

Министерство образования Российской Федерации

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ, АЛГОРИТМЫ И ПРИМЕРЫ

Учебное пособие

Составители: Азарнова Т.В.,
Каширина И.Л.
Чернышова Г.Д.

Воронеж, 2001

§1. Общая постановка задачи линейного программирования Графическое решение задач линейного программирования

Задачей линейного программирования (ЗЛП) называется задача нахождения в векторном пространстве \mathbb{R}^n такого вектора x^* , который обеспечивает оптимальное (максимальное или минимальное) значение линейной функции $L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ и при этом принадлежит некоторой области $W \subseteq \mathbb{R}^n$, заданной линейными ограничениями

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad (\leq, \text{ нет требования на знак}), \quad j = 1, \dots, n.$$

Функцию $L(x)$ называют целевой функцией ЗЛП, ее оптимальное значение обозначают L^* . Множество $W \subseteq \mathbb{R}^n$ называют допустимым множеством, его элементы - допустимыми векторами, а вектор x^* - решением задачи (оптимальной точкой).

Прежде чем рассматривать методы решения общей задачи линейного программирования в \mathbb{R}^n , рассмотрим алгоритм графического метода, который используется в \mathbb{R}^2 для решения задачи следующего вида:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \max(\min)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq (\geq, =) b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\leq, \text{ нет требования на знак}) .$$

1. Построение допустимого множества.

Заметим, что каждое ограничение задачи определяет некоторую полуплоскость (в случае неравенства) или прямую (в случае равенства). Допустимым множеством является пересечение этих полуплоскостей и прямых. Таким образом, для построения допустимого множества нужно:

а) для каждого ограничения нарисовать прямую, соответствующую равенству $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$, $i = 1, \dots, m$;

б) если ограничение задается неравенством вида $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i$ или $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \geq b_i$, то определить полуплоскость, задаваемую данным неравенством. Это легко сделать, если подставить в него координаты точки, не расположенной на соответствующей прямой. Если неравенство оказывается справедливым, то выбрать полуплоскость, содержащую данную точку, в противном случае - выбрать противоположную полуплоскость.

в) найти пересечение полученных полуплоскостей и прямых.

2. Решение задачи путем анализа допустимого множества и поведения целевой функции на этом множестве.

а) Пусть допустимое множество оказалось пустым. Делается вывод: задача решений не имеет, поскольку нет ни одной допустимой точки.

б) Пусть допустимое множество оказалось не пустым. Выбрать два произвольных числа d_1 и d_2 , $d_1 > d_2$. Нарисовать линии уровня целевой функции, соответствующие выбранным константам, т.е. прямые вида $c_1x_1 + c_2x_2 = d_1$ и $c_1x_1 + c_2x_2 = d_2$ (это параллельные прямые, все точки которых обеспечивают значения целевой функции, равные соответственно d_1 и d_2). Зафиксировать направление увеличения значений целевой функции от прямой с правой частью, равной d_2 , к прямой с правой частью, равной d_1 . Передвигать прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ параллельно самой себе по допустимому множеству в обозначенном направлении (в противоположном направлении) до получения максимального значения d^* (минимального значения d^*), при котором прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ пересекает допустимое множество. Зафиксировать на графике точки допустимого множества, обеспечивающие максимальное (минимальное) значение целевой функции или убедиться, что таких точек нет. Если допустимое множество ограничено (является многоугольником), то возможны два различных ответа: решение единственно или решений бесчисленное множество. При единственном решении на графике зафиксирована единственная точка (вершина многоугольника), являющаяся пересечением некоторых прямых. Необходимо выписать соответствующие уравнения прямых и, решив систему полученных уравнений, найти точку - решение задачи. В случае бесчисленного множества решений получен отрезок прямой, все точки которого обеспечивают максимальное значение целевой функции. Среди этих точек есть вершины многоугольника. Координаты вершин отыскиваются так, как указано в предыдущем случае. Если допустимое множество не ограничено, то возможны те же две ситуации, что и в случае ограниченного множества, и, кроме того, возможен случай отсутствия решений из-за неограниченности значений целевой функции на допустимом множестве.

Из анализа графического метода решения можно сделать выводы, которые являются справедливыми и для задач из \mathbb{R}^n .

1. Допустимое множество задачи линейного программирования, если оно не пусто, является многогранным ограниченным или неограниченным выпуклым множеством.

2. Если в задаче есть решение (оптимальная точка), то среди вершин допустимого множества также есть решение. Часть оптимальных точек можно искать, перебирая только вершины допустимого множества.

Проиллюстрируем рассмотренный графический метод на примерах.

Пример 1. Решить графически следующую задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 18 \quad (1) \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 9 \quad (2) \\ 2x_1 - x_2 &\leq 10 \quad (3) \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Строим область допустимых решений в соответствии с шагом 1 описанного выше алгоритма. В результате получим выпуклый многоугольник (рис 1.)

