магнитную продольные компоненты, называют *гибридными* волнами.

Простейшая электромагнитная волна в свободном пространстве, которая является продольно однородной структурой, лишена продольных компонент ( $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$ ). Она относится к классу  $T$ - волн ( $TEM$ - волн – *поперечно-электромагнитные* волны). Существование таких волн возможно при  $\chi^2 = 0$ . При этом  $\Gamma = k$ , т.е. любые  $T$ - волны распространяются в среде с той же фазовой скоростью, что и плоская однородная волна.

В отличие от  $T$ - волн для всех остальных волновых процессов  $\Gamma = (k^2 - \chi^2)^{1/2}$ . Если рассматривать незатухающие волны, для которых  $\Gamma$  – вещественная величина, то при  $\chi^2 > 0 \rightarrow \Gamma < k$ , фазовая скорость рассматриваемой волны

$v_\phi > v$  – больше скорости  $T$  – волны в рассматриваемой среде. Это быстрые волны. При  $\chi^2 < 0$ , т.е. при мнимых поперечных волновых числах,  $v_\phi < v$  – это медленные волны.

В прямоугольном волноводе с идеально проводящей оболочкой могут существовать только волны классов  $E$ - и  $H$ -. Так как поперечные составляющие векторов поля выражаются через продольные, то для вычисления поля этих волн достаточно определить составляющую  $\dot{E}_{mz}$  или  $\dot{H}_{mz}$  соответственно. ( $\dot{E}_m = \dot{E}(x, y)e^{-iz\Gamma}$ ,  $\dot{H}_m = \dot{H}(x, y)e^{-iz\Gamma}$ ).

*$E$  – волны.*

$$\partial^2 E_z / \partial x^2 + \partial^2 E_z / \partial y^2 + \chi^2 E_z = 0, \quad E_z = 0 \text{ на прямоугольном контуре } L.$$

Это - краевая задача Дирихле. Задача решается методом разделения переменных  $E_z = X(x) Y(y)$ .

Продольная составляющая электрического поля

$$E_z^{mn}(x, y) = E_0^{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b); \quad \chi_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2.$$

Разным значениям  $m, n$  соответствуют разные типы колебаний (разные моды)  $m = 1, 2, 3, \dots$   $n = 1, 2, 3, \dots$ . Значения  $m = 0, n = 0$  не годятся, так как в этом случае  $E_z = 0$  во всех точках внутри волновода.

Для нахождения постоянной  $E_0^{mn}$  требуются дополнительные данные, например, более конкретные сведения об источнике, создающем рассматриваемую волну.

Продольное волновое число  $\Gamma_{mn} = k [1 - (f_{кр}^{mn} / f)^2]^{1/2} = k [1 - (\lambda / \lambda_{кр}^{mn})^2]^{1/2}$ , критическая частота для определенного типа колебаний

$$f_{кр}^{mn} = [c/2\pi(\epsilon_r \mu_r)^{1/2}] [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^{1/2},$$

$\lambda_{кр}^{mn} = 2 / [(m/a)^2 + (n/b)^2]^{1/2}$  - критическая длина волны.

$Z_{mn}^E = \Gamma_{mn} / (\omega \epsilon_0 \epsilon_r)$  – волновое сопротивление в  $E$  - классе

*H* – волны. В этом случае требуется решение второй краевой задачи для  $H_z$ . На стенках волновода граничные условия:

$$\partial H_z / \partial x = 0 \text{ при } x = 0, a, \quad \partial H_z / \partial y = 0 \text{ при } y = 0, b.$$

Результат решения этой краевой задачи

$$H_z^{mn} = H_0^{mn} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b); \quad \chi_{mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2.$$

$m = (0), 1, 2, \dots$   $n = (0), 1, 2, \dots$  В случае *H*- волн  $m$  и  $n$  могут принимать нулевые значения. Однако они не могут равняться 0 одновременно: при этом составляющая  $H_z$  не зависит от переменных  $x$  и  $y$  и вектор электрического поля будет тождественно равен 0, что невозможно.  $H_0^{mn}$  - неопределенная постоянная. Постоянная распространения  $\Gamma_{mn}$ , критическая частота  $f_{кр}^{mn}$  и критическая длина волны  $\lambda_{кр}^{mn}$  такие же, как для волн класса *E*. Волновое сопротивление в *H*- классе

$$Z_{mn}^H = \omega\mu_0\mu_r / \Gamma_{mn} = Z_{c0} [1 - (f_{кр}^{mn} / f)^2]^{-1/2} = Z_{c0} [1 - (\lambda / \lambda_{кр}^{mn})^2]^{-1/2},$$

$$Z_{c0} = 120\pi (\mu_r / \epsilon_r)^{1/2}.$$

Структура поля в поперечном сечении (при фиксированном значении координаты  $z$ ) аналогична структуре стоячей волны. Индекс  $m$  равен числу полуволин ( $\lambda_x/2=a/m$ ), укладываемых на поперечном размере «а» стенки, параллельной оси  $x$ . Индекс  $n$  равен числу полуволин ( $\lambda_y/2=b/n$ ), укладываемых на поперечном размере «b» стенки, параллельной оси  $y$ . Равенство 0 одного из индексов означает, что поле рассматриваемой волны не зависит от соответствующей координаты.

Распространение волны происходит только, если постоянная распространения волны  $\Gamma_{mn}$  – вещественная, т.е. при  $\lambda < \lambda_{кр}^{mn}$ . Длина волны в волноводе определяется продольным волновым числом  $\Gamma_{mn}$

$$\Gamma_{mn} = \frac{2\pi}{\Lambda_{mn}}, \quad \Lambda_{mn} = \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{1 - (\lambda_\epsilon / \lambda_{кр}^{mn})^2}}. \text{ Здесь } \lambda_\epsilon \text{ - «рабочая» длина волны в}$$

среде, заполняющей волновод. Фазовая скорость, или скорость перемещения

фазового фронта  $v_{\phi}^{mn} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda_{\varepsilon} / \lambda_{кр}^{mn})^2}}$ , а групповая скорость, или

скорость переноса энергии  $v_{gp}^{mn} = v \sqrt{1 - (\lambda_{\varepsilon} / \lambda_{кр}^{mn})^2}$ ,  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$  - скорость

распространения волны в однородном пространстве с проницаемостями  $\varepsilon_r, \mu_r$ .