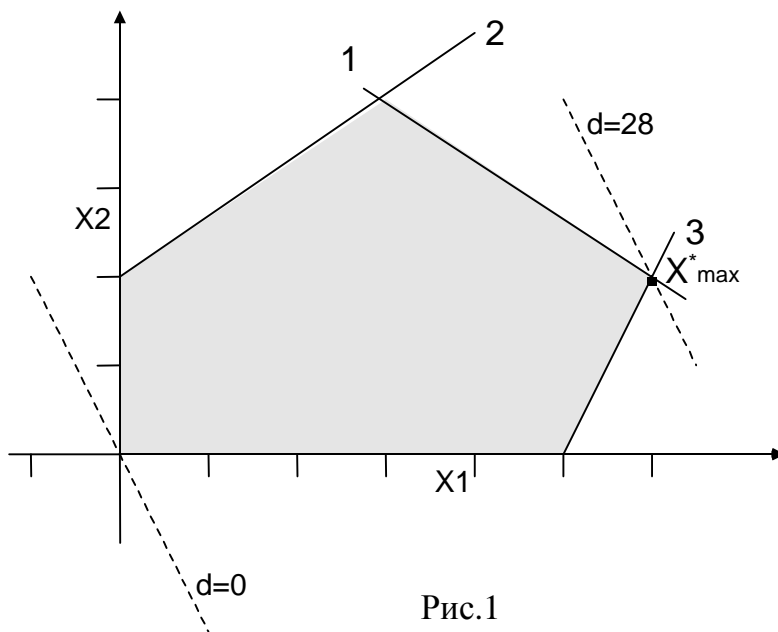


Рис.1

Следуя пункту 2 рассмотренного алгоритма, строим линии уровня целевой функции $4x_1 + 2x_2 = d$ и фиксируем направление увеличения значения целевой функции при переходе от одной линии уровня к другой. Перемещая прямую $4x_1 + 2x_2 = d$ параллельно самой себе в найденном направлении, пока она будет сохранять общие точки с допустимой областью, найдем, что в крайнем возможном положении линия уровня пройдет через точку x_{\max}^* . Этому положению линии уровня и соответствует $d = d_{\max}$. Для нахождения координат точки x_{\max}^* необходимо решить систему уравнений:

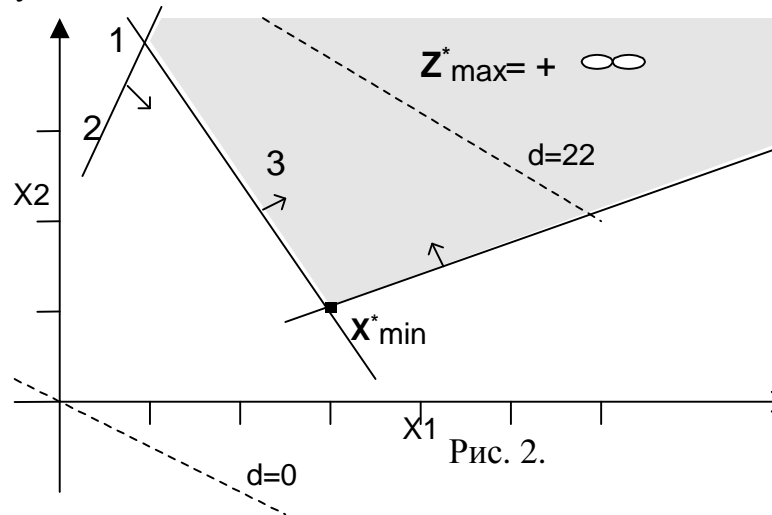
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 18 \\ 2x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$$

В результате получим искомое оптимальное решение $X_{\max}^* = (6,2)$ с значением целевой функции $L_{\max}^* = 28$.

Пример 2. Решить графически следующую задачу:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 11 \quad (1) \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \quad (2) \\ x_1 - 3x_2 &\leq 0 \quad (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Первый этап - построение допустимой области - выполняется также как и в предыдущей задаче. В результате получаем неограниченную многогранную область.



На втором этапе решения - параллельном перемещении линии уровня в направлении возрастания целевой функции устанавливаем, что такое перемещение можно производить неограниченно. Следовательно, целевая функция неограниченна сверху, т.е. $L_{\max} = \infty$, а сама задача линейного программирования неразрешима. Заметим, что если при тех же исходных данных требовалось бы целевую функцию минимизировать, то получили бы оптимальное решение в точке $x_{\min}^* = (3,1)$ с $L_{\min}^* = 10$.

Пример 3. Решить задачу

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \quad (1) \\ x_1 - 2x_2 &\leq 3 \quad (2) \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Решение. Допустимая область в данной задаче имеет вид

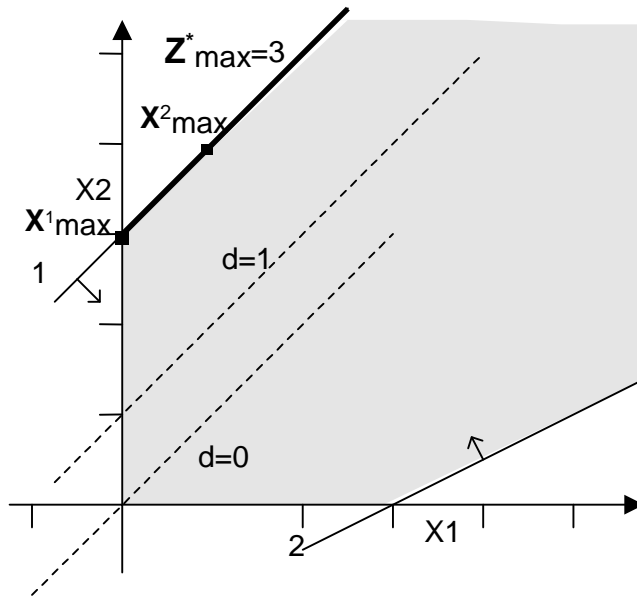


рис 3.

Из рисунка видно, что допустимое множество неограниченно. Линии уровня целевой функции параллельны прямой $-x_1 + x_2 = 3$, соответствующей первому ограничению. Перемещая линии уровня в направлении возрастания целевой функции, получаем, что линия уровня с максимально возможным значением целевой функции совпадает с прямой $-x_1 + x_2 = 3$. Таким образом, целевая функция достигает своего максимального значения $L_{\max}^* = 3$ во всех точках луча, выходящего из точки $x_{\max}^1 = (0,3)$. Задача имеет бесчисленное множество решений. Для того чтобы выписать решение в общем виде, возьмем на луче еще одну точку $x_{\max}^2 = (1,4)$. Уравнение луча записывается следующим образом:

$$x_{\max}^* = (1 - I)x_{\max}^1 + Ix_{\max}^2, I \in [0, \infty).$$

Таким образом, любое решение данной задачи записывается в виде $x_{\max}^* = (I, 3 + I), I \in [0, \infty)$.

Пример 4. Решить графически задачу

$$3x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 \geq 2 \quad (1)$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 2 \quad (2)$$

$$x_1 - x_2 \geq 0 \quad (3)$$

Решение. Допустимое множество данной задачи пусто. Это видно из следующего рисунка

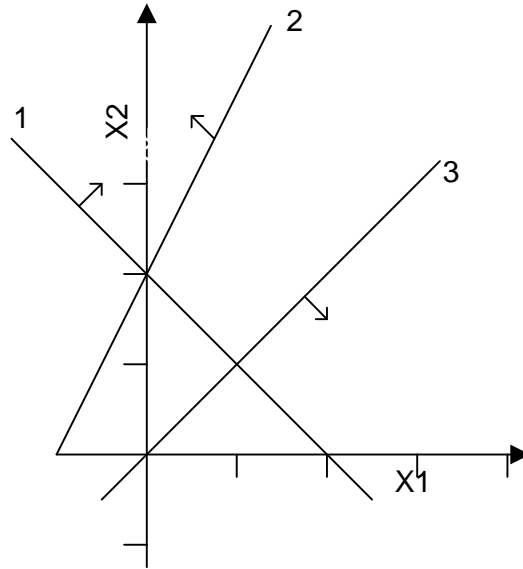


Рис 4.

Поэтому данная задача неразрешима.

Пример 5. Решить графически задачу

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \quad (1) \\ x_1 + 2x_2 &\leq 7 \quad (2) \\ 0 \leq x_1 \leq 3, \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Решение. Допустимым множеством в данной задаче является выпуклый многогранник (рис. 5).

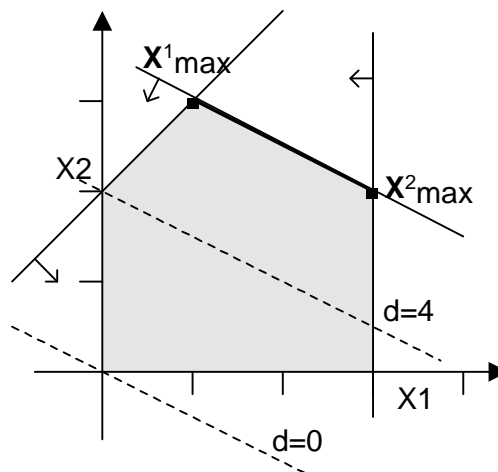


Рис.5

Линии уровня целевой функции параллельны прямой, соответствующей ограничению (2). Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в примере 3, получим, что целевая функция достигает своего максимального значения $L_{\max}^* = 7$ во всех точках отрезка, соединяющего точки $x_{\max}^1 = (1,3)$ и

$x_{\max}^2 = (3,2)$. Задача имеет бесчисленное множество решений, которое записывается следующим образом

$$x_{\max}^* = (1 - I)x_{\max}^1 + Ix_{\max}^2, \quad I \in [0,1].$$

Таким образом, любое решение данной задачи имеет вид $x_{\max}^* = (1 + 2I, 3 - I)$, $I \in [0,1]$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить графически:

1) $x_1 - 2x_2 \rightarrow \max$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

2) $x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

3) $5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

4) $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

5) $2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

6) $x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0.$$

2. Определить промежутки значений I , при которых решение будет совпадать с одной и той же вершиной области допустимых решений. В каких промежутках задача не имеет решений? При каких значениях I будет бесчисленное множество решений?