Для различных типов волн критическая длина волны зависит от размеров  $a$  и  $b$  и от индексов  $m$  и  $n$ . При увеличении значений индексов и фиксированных размерах волновода значение  $\lambda_{кр}^{mn}$  уменьшается.

Наибольшую критическую длину при  $a > b$  имеет волна  $H_{10}$ .  $\lambda_{кр}^{10} = 2a$ . Волну, имеющую наибольшую  $\lambda_{кр}^{mn}$ , называют *основной волной* рассматриваемой линии передачи (или *волной низшего типа*). При  $a > b$ , основной волной прямоугольного волновода является волна  $H_{10}$ .

При фиксированной частоте  $f$  только для некоторых достаточно малых  $m$  и  $n$  выполняется условие  $f > f_{кр}^{mn}$  ( $f_{кр}^{mn} = [c / [2\pi (\varepsilon_r \mu_r)^{1/2}]] [(m\pi / a)^2 + (n\pi / b)^2]^{1/2}$ ), лишь для конечного числа типов  $\Gamma_{mn}$  вещественное и только эти типы имеют характер распространяющейся волны, переносящей энергию. Если  $a > b$ , волна  $H_{10}$  - волна с наименьшей критической частотой

$$f_{кр}^{min} = f_{кр}^{10} = [c / (\varepsilon_r \mu_r)^{1/2}] (1/2a).$$

Отличительное свойство основной волны - однородность поля в направлении оси  $y$ .

$$\dot{\vec{E}}_m = \vec{y}_0 E_0 \sin(\pi x / a) \exp(-i\Gamma_{10} z)$$

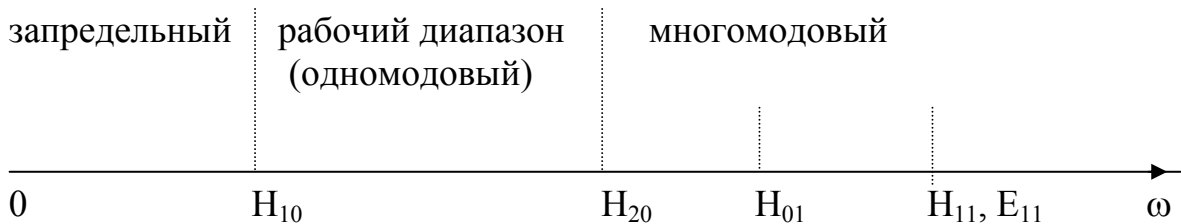
$$\dot{\vec{H}}_m = (E_0 / Z_{10}^H) [-\vec{x}_0 \sin(\pi x / a) + \vec{z}_0 (i\pi / \Gamma_{10} a) \cos(\pi x / a)] \exp(-i\Gamma_{10} z).$$

Если частота сигнала  $f > f_{кр}^{10}$  (т.е. больше критической для основного типа), но меньше критической частоты любого высшего типа  $f < f_{кр}^{mn}$ , то только основной тип будет распространяющимся. Такой режим работы волновода называется *одноволновым* (одноמודовым).

Если размер  $a \geq 2b$ , то ближайшим высшим типом будет  $H_{20}$ .

Тип волны	$H_{10}$	$H_{01}$	$H_{11}, E_{11}$	$H_{20}$	$H_{02}$
$\lambda_{кр}$	$2a$	$2b$	$2ab(a^2+b^2)^{-1/2}$	$a$	$b$

Одномодовый режим обеспечивается в диапазоне частот  $f_1 = c/2a$  и  $f_2 = c/a$ , отношение которых равно 2, т.е. ширина рабочего диапазона составляет одну октаву.



Рабочий диапазон для одномодового режима  $a < \lambda < 2a$ .

### **Рассмотрим пример.**

Сигнал с несущей частотой 30 ГГц передается по волноводу прямоугольного сечения  $7.2 \times 3.4 \text{ мм}^2$ . Длина волновода  $L=10$  м. Определить время задержки.

Как изменится фаза несущей, если волновод удлинить на  $\Delta L = 1$  мм?

Длина волны в воздухе («рабочая» длина волны)  $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{30 \cdot 10^9} = 0.01 \text{ м}$ .

Критическая длина волны основного типа колебаний  $\lambda_{кр}^{10} = 2a = 0.0144 \text{ м}$ .

Заданы такие размеры волновода ( $a > 2b$ ), что ближайшим типом колебаний будет мода с индексами (20):  $\lambda_{кр}^{20} = a = 0.0072 \text{ м}$ . Так как в волноводе могут

возбуждаться только такие моды, для которых «рабочая» длина волны меньше критической, в нашем примере волновод будет работать в

одномодовом режиме.  $\lambda_{кр}^{10} > \lambda > \lambda_{кр}^{20}$ .

Длина волны в волноводе  $\Lambda_{10} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр}^{10})^2}} = 0,0139 \text{ м}$  (больше, чем длина

волны в свободном пространстве). Время задержки сигнала определяется

скоростью переноса энергии по волноводу, т.е. групповой скоростью  $v_{gp}^{10} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda_{10}}$ . Групповая скорость  $v_{gp}^{10} = 3 \cdot 10^8 \frac{0.01}{0.0139}$  м/с –

меньше скорости света. Время задержки  $\tau = \frac{L}{v_{gp}^{10}} = 46$  нс.