1) $2x_1 + Ix_2 \rightarrow \max$

$$-x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 - x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

2) $-x_1 + Ix_2 \rightarrow \max$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

3) $2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

3) $x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$2x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 1$$

$$1x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

$$1x_1 - x_2 \leq -2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0.$$

3. Привести пример графической интерпретации и составить на основании полученного чертежа математическую запись задачи, обладающей следующими свойствами:

- 1) имеется единственное оптимальное решение для задачи на минимум и для задачи на максимум;
- 2) максимальное значение целевая функция достигает в бесчисленном множестве точек, а минимальное значение в единственной точке;
- 3) на минимум задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции, а максимальное значение достигается в единственной точке;
- 4) на максимум и на минимум задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции;
- 5) минимальное значение целевой функции достигается в бесчисленном множестве точек, из которых только одна является вершиной.

§2. Разные формы записи задачи линейного программирования

В §1 приведена общая постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Часто для удобства исследования и при построении метода решения фиксируется та или иная запись задачи. Так, часто используется задача в следующей форме:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Такая форма записи ЗЛП называется стандартной или симметричной формой задачи линейного программирования. Кроме того, выделяют каноническую форму записи ЗЛП:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Вне зависимости от того, как записана исходная задача, она может быть переписана в любой желательной форме. При этом существуют правила, позволяющие это сделать эквивалентным образом. С этой целью обсудим

понятие эквивалентных задач оптимизации. Существует стандартное определение: *две оптимизационные задачи называются эквивалентными, если они имеют одно и то же множество оптимальных точек.* Однако так как при переходе от одного вида задачи к другому возможно изменение размерности задачи (увеличение числа переменных, увеличение числа ограничений), то следует в каждом конкретном случае аккуратно формулировать, как понимается эквивалентность данных задач. Сформулируем правила, позволяющие осуществить эквивалентные перезаписи задач.

1. Обеспечить нужное направление оптимизации целевой функции возможно с помощью умножения исходной целевой функции на -1.

2. Любое неравенство можно умножить на -1 и перейти к неравенству другого знака.

3. Ограничение-равенство $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ можно записать в виде системы двух неравенств

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i.$$

4. От ограничений неравенств можно перейти к равенствам, добавляя или отнимая неотрицательные новые переменные, которые в дальнейшем будут называться *дополнительными* переменными. Так, неравенство

$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ эквивалентно системе $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + u_i = b_i, u_i \geq 0$. Аналогично

неравенство $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$ эквивалентно системе $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - u_i = b_i, u_i \geq 0$.

5. Обеспечить условие неотрицательности переменной можно, используя очевидный факт: любое число может быть представлено в виде разности двух неотрицательных чисел: $x = x' - x''$, $x' \geq 0, x'' \geq 0$. Если в задаче присутствовало требование $x_j \leq 0$, осуществляется замена $x_j = -x'_j, x'_j \geq 0$.

В качестве примера сформулируем факт эквивалентности двух следующих задач линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$-\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad u_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$$

Утверждение Если x^* является решением задачи (1), то найдется такое $u^* \geq 0$, что (x^*, u^*) является решением задачи (2). С другой стороны, если (\hat{x}, \hat{u}) является решением задачи (2), то \hat{x} является решением задачи (1).

В связи с тем, что основной метод решения ЗЛП - симплексный метод предназначен для решения задач в канонической форме, мы проиллюстрируем работу описанных выше правил на примере приведения задачи к канонической форме.

Пример 1. Пусть исходная задача задана в виде

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ -x_2 - x_3 &= -20 \\ x_2 &\geq 0, x_3 \leq 0. \end{aligned}$$

Привести данную задачу к канонической форме.

Решение.

1. Умножим целевую функцию на -1. В результате получим

$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max.$$

2. Из левой части первого неравенства вычтем неотрицательную переменную u_1 и перейдем к ограничениям

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - u_1 = 4, \quad u_1 \geq 0.$$

3. К левой части второго неравенства добавим неотрицательную переменную u_2 и перейдем к ограничениям

$$-x_1 + x_2 - x_3 + u_2 = 2, \quad u_2 \geq 0.$$

4. Умножим обе части третьего равенства на -1

$$x_2 + x_3 = 20.$$

5. Осуществим замену переменных $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_1' \geq 0$, $x_1'' \geq 0$.

$$x_3 = -x_3', \quad x_3' \geq 0$$

В результате задача принимает канонический вид

$$\begin{aligned} -3x_1' + 3x_1'' - 2x_2 - x_3' &\rightarrow \max \\ 2x_1' - 2x_1'' - x_2 - 3x_3' - u_1 &= 4 \\ -x_1' + x_1'' + x_2 + x_3' + u_2 &= 2 \\ x_2 - x_3' &= 20 \end{aligned}$$

$$x_1' \geq 0, x_1'' \geq 0, x_2 \geq 0, x_3' \geq 0, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$$

Заметим, что последовательность применения правил приведения к канонической форме не существенна и может быть любой.

В заключение отметим, что замена переменных порождает неединственность решения полученной канонической задачи даже, если исходная имела единственное решение. Этот факт должен быть выделен при фиксировании ответа. Симплексный метод позволяет это сделать, что будет отмечено в дальнейшем при описании соответствующего алгоритма.

Задачи для самостоятельного решения

1. Привести к канонической форме следующие задачи линейного программирования:

- а) $x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$
 $2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5$
 $x_1 + 2x_3 = 8$
 $-x_1 - 2x_2 \geq 1$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0;$
- б) $2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max$
 $x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4$
 $x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 9$
 $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10$
 $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0;$
- в) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$
 $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = -5$
 $-2x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 4$
 $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_5 \geq 0;$
- г) $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$
 $-3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \geq 6$
 $x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2$
 $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \leq 0;$

2. Привести к симметричной форме следующие задачи линейного программирования:

- а) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \min$
 $2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4$
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15$
 $2x_1 - 2x_2 - x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 8$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0;$
- б) $x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \rightarrow \max$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2$
 $-x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 3$
 $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 \leq 6$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

§3. Алгоритм перебора базисных решений систем линейных уравнений

В § 2 была введена каноническая форма ЗЛП, которая в матричном виде может быть переписана следующим образом:

$$z(x) = c^T x \rightarrow \max \quad (1)$$

$$Ax = b, \quad (b \geq 0) \quad (2)$$

$$x \geq 0, \quad (3)$$

где $c^T = (c_1, \dots, c_n)$, $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, $b^T = (b_1, \dots, b_m)$, $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

Очевидно, что решения задачи ЛП (1) - (3) находятся среди решений системы линейных уравнений $Ax = b$. Рассмотрим способ перебора решений данной системы для случая, когда ранг матрицы $r(A) = m$. Из курса линейной алгебры известно, что система (2) с помощью преобразований Жордана - Гаусса может быть приведена к виду

$$E\bar{x} + \tilde{A}\tilde{x} = \bar{b}, \quad (4)$$

где E - единичная матрица размера $m \times m$, матрица \tilde{A} имеет размеры $m \times (n-m)$ и элементы \tilde{a}_{ij} , полученные в результате преобразований Жордана-Гаусса, \bar{b} - вектор размера m , полученный из вектора b вследствие преобразований. Система уравнений (4) может быть переписана в координатной форме следующим образом:

$$\bar{x}_i = \bar{b}_i - \sum_{j \in J} \tilde{a}_{ij} \tilde{x}_j, \quad i \in I, \quad I \cup J = \{1, \dots, n\}, \quad (5)$$

где I - множество индексов зависимых переменных, J - множество индексов свободных переменных, $x = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \in R^n$. Формула (5) представляет собой формулу общего решения системы (2). Напомним, что любое частное решение системы может быть получено из формулы общего решения путем фиксирования любых значений свободных переменных с последующим вычислением по формуле (5) значений зависимых переменных. В дальнейшем нас будут интересовать частные решения вида $(\bar{x}_i = \bar{b}_i, i \in I, x_j = 0, j \in J)$, т.е. векторы, свободные переменные которых положены равными 0. Такие векторы называются базисными решениями системы линейных уравнений (2). Максимальное количество базисных решений не превосходит величины C_n^m . Перебрать все базисные решения системы линейных уравнений можно, организовав перебор формул общего решения. Очевидно, что это можно осуществить с использованием метода Жордана-Гаусса, например, по следующей схеме.

Алгоритм перебора

1. Получить методом Жордана-Гаусса произвольную формулу общего решения вида (5). Положить $N=1$.

2. Запомнить множество I^N . Положить $I = I^N, J = J^N$.
3. Выбрать номер k из множества J . Заменить J на $J \setminus \{k\}$.
4. Выбрать $l \in I$ такой, что $a_{lk} \neq 0$. Если таких номеров l в I нет, то перейти к п.7.
5. Если множество $I^N \setminus \{l\} \cup \{k\}$ уже рассмотрено, то заменить I на $I \setminus \{l\}$ и перейти к п.6, иначе перейти к п.8.
6. Если $I = \emptyset$ то положить I^N и перейти к п.7, иначе перейти к п.4.
7. Если $J = \emptyset$, то **останов** - получены все возможные формулы общего решения, иначе перейти к п.3.
8. Осуществить преобразования Жордана -Гаусса с направляющим элементом a_{lk} до получения в k -м столбце единичного вектора. Заменить N на $N+1$. Положить $I^N = I^N \setminus \{l\} \cup \{k\}$. Перейти к п.2.