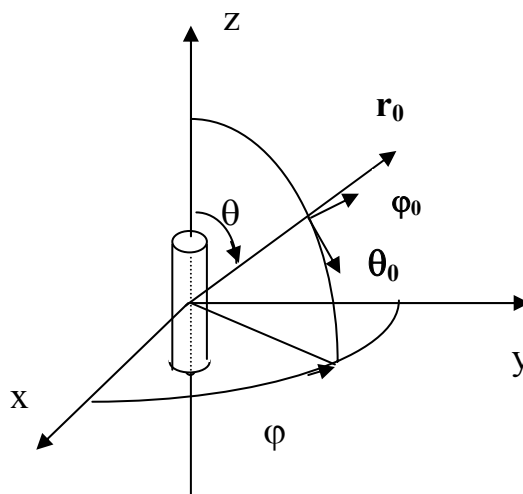
Изменение фазы несущей – это изменение показателя в сомножителе  $e^{-i\Gamma_{10}z}$ , описывающем зависимость поля от продольной координаты.

$$\Delta\varphi = \Gamma_{10}\Delta L = \frac{2\pi}{\Lambda_{10}} \cdot \Delta L = 25.9^\circ$$

### Элементарный электрический излучатель.

Элементарный электрический вибратор – это настолько малый элемент объема  $\Delta v = l\Delta s$ , выделенный в области, где расположены сторонние источники, что комплексная амплитуда плотности тока в нем практически постоянна, а размеры малы по сравнению с длиной волны. Амплитуда и фаза тока не изменяются вдоль него. Приближенной физической моделью такого элементарного излучателя может служить так называемый диполь Герца.

Пусть вибратор, расположенный в безграничной однородной изотропной среде, ориентирован вдоль оси  $z$ . Расположим начало координат в его средней точке. Ток в вибраторе  $I^{cm} = I_m^{cm} \cos \omega t$ .



Предполагается,  $l \ll r$ ,  $l \ll \lambda$  – элемент должен быть мал по сравнению с расстоянием наблюдения и мал в волновом масштабе



Выражения для комплексных амплитуд векторов поля

$$\dot{\vec{H}}_m = \vec{\Phi}_0 \frac{\dot{I}_m^{cm}}{4\pi} l \left( \frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \sin \theta,$$

$$\dot{\vec{E}}_m = \frac{\text{rot} \dot{\vec{H}}_m}{i\omega \epsilon_0 \epsilon_r} = -\frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi\omega \epsilon_0 \epsilon_r} \left[ \vec{r}_0 \frac{2}{r^2} \left( \frac{i}{r} - k \right) \cos \theta + \vec{\Theta}_0 \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{k}{r} - ik^2 \right) \sin \theta \right] e^{-ikr}$$

Вектор напряженности электрического поля имеет две составляющие  $E_\theta$  и  $E_r$ , вектор напряженности магнитного поля имеет одну компоненту  $H_\phi$ . Таким образом в любой точке пространства вектор  $\vec{E}$  лежит в меридиональной плоскости, т.е. в плоскости, проходящей через ось вибратора и точку наблюдения, вектор  $\vec{H}$  лежит в азимутальной плоскости, т.е. в плоскости, перпендикулярной оси вибратора. На любой сферической поверхности  $r = \text{const}$  любая из компонент  $E_r$ ,  $E_\theta$ ,  $H_\phi$  синфазны, но амплитудное распределение зависит от угла  $\theta$ . Поле меняется при изменении  $r$ . Поле обладает осевой симметрией (отсутствует зависимость от угла  $\phi$ ).

При анализе структуры электромагнитного поля излучателя пространство вокруг него обычно делят на три зоны: *дальнюю или волновую* ( $kr \gg 1$ ), *ближнюю* ( $kr \ll 1$ ) и *промежуточную*.

Поле в *ближней зоне*. Здесь  $r \ll \lambda$ , следовательно, можно считать  $\exp(-ikr) \approx 1$  и оставить в выражениях соответствующие слагаемые ( $1/r^n$ ) с учетом их малости.

$$\dot{\vec{E}}_m \cong \frac{\dot{p}_m}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^3} (\vec{r}_0 2 \cos \theta + \vec{\Theta}_0 \sin \theta), \quad \dot{\vec{H}}_m \cong \vec{\Phi}_0 \frac{\dot{I}_m^{cm} l}{4\pi r^2} \sin \theta \cong \vec{\Phi}_0 \frac{i\omega \dot{p}_m}{4\pi r^2} \sin \theta.$$

$$\dot{p}_m = -i \frac{\dot{I}_m^{cm} l}{\omega} - \text{комплексная амплитуда момента диполя.}$$

Распределение электрического поля такое же, как и в случае электростатического диполя. Однако поле переменное во времени и изменяется по закону  $\cos(\omega t + \psi)$ . Выражение для напряженности магнитного поля совпадает с формулой закона Био –Савара (где  $I$  – ток в вибраторе в рассматриваемый момент времени). Таким образом, в ближней

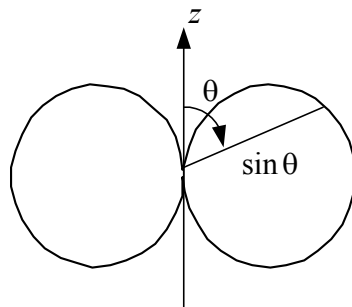
зоне преобладает квазистационарное поле. Эта зона индукции. Вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$ . Следовательно, вектор Пойнтинга – мнимая величина, ее среднее значение равно 0. Этот результат – отсутствие в среднем переноса энергии – получен из-за приближенного представления поля. В ближней зоне существуют относительно большие реактивные поля. Заметим, что в случае среды без потерь полные потоки энергии в ближней и дальней зонах одинаковы, а плотность потока энергии в ближней зоне значительно больше, чем в дальней.

В дальней зоне, на расстояниях  $r \gg \lambda$ , основную роль играют слагаемые, содержащие множитель  $[\exp(-ikr)]/r$ .

$$\dot{\vec{E}}_m \cong \vec{\theta}_0 \frac{iI_m^{cm} l \omega \mu_0 \mu_r \sin \theta}{4\pi r} e^{-ikr}, \quad \dot{\vec{H}}_m \cong \vec{\phi}_0 \frac{iI_m^{cm} l \omega \mu_0 \mu_r \sin \theta}{4\pi Z_c r} e^{-ikr}$$

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}, \quad Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}.$$

Поле в дальней зоне имеет характер сферической волны с постоянной распространения  $k = \omega / c = 2 \pi / \lambda$ . Электрические и магнитные компоненты синфазны. Синфазность векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  означает вещественность вектора  $\vec{P}$ . Следовательно, существует поток мощности в окружающее пространство. Амплитуда поля зависит от расстояния (как  $1/r$ ) и от угла  $\theta$  и не зависит от угла  $\varphi$ , т.е. излучение обладает некоторой направленностью. В направлениях  $\theta = 0, \theta = 180^\circ$  излучение отсутствует. В экваториальной плоскости ( $\theta = 90^\circ$ ) излучение максимально. Диаграмма направленности – распределение излучения в меридиональной плоскости.

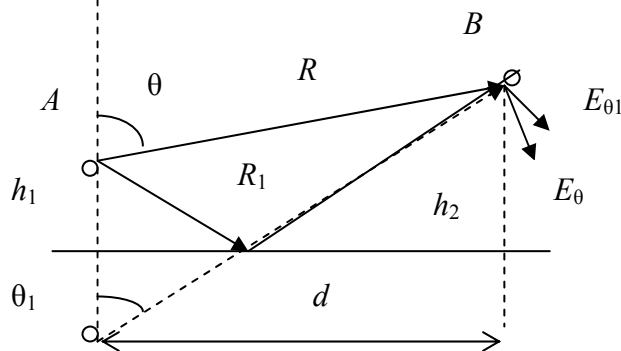


Волна неоднородна: поверхности равных амплитуд определяются уравнением  $\sin\theta/r = \text{const}$  и не совпадают с поверхностями равных фаз. Поле содержит только поперечные составляющие  $H_\varphi$  и  $E_\theta$ , которые взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны (нет компонент нормальных поверхности фазового фронта  $r = \text{const}$ , т.е. поле может быть отнесено к классу  $T$ ). Связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  такая же, как в плоской волне  $\dot{\vec{E}}_m = Z_c \dot{\vec{H}}_m \times \vec{r}_0$  - волна является локально плоской и в малой области пространства практически не отличается от плоской однородной  $T$ -волны.

*Промежуточная зона* является переходной от ближней зоны к дальней. При анализе выражений в этом случае нельзя пренебречь ни одним из слагаемых. Следовательно, в промежуточной зоне поле излучения и реактивное (связанное с вибратором) поле оказываются одного порядка.

***Рассмотрим пример.***

На высоте  $h_1$  над поверхностью земли расположен элементарный электрический излучатель  $A$ , ориентированный вдоль нормали к поверхности. Определить вектор напряженности электрического поля в точке  $B$ , расположенной на высоте  $h_2$ . Расстояние  $d \gg \lambda$ .



Поле в точке  $B$  является суперпозицией полей двух волн: прямой волны от источника в направлении  $\vec{R}$  и волны отраженной от поверхности земли в направлении  $\vec{R}_1$ :  $\vec{E} = \vec{E}_\theta + \vec{E}_{\theta_1}$ .

Известно, что вектор напряженности электрического поля элементарного излучателя имеет в дальней зоне ( $d \gg \lambda$ ) только одну составляющую:

$$\dot{\vec{E}}_m \cong \vec{\theta}_0 \frac{iI_m^{cm} l \omega \mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R} e^{-ikR}.$$

Следовательно, можно записать  $\dot{\vec{E}}_{m1} \cong \vec{\theta}_{01} \frac{iI_m^{cm} l \omega \mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{\sin \theta_1}{R_1} e^{-ikR_1} \cdot R_{\parallel}$ .

Здесь  $R_{\parallel}$  - коэффициент отражения  $E$  - поляризованной волны, учитывающий изменение комплексной амплитуды вектора  $\vec{E}$  при отражении от поверхности земли.  $R_{\parallel} = \left| \overline{A_1 B} \right|$ .

Вектора  $\vec{E}_{\theta}$  и  $\vec{E}_{\theta_1}$  в точке  $B$  не параллельны, однако, если  $d \gg h_1, h_2$ , то

можно считать  $\theta \cong \theta_1$  и записать  $\dot{\vec{E}}_m \cong \vec{\theta}_0 \frac{iI_m^{cm} l \omega \mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R} e^{-ikR} \cdot F$ ,

где  $F = 1 + R_{\parallel}(\theta) \exp[-ik(R_1 - R)]$ . Кроме того, можно заменить

$$R = \sqrt{d^2 + (h_2 - h_1)^2} = d \sqrt{1 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{d^2}} \cong d + \frac{(h_2 - h_1)^2}{2d},$$

$$R_1 = \sqrt{d^2 + (h_2 + h_1)^2} \cong d + \frac{(h_2 + h_1)^2}{2d},$$

$$R_1 - R \cong \frac{(h_2 + h_1)^2}{2d} - \frac{(h_2 - h_1)^2}{2d} = \frac{2h_1 h_2}{d}.$$

При этом множитель  $F$ , учитывающий влияние земли

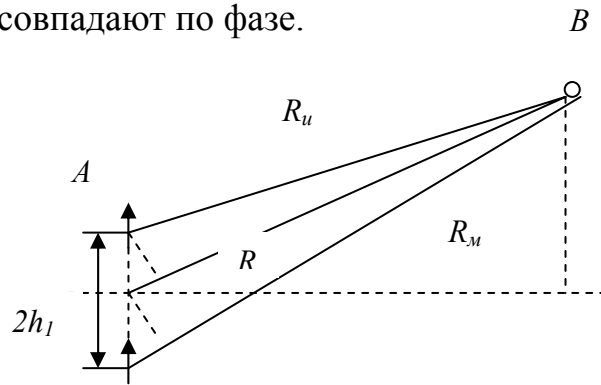
$$F = 1 + R_{\parallel}(\theta) \exp\left[-ik \frac{2h_1 h_2}{d}\right].$$

Если землю рассматривать как идеальный проводник,  $R_{\parallel} = 1$ , тогда модуль

$$|F| = \left| 1 + \exp\left(-ik \frac{2h_1 h_2}{d}\right) \right| = 2 \left| \cos\left(\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda d}\right) \right|. \text{ При фиксированной высоте } h_1 \text{ и}$$

длине волны  $\lambda$  напряженность электрического поля в точке приема может принимать нулевые и максимальные значения в зависимости от отношения  $(h_2 / d)$ . Модуль  $|F|$  лежит в интервале  $0 \div 2$ .

Если в условии задачи изначально говорилось бы об идеально проводящей поверхности, задачу можно решить, используя метод зеркального изображения: рассматривать искомый вектор поля как результат суперпозиции поля заданного источника и поля зеркального изображения этого источника – вертикального излучателя. Токи в обоих излучателях равны по величине и совпадают по фазе.