Пример 1. Найти базисные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 \\ x_3 = 4 + x_2 \end{cases}$$

Решение. Здесь $I = \{1, 3\}, J = \{2\}$. Оформить процедуру решения удобно в виде следующей таблицы, где через A_j обозначены векторы-столбцы матрицы (столбцы коэффициентов при переменной x_j).

| I | B | A_1 | A_2 | A_3 | a_{lk} | коммент. |
|--------|----------|------------|---------|---------|---|---------------|
| 1 3 | 2 4 | 1 0 | 2 -1 | 0 1 | $k=2$ $a_{12}=2$ | $J^1 = \{2\}$ |
| 2 3 | 1 5 | 1/2 1/2 | 1 0 | 0 1 | $k=1$ a_{21} -нет* $a_{31}=1/2$ | $J^2 = \{1\}$ |
| 2 1 | -4 10 | 0 1 | 1 0 | -1 2 | a_{23} -нет* a_{13} -нет* | ОСТАНОВ |

* (выбор этого элемента порождает "старое" множество I)

На данных трех итерациях получены базисные решения системы соответственно $x^1 = (2, 0, 4)$, $x^2 = (0, 1, 5)$, $x^3 = (10, -4, 0)$.

Как видно из рассмотренного примера, не все полученные в результате перебора базисные решения системы линейных уравнений являются допустимыми точками в соответствующей задаче линейного программирования (1) - (3), так как не удовлетворяют условию неотрицательности (3). Процедуру перебора можно модифицировать таким образом, чтобы перебирать только неотрицательные базисные решения. Изменения необходимо внести в 1, 3 и 4 пункты сформулированного алгоритма, которые приобретают следующий вид.

1а. Получить произвольное неотрицательное базисное решение. Положить $N=I$.

3а. Выбрать $k \in J$ такое, что $\exists a_{ik} > 0$. Заменить J на $J \setminus \{k\}$.

4а. Выбрать $l \in I$ такое, что $\frac{b_l}{a_{lk}} = \min_{i:a_{ik}>0} \frac{b_i}{a_{ik}}$. Если таких номеров l в I нет, то

перейти к п.7.

Пример 2. Найти неотрицательные базисные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

Решение.

После эквивалентных преобразований данная система может быть переписана следующим образом:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{11}{4} - \frac{7}{2}x_1 - 4x_2 \\ x_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x_1 + x_2 \end{cases}$$

Положим $N=1$. Тогда $I^1 = \{3,4\}, J^1 = \{1,2\}$.

Как и в примере 1, оформим решение в виде таблицы. Добавим столбец Θ , в который будем помещать отношение b_i/a_{ik} для $a_{ik} > 0$

| I | b | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | Θ | a_{ik} | коммент. |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|----------|---|-----------------|
| 3 | 11/4 | 7/2 | 4 | 1 | 0 | 11/16 | $k=2, l=3$ | $J^1 = \{1,2\}$ |
| 4 | 3/4 | -1/2 | -1 | 0 | 1 | - | $a_{32}=4$ | |
| 2 | 11/16 | 7/8 | 1 | 1/4 | 0 | 11/14 | $k=1, l=2$ | $J^2 = \{1,3\}$ |
| 4 | 23/16 | 3/8 | 0 | 1/4 | 1 | 23/6 | $a_{21}=7/8$ | |
| 1 | 11/14 | 1 | 8/7 | 2/7 | 0 | | $k=2$ | ОСТАНОВ |
| 4 | 8/7 | 0 | -3/7 | 1/7 | 1 | | a_{12} -нет $k=3$ a_{13} -нет | |

На данных итерациях получены базисные решения системы соответственно $x^1 = (0, 0, \frac{11}{4}, \frac{3}{4})$, $x^2 = (0, \frac{11}{16}, 0, \frac{3}{4})$, $x^3 = (\frac{11}{14}, 0, 0, \frac{8}{7})$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все базисные решения следующих систем уравнений:

- а) $x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 1$
 $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$;
- б) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$
 $2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 2$;

2. Найти все неотрицательные базисные решения следующей системы уравнений:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + bx_2 + cx_3 + x_4 = 1$$

| | а | в | с | | а | в | с | | а | в | с | | а | в | с |
|---|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|----|----|---|---|----|
| 1 | 3 | 6 | -2 | 6 | 2 | 4 | -4 | 11 | 3 | 2 | 0 | 16 | 6 | 5 | -3 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 7 | 3 | 5 | -2 | 12 | 4 | 5 | -3 | 17 | 2 | 6 | -1 |
| 3 | 5 | 4 | -1 | 8 | 3 | 4 | -1 | 13 | 5 | 2 | -1 | 18 | 4 | 2 | -4 |
| 4 | 6 | 2 | -3 | 9 | 2 | 5 | 0 | 14 | 4 | 3 | -4 | 19 | 5 | 6 | 0 |
| 5 | 5 | 3 | -4 | 10 | 6 | 3 | -3 | 15 | 6 | 4 | -2 | 20 | 4 | 6 | -2 |

§4. Алгоритм симплексного метода

Допустимая точка ЗЛП $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется базисной, если векторы-столбцы матрицы A : A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , $k \leq n$, соответствующие ее ненулевым координатам, являются линейно независимыми.