Учитывая, что расстояния  $R_u$  и  $R_M$  различны и отличаются от  $R$  – расстояния от точки пересечения нормали с поверхностью раздела, следует только в фазовых множителях (в показателях экспонент), так как разговор идет об определении поля в дальней зоне.

$$R_u = R - h_1 \cos \theta, \quad R_M = R + h_1 \cos \theta.$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m &\cong \vec{\theta}_0 \frac{iI_m^{cm} l \omega \mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R} e^{-ikR} \left( e^{ikh_1 \cos \theta} + e^{-ikh_1 \cos \theta} \right) = \\ &= \vec{\theta}_0 \frac{iI_m^{cm} l \omega \mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R} e^{-ikR} 2 \cos(kh_1 \cos \theta). \end{aligned}$$

## Упражнения и задачи

### Векторный анализ

**Ф1.** Показать, что в неоднородной среде, магнитная проницаемость которой есть функция пространственных координат, вытекает следующее уравнение для вектора напряженности магнитного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -1/\mu_a (\mathbf{H} \operatorname{grad} \mu_a)$$

**Ф2.** Подсчитать циркуляцию вектора  $\mathbf{A} = -x_0 y/a + y_0 x/a$  по окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ .

**Ф3.** Даны два вектора  $\mathbf{A} = 3x_0 + 4y_0 + 5z_0$      $\mathbf{R} = x x_0 + y y_0 + z z_0$

Определить  $\operatorname{grad} (\mathbf{A} \mathbf{R})$

**Ф4.** Задан потенциал  $\varphi = x^y + z^2$ . Найти  $\operatorname{grad} \varphi$  в точке с координатами  $x = 2.7$ ;  $y = 2$ ;  $z = 2$ .

**Ф5.** Определить поток вектора  $\vec{A} = \vec{x}_0 x z^2 + \vec{y}_0 x^2 y + \vec{z}_0 y^2 z$  сквозь поверхность сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

**Ф6.** Используя представление дивергенции как поток вектора сквозь замкнутую поверхность, составить выражение для  $\operatorname{div} \vec{A}$  в цилиндрической системе координат.

**Ф7.** Определить ротор векторного произведения заданного вектора  $\mathbf{A}$  и радиус-вектора  $\mathbf{R}$ .

**Ф8.** Найти лапласиан скаляра  $\varphi = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1/|\vec{R}|$  при  $R \neq 0$ .

### Электростатика

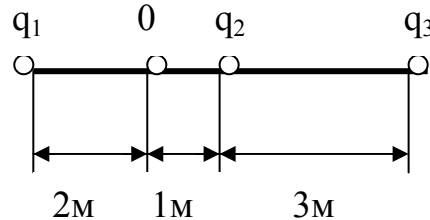
**Э1.** Определить вектор напряженности электрического поля линейного протяженного источника.

- Э2. Определить вектор напряженности электрического поля, создаваемого бесконечной плоскостью, по которой распределен заряд с поверхностной плотностью  $\rho_s$ .
- Э3. Найти вектор напряженности электрического поля на оси диска радиуса  $b$ , по которому распределен заряд с поверхностной плотностью  $\rho_s$ .
- Э4. Найти вектор напряженности электрического поля на оси линейного источника длины  $L$ .
- Э5. Положительный заряд  $Q$  расположен в центре сферической полости радиуса  $R_i$  в проводящей сфере радиуса  $R_0$ . Определить вектор напряженности электрического поля и скалярный потенциал, как функцию расстояния  $R$ .
- Э6. Положительный заряд  $Q$  расположен в центре сферической полости радиуса  $R_i$  в диэлектрической сфере радиуса  $R_0$ . Определить вектор напряженности электрического поля и скалярный потенциал, как функцию расстояния  $R$ .
- Э7. Две металлические сферы радиусов  $b_1$  и  $b_2$  соединены проводником. Суммарный заряд, сообщенный сферам, равен  $Q$ . Расстояние между сферами велико настолько, что распределение заряда на них можно считать равномерным. Найти: а) заряд на каждой из сфер, б) вектор напряженности электрического поля на поверхности каждой сферы.
- Э8. Цилиндрический конденсатор состоит из внутреннего проводника радиуса  $a$  и внешнего проводника, внутренний радиус которого  $b$ . Пространство между проводниками заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon_r$ . Длина конденсатора  $L$ . Определить емкость конденсатора.
- Э9. Две проводящие полуплоскости ортогональны. Заряд  $Q$  находится на расстоянии  $d_1$  от одной и  $d_2$  от другой из них. Определить силу, действующую на заряд.
- Э10. Плоская граница раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_{r1}$  и  $\epsilon_{r2}$  свободна от зарядов. Известно, что вектор

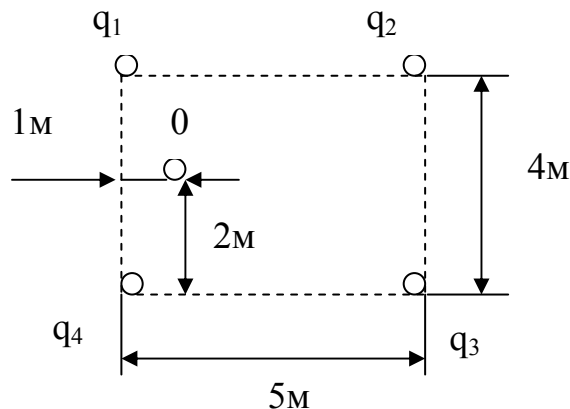
напряженности электрического поля  $E_1$  составляет угол  $\varphi_1$  с нормалью к границе раздела. Определить  $E_2$  и  $\varphi_2$ .

Э11. В вакууме на одной прямой расположены три точечных заряда:

$q_1 = 2$  мкКл,  $q_2 = 7$  мкКл и  $q_3 = 10$  мкКл. Определить напряженность электрического поля в точке 0.



Э12. В вакууме расположены четыре точечных заряда:  $q_1 = 1$  мкКл,  $q_2 = -2$  мкКл и  $q_3 = 3$  мкКл и  $q_4 = -4$  мкКл. Найти напряженность электрического поля в точке 0.



Э13. Тонкий кольцевой проводник радиусом 1 см несет полный заряд 1 мкКл. Определить напряженность электрического поля и скалярный потенциал в точках на оси кольца.

Э14. Равномерно заряженный диэлектрический шар ( $\epsilon_r = 10$ ) находится в однородной диэлектрической среде ( $\epsilon_r = 4$ ). Найти напряженность поля на поверхности шара и на расстоянии  $2R$  от центра.  $R = 0,5$  м,  $\rho = 2$  мкКл/м<sup>3</sup>.

Э15. Имеется нить, заряженная с погонной плотностью 10 Кл/м. Найти напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии 10 см от оси нити в случае двух диэлектриков:  $\epsilon_r = 4$  и  $\epsilon_r = 10$ .

Э16. Определить вектор напряженности электрического поля в точке



$P$   $(-0.2, 0, -2,3)$ , которое создает заряд  $Q = 5\text{нК}$ , расположенный в точке  $Q$   $(0.2, 0.1, -2.5)$ .

**Э17.** В толщине однородного диэлектрика первоначально создано равномерное электрическое поле, затем прорезаны две узкие полости, одна из которых ориентирована параллельно, а другая перпендикулярно вектору  $E$ . Полости заполнены воздухом. Какова величина напряженности электрического поля в обеих полостях?

**Э18.** Диэлектрическая пластина размещена в однородном электрическом поле ортогонально вектору напряженности электрического поля. Определить  $E$  и  $D$  в пластине.

**Э19.** Определить скалярный потенциал в пространстве между пластинами плоского конденсатора и плотность поверхностного заряда на пластинах.

**Э20.** Поверхность бесконечно длинного кругового цилиндра равномерно заряжена так, что на единицу длины приходится заряд  $\chi$ . Определить поле внутри и вне цилиндра, скачек вектора  $E$  при прохождении через заряженную поверхность цилиндра, потенциал поля заряженного цилиндра.

**Э21.** Определить напряженность поля в полости цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра), если  $\chi$  - заряд единицы длины внутреннего цилиндра. Определить емкость цилиндрического конденсатора.

**Э22.** Положительный заряд  $q$  равномерно распределен по объему шара радиуса  $a$ . Найти  $E$ ,  $D$  и  $\varphi$  вне и внутри шара. Задачу решить, используя теорему Гаусса и с помощью уравнения Пуассона-Лапласа для скалярного потенциала.

### ***Стационарное магнитное поле***

**М1.** По бесконечно длинному прямому проводу радиуса  $b$ , находящемуся в воздухе, течет ток  $I$ . Определить вектор напряженности магнитного поля внутри и вне проводника.

**М2.** По отрезку провода длиной  $2L$ , находящемуся в воздухе, протекает постоянный ток  $I$ . Найти вектор магнитной индукции в точке, расположенной

на расстоянии  $r$  от провода в плоскости, перпендикулярной отрезку и проходящей через его центр. Задачу решить, используя векторный потенциал.

**М3.** Найти вектор магнитной индукции в центре квадратной петли, по которой протекает постоянный ток  $I$ . Сторона квадрата  $2L$ .

**М4.** Используя закон Био-Савара, определить вектор напряженности магнитного поля на оси кольцевого проводника, по которому протекает постоянный ток  $I$ .

**М5.** Определить индуктивность на единицу длины соленоида, считая, что на единицу длины приходится  $n$  витков проводника. Поперечное сечение соленоида  $S$ .

**М6.** В среде 1 (магнитная проницаемость  $\mu_{r1}$ ) известен вектор напряженности магнитного поля в точках на поверхности раздела двух сред (длина вектора  $H_1$ , угол с нормалью к границе раздела  $\alpha_1$ ). Определить вектор напряженности магнитного поля во второй среде (длину вектора и угол, который он образует с нормалью к границе раздела). Магнитная проницаемость второй среды  $\mu_{r2}$ .

**М7.** Вывести выражение для напряженности магнитного поля в коаксиальном кабеле. Радиус внутреннего проводника  $a_1$ , радиусы внешнего проводника  $a, a_2$ , ( $a_2$  - внешний радиус кабеля). Задачу решить, воспользовавшись уравнением Максвелла.

**М8.** Вывести выражение для напряженности магнитного поля в коаксиальном кабеле. Радиус внутреннего проводника  $a_1$ , радиусы внешнего проводника  $a, a_2$ , ( $a_2$  - внешний радиус кабеля). Задачу решить при помощи уравнения Пуассона – Лапласа для векторного потенциала.

**М9.** Бесконечный прямолинейный проводник с током  $1$  мА находится в пространстве с параметрами  $\epsilon_r = 10$ ,  $\mu_r = 1$ . Найти вектор магнитной индукции на расстоянии  $5$  м от оси тока.

**М10.** Определить поток энергии через поверхность бесконечного цилиндрического провода, по которому течет постоянный ток  $I$ .

**М11.** Вычислить магнитную энергию, сосредоточенную внутри единицы длины цилиндрического провода.

**М12.** Граница раздела сред обладает свойствами экранирования, так что поле в среде 1 может существовать, не проникая в среду 2. ( $E_2 = 0$ ,  $B_2 = 0$ ). Определить поведение векторов поля в среде 1 вблизи границы.

**М13.** Найти энергию магнитного поля и магнитный поток в коаксиальном кабеле (на погонный метр длины кабеля).

### *Плоские электромагнитные волны*

**ПВ1.** Однородная плоская волна  $E = a_x E$  распространяется в среде без потерь ( $\epsilon_r = 4$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 0$ ) в  $z$  – направлении. Предполагая, что  $E$  – гармоническая функция (частота 100 МГц) имеет максимальное значение  $+10^{-4}$  (В/м) при  $t = 0$ ,  $z = 1/8$  (м)

а) записать выражение для вектора напряженности электрического поля для любого  $t$  и  $z$ ,

б) записать выражение для вектора напряженности магнитного поля  $H$ ,

в) определить точку, где  $E_x$  имеет положительный максимум в момент  $t = 10^{-8}$  сек.

**ПВ2.** Узкополосный сигнал распространяется в диэлектрике с малыми потерями (тангенс угла потерь  $\text{tg } \delta = 0.2$  на несущей частоте сигнала  $f_n = 550$  кГц,  $\epsilon_r = 2.5$ ). Определить постоянную затухания, коэффициент фазы, фазовую скорость волны, групповую скорость. Обладает ли данная среда дисперсией?