Покажем, как проверяется, является ли заданная точка базисной, на примере.

Пример 1. Пусть условия (2) некоторой задачи линейного программирования имеют вид

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Проверить, является ли точка $x = (1, 0, 0, 1)^T$ базисной.

Решение. Так как координаты точки неотрицательны и удовлетворяют заданной системе уравнений, то она по определению является допустимой. Введем в рассмотрение векторы A_1, A_2, A_3, A_4 - столбцы матрицы ограничений:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Тогда система уравнений после под-}$$

становки в нее координат проверяемой точки примет вид:

$$A_1 x_1 + A_4 x_4 = b$$

В соответствии с определением базисной точки, векторы A_1 и A_4 следует проверить на линейную независимость. Из курса линейной алгебры известно, что векторы являются линейно независимыми, если ранг матрицы, составленной из этих векторов, равен их количеству.

Так как определитель матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, то ее ранг равен 2, и векторы линейно независимы. Следовательно, точка $(1, 0, 0, 1)^T$ является базисной.

Из определения следует, что число положительных координат базисной точки не может быть более чем m . Если базисная точка содержит ровно m положительных координат, то она называется невырожденной, в противном случае - вырожденной. Задача называется невырожденной, если допустимое множество не имеет вырожденных базисных точек.

Как следует из соответствующих определений, базисные точки допустимого множества ЗЛП (1) - (3) совпадают с неотрицательными базисными решениями системы линейных уравнений (2). Таким образом, алгоритм перебора неотрицательных базисных решений системы совпадает с алгоритмом перебора базисных точек соответствующего допустимого множества. Следует отметить, что в начале перебора должна быть известна исходная базисная точка. Итак, пусть имеется базисная точка допустимого множества ЗЛП $x_B^T = (\bar{x}_i, i \in I; x_j = 0, j \in J)$. Координаты $\bar{x}_i, i \in I$, будем в дальнейшем называть базисными, $x_j = 0, j \in J$ - небазисными. Соответственно множество I - множеством базисных индексов, J - множеством небазисных индексов. В случае невырожденной задачи по каждой базисной точке восстанавливается соответствующий базис, состоящий из векторов $A_i, i \in I$. Обозначим его через B . Заметим далее, что каждая итерация метода Жордана-Гаусса соответствует переходу от одной базисной точки к другой при замене одной базисной (зависимой) переменной на одну небазисную (свободную). При этом выбору подлежит номер небазисной переменной k и жестко определяется номер базисной переменной l (смотри пункты 3а и 4а алгоритма).

Координаты новой базисной точки вычисляются следующим образом:

$$x_B^H = (\bar{x}_i - \frac{\bar{x}_l}{a_{lk}} a_{ik}, i \in I; x_k = \frac{\bar{x}_l}{a_{lk}}; x_j = 0, j \in J, j \neq k). \quad (8)$$

Таким образом, ранее получен алгоритм, позволяющий перебрать все базисные точки ЗЛП. Однако при поиске максимума не имеет смысла рассматривать те точки, которые обеспечивают меньшее значение целевой функции, чем уже известные. С целью внесения такого упорядочения в алгоритм перебора вычислим значение целевой функции в точке x_B^H , представленной в виде (8).

Обозначим $Q = \frac{\bar{x}_l}{a_{lk}} = \min_{a_{ik} > 0} \frac{\bar{x}_i}{a_{ik}}$. Тогда

$$L(x_B^H) = \sum_{i \in I} (\bar{x}_i - \Theta a_{ik}) c_i + c_k \Theta = \sum_{i \in I} c_i \bar{x}_i - \Theta (\sum_{i \in I} c_i a_{ik} - c_k)$$

Назовем оценкой вектора A_k величину $\Delta_k = \sum_{i \in I} c_i a_{ik} - c_k$ (в матричной

форме $D_k = c_B^T B^{-1} A_k - c_k$, c_B - вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных). В данных обозначениях

$$L(x_B^H) = L(x_B) - \Theta \Delta_k. \quad (9)$$

Эта формула позволяет увидеть, что если выбрано k такое, что $\Delta_k < 0$, то на следующей итерации будет получена точка с большим значением целевой функции (т. к. $\Theta \geq 0$). Если $\Delta_k > 0$, то произойдет уменьшение целевой функции, при $\Delta_k = 0$ значение целевой функции не изменится. Если $\Delta_k < 0$, но все $a_{ik} \leq 0$, то, выбирая любое положительное число в качестве Θ , будем получать допустимую, но не базисную точку (см. ф-лу (8)). Значение целевой функции в этой точке изменяется в соответствии с формулой (9), поэтому если Θ выбирать как угодно большим, то значение функции цели будет неограниченно увеличиваться. Следовательно, в таком случае можно сделать вывод о неограниченности целевой функции на допустимом множестве.