**ПВ3.** Поле в дальней зоне короткого вертикального элемента тока  $I dl$ , расположенного в центре системы координат, описывается выражениями

$$E(R, \theta) = a_\theta E_\theta(R, \theta) = a_\theta [j 60 \pi I dl / (\lambda R) \sin \theta] \exp(-j\beta R) \text{ (В/м)}$$

$$H(R, \theta) = a_\phi E_\theta(R, \theta) / \eta_0 = a_\phi [j I dl / (2 \lambda R) \sin \theta] \exp(-j\beta R) \text{ (А/м)}$$

$$\lambda = 2\pi / \beta.$$

а) Записать вектор Пойнтинга.

б) Найти среднюю за период мощность, излучаемую элементом тока.

в) Найти среднюю за период плотность потока мощности

**ПВ4.** Проницаемость воды в оптическом диапазоне  $\varepsilon_r = 1.75$ . Известно, что изотропный источник света, расположенный под водой на расстоянии  $d$  от поверхности, засвечивает на поверхности круг радиуса 5 м. Найти  $d$ .

**ПВ5.** Рассмотрим слой диэлектрика как световод или волновод (при условии полного внутреннего отражения). Определить минимальную диэлектрическую проницаемость слоя такую, чтобы волна, падающая под произвольным углом на торец, появилась на противоположном конце слоя.

**ПВ6.** Вычислить угол полного внутреннего отражения для следующих диэлектриков: дистиллированная вода ( $\varepsilon_r = 81$ ), слюда ( $\varepsilon_r = 6$ ), оптическое стекло ( $\varepsilon_r = 2,25$ ).

**ПВ7.** Определить угол падения плоской волны с круговой поляризацией на границу диэлектрика ( $\varepsilon_r = 4$ ), при котором в отраженной волне будет только линейно поляризованная составляющая.

**ПВ8.** Вычислить угол полного внутреннего отражения для диэлектрика с  $\varepsilon_r = 20$  и  $\varepsilon_r = 10$ .

**ПВ9.** Плоская волна параллельной поляризации падает из среды  $\varepsilon_{r1} = 9$ ,  $\mu_{r1} = 1$ ,  $\sigma_1 = 0$  в среду  $\varepsilon_{r2} = 1$ ,  $\mu_{r2} = 1$ ,  $\sigma_2 = 0$ . При каком угле падения вся энергия отражается?

**ПВ10.** Плоская волна параллельной поляризации падает из среды  $\varepsilon_{r1} = 9$ ,  $\mu_{r1} = 1$ , в среду  $\varepsilon_{r2} = 1$ ,  $\mu_{r2} = 1$ . При каком угле падения вся энергия переходит во вторую среду?

**ПВ11.** В воздухе распространяется плоская электромагнитная волна ( $f = 30$  МГц). Определить расстояние, на котором фаза волны изменится на  $270^\circ$ .

**ПВ12.** Волновое сопротивление среды 150 Ом. Относительная магнитная проницаемость равна 1. Определить диэлектрическую проницаемость.

**ПВ12.** В среде с параметрами  $\mu_r=1$ ,  $\varepsilon_r=4$ ,  $\sigma=0$  распространяется плоская электромагнитная волна, комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля которой в пл.  $z=0$   $E_m = 0.5 x_0 + 0.2 y_0$ . Определить комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, если волна распространяется в направлении возрастания  $z$ .

**ПВ13.** Во сколько раз уменьшится амплитуда плоской электромагнитной волны ( $f = 2$  МГц) при распространении в среде с параметрами  $\mu_r=1$ ,  $\varepsilon_r=2$ ,  $\sigma = 10^{-3}$  См/м на пути в 1 м? Что это – диэлектрик или проводник?

**ПВ14.** Показать, что линейно поляризованная волна – результат сложения волн с правой и левой круговой поляризацией.

**ПВ15.** Плоская электромагнитная волна ( $f = 10^9$  Гц) распространяется в среде с параметрами  $\varepsilon_r=2.25$ ,  $\text{tg } \delta = 0.01$ ,  $\mu_r = 1$ . Амплитуда напряженности электрического поля в пл.  $z = 0$  равна 100 В/м. Определить среднюю плотность потока мощности в пл.  $z = 1$  м.

**ПВ16.** Плоская электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой лежит в плоскости падения, падает из диэлектрика с параметрами  $\mu_{r1}=1$ ,  $\varepsilon_{r1} = 9$ ,  $\sigma_1 = 0$  на поверхность диэлектрика с параметрами  $\mu_{r2}=1$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1$ ,  $\sigma_2 = 0$ . При каких углах падения: а) вся энергия падающей волны переходит во вторую среду; б) вся энергия падающей волны отражается от границы раздела?

**ПВ17.** Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из воздуха на поверхность плавленого кварца ( $\varepsilon_r = 3.8$ ). Определить угол падения, при котором в воздухе осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную.

**ПВ18.** Определить длину и фазовую скорость электромагнитной волны, распространяющейся в среде без потерь.  $\mu_r = \varepsilon_r = 10$ ,  $f = 10$  МГц.

**ПВ19.** Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в неограниченном воздушном пространстве,  $\omega = 10^8$  1/сек. Амплитуда напряженности электрического поля  $E_m = 50$  мВ/м.

Записать уравнение волны, определить величину и направление векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{P}$ , плотность тока смещения, найти длину волны. Найти мгновенные значения векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{P}$  в момент времени  $t = 0$  при  $z = 1$  м.

**ПВ20.** Определить волновое число, фазовую скорость, волновое сопротивление и частоту для плоской гармонической волны в воздухе и в воде для  $\lambda_1 = 3$  см,  $\lambda_2 = 300$  м, считая  $\varepsilon_{\text{к воды}} = 81$ .

### **Волноводы**

**В1.** Определить а) волновое сопротивление и волноводную длину волны на частоте, равной  $2f_{\text{кр}}$  для ТМ - и ТЕ – мод в волноводе; б) то же на частоте  $f = f_{\text{кр}} / 2$ , в) каково волновое сопротивление и длина волны в волноводе для ТЕМ –моды.

**В2.** В прямоугольном волноводе  $2.29 \times 1.02$  (см<sup>2</sup>) необходимо обеспечить одномодовый режим. Какой диапазон частот допустим, если рабочая частота должна быть, по крайней мере, на 25% больше критической частоты основной моды, но не более, чем 95% от критической частоты следующего типа колебаний (с наиболее близкой  $f_{\text{кр}}$ ).

**В3.** Волновод имеет прямоугольное сечение  $58 \times 25$  (мм<sup>2</sup>). Определить диапазон частот одномодового режима, найти среднюю частоту  $f_{\text{ср}} = (f_{\text{min}} f_{\text{max}})^{1/2}$  этого диапазона. Как изменится значение всех этих частот, если волновод заполнен диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon_{\text{к}} = 5$ ? Для обоих случаев на частоте  $f_{\text{ср}}$  рассчитать относительное замедление фазовой и групповой скорости волны ( $c/v_{\text{ф}}$ ,  $c/v_{\text{гр}}$ ).

**В4.** Сигнал с несущей частотой 30 ГГц передается по волноводу прямоугольного сечения  $7.2 \times 3.4$  (мм<sup>2</sup>), длина волновода 10 м. Рассчитать время задержки. Как изменится фаза несущей, если волновод удлинить на 1 мм.

**В5.** Какие моды могут распространяться в волноводе сечением  $28 \times 12$  (мм<sup>2</sup>) при частоте сигнала 10 ГГц? Как изменится ответ на этот вопрос, если волновод заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью

$\varepsilon_r = 2.25$ ? Рассчитать также длину волны основной моды в волноводе при  $\varepsilon_r = 1$  и  $\varepsilon_r = 2.25$  и сравнить с длиной волны в свободном пространстве.

**В6.** Имеется волновод прямоугольного сечения  $2 \times 1 \text{ см}^2$ . Какие типы волн могут переносить энергию, если  $f = 10 \text{ ГГц}$ ,  $f = 20 \text{ ГГц}$ .

**В7.** Длина волны в волноводе для основного типа волны составляет  $4,5 \text{ см}$ . Размеры сечения  $2,6 \times 1,3 \text{ см}^2$ . Найти  $f_{\text{раб}}$ .

**В8.** В прямоугольном волноводе для основного типа волны фазовая скорость  $v_{\text{ф}} = 5c$ . Длина волны  $\lambda_{\text{раб}} = 10 \text{ см}$ . Чему равен размер широкой стенки волновода  $a$ ?

**В9.** В прямоугольном волноводе  $4 \times 3 \text{ см}^2$  распространяется волна типа  $H_{11}$ . Волновод заполнен пенополистиролом с  $\varepsilon_r = 1,15$ . Частота  $f = 8 \text{ ГГц}$ . Определить фазовую скорость и длину волны в волноводе.

**В10.** Длина волны в прямоугольном волноводе при работе на основном типе волны составляет  $4,2 \text{ см}$ . Размеры поперечного сечения волновода  $2,3 \times 1,0 \text{ см}^2$ . Найти  $f$ .

**В11.** Определить критическую длину волны, критическую частоту и длину волны в прямоугольном волноводе для волны типа  $E_{11}$ . размеры поперечного сечения волновода  $4 \times 3 \text{ см}^2$ , частота колебаний  $10 \text{ ГГц}$ .

**В12.** Фазовая скорость волны типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе равна  $5c$ , где  $c$  – скорость света. Определить размеры волновода, если длина волны в свободном пространстве равна  $10 \text{ см}$ .

**В13.** Для измерения параметров жидких диэлектриков используется установка, где волновод и измерительная линия заполнены исследуемым диэлектриком. Сечение волновода  $23 \times 10 \text{ мм}^2$ , частота генератора  $10 \text{ ГГц}$ . Определить относительную диэлектрическую проницаемость, если измеренное значение  $\Lambda = 25,4 \text{ мм}$ .

### **Излучение волн**

**Ивл.1.** Найти составляющие поля элементарного электрического излучателя  $l = 5$  см в экваториальной плоскости на расстоянии  $10^4$  м при частоте колебаний 300 МГц. Амплитуда тока в излучателе 10 А.

**Ивл.2.** Найти ток в элементарном электрическом излучателе  $l = 5$  см, если в точке с координатами  $r = 10^3$  м,  $\theta = \pi/2$  напряженность электрического поля  $E = 10^{-4}$  В/м. Частота колебаний  $10^8$  Гц.

**Ивл.3.** Два ортогонально скрещенных диполя Герца, ориентированных по осям  $x$  и  $y$ , питаются токами одинаковой амплитуды со сдвигом фаз  $\pm \pi/2$ . Найти диаграмму направленности по составляющим  $E_\theta$ ,  $E_\phi$ .

**Ивл.4.** В боковой стенке волновода, имеющего поперечное сечение  $35 \times 15$  мм<sup>2</sup>, периодически расположены излучающие отверстия, возбуждаемые бегущей вдоль волновода волной. Отражения от отверстий пренебрежимо малы. Определить минимальный период  $d$ , при котором на частоте  $f = 6.0$  ГГц поля, излучаемые отверстиями, суммируются синфазно в направлении оси  $x$  (по нормали к оси волновода). Под какими еще углами в пл.  $xz$  поля складываются синфазно.

**Ивл.5.** Определить поле элементарного излучателя, если векторный потенциал  $\vec{A} = \vec{z}_0 \frac{\mu_0 I_m l}{4\pi R} \sin(\omega t - kR)$ .

**Ивл.6.** Элементарный электрический излучатель длиной  $l$  с амплитудой тока  $I_m$  ориентирован вдоль оси  $x$  и расположен на высоте  $h$  над проводящей плоскостью  $xoy$ . Определить вектор напряженности электрического поля, создаваемого излучателем в плоскости  $xoz$ .

**Ивл.7.** Элементарный электрический излучатель длиной  $l$  с амплитудой тока  $I_m$  ориентирован вдоль оси  $z$  и расположен на высоте  $h$  над проводящей плоскостью  $xoy$ . Определить вектор напряженности электрического поля, создаваемого излучателем в плоскости  $xoz$ .