Теорема 1. Если все оценки, соответствующие некоторой базисной точке x_B , неотрицательны, то есть $\Delta_j = \sum_{i \in I} c_i a_{ij} - c_j \geq 0, \forall j = \overline{1, n}$, то такая точка является оптимальной в задаче (1)-(3).

Сформулированные факты позволяют сконструировать алгоритм базового симплексного метода.

Алгоритм базового симплексного метода

Начало. Задана исходная базисная точка $x_B: x_B^T = (\bar{x}_i, i \in I; x_j = 0, j \in J)$.

Вычислить оценки по формуле $D_j = \sum_{i \in I} c_i a_{ij} - c_j, j \in J$.

2. Проверить, если все $\Delta_j \geq 0$, то перейти к п.8.

3. Проверить, если $\exists k \in J: D_k < 0$ и все $a_{ik} \leq 0$, то перейти к п.10.

4. Выбрать $k: \Delta_k < 0$ и вектор A_k имеет хотя бы одну строго положительную координату (возможен произвольный выбор такого номера k , например, $\max_{j: \Delta_j < 0} |D_j| = |D_k|$)

5. Вычислить параметр Θ по формуле $\Theta = \frac{\bar{x}_l}{a_{lk}} = \min_{i: a_{ik} > 0} \frac{\bar{x}_i}{a_{ik}}$

6. Осуществить переход к новой базисной точке с помощью метода Жордана-Гаусса с направляющим элементом a_{lk} .

7. Изменить исходную информацию:

$$x_B \leftarrow x_B^H = (\bar{x}_i - \frac{\bar{x}_l}{a_{lk}} a_{ik}, i \in I; x_k = \frac{\bar{x}_l}{a_{lk}}; x_j = 0, j \in J, j \neq k).$$

$$I \leftarrow I \setminus \{l\} \cup \{k\}; \quad J \leftarrow J \setminus \{l\} \cup \{k\}$$

Перейти к п.1.

8. Если существует номер $s \in J: D_s = 0$, то выписать ответ: x_B - оптимальная точка, в задаче имеется бесчисленное множество решений.

9. Если для всех $j \in J, D_j > 0$, то выписать ответ:

x_B - единственное решение задачи.

10. Выписать ответ: задача решений не имеет из-за неограниченности целевой функции на допустимом множестве: $\sup_W z(x) = +\infty$

Пример 2. Решить задачу

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 & = 2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}$$

Решение. Оформим решение задачи в виде таблицы. В первом столбце поместим текущие базисные переменные, во втором - их коэффициенты в целевой функции, в третьем - базисные координаты текущей точки x_B . Далее переписываем элементы матрицы a_{ij} , помещая над каждым столбцом коэффициент соответствующей переменной в целевой функции. Последний столбец предназначается для определения значения Θ . В отдельной строке вычисляются оценки векторов A_j . В ячейке, находящейся на пересечении оценочной строки и столбца \bar{x} , помещаем значение целевой функции в текущей базисной точке.

| B | C _B | \bar{x} | 2 | -1 | 3 | -2 | 1 | Θ |
|-------|----------------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | | | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | A_5 | |
| x_3 | 3 | 1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | — |
| x_4 | -2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x_5 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| D_j | | 3 | -6 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| x_3 | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| x_1 | 2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | |
| x_5 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | -1 | 1 | |
| D_j | | 9 | 0 | 1 | 0 | 6 | 0 | |

Поскольку на первой итерации $\Delta_1 < 0$, в базис вводится вектор A_1 .

$Q = \min\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\} = 1$, т.е. в качестве направляющего элемента выбирается a_{21} .

Так как на второй итерации все $\Delta_j \geq 0$, то останов, получена оптимальная точка $x^* = (1, 0, 2, 0, 1)$. Поскольку на небазисных векторах $D_j > 0$, то решение в задаче единственно.

Пример 3. Решить задачу

Линейное программирование

$$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 - x_2 + \quad \quad x_5 & = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \quad \quad x_6 & = 2 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}$$

Решение.

| В | C _B | \bar{x} | 2 | -1 | 1 | 3 | -2 | 1 | Θ |
|----------------|----------------|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| | | | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | A ₅ | A ₆ | |
| x ₄ | 3 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | — |
| x ₅ | -2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| x ₆ | 1 | 2 | 1 | -3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| D _j | | 3 | -6 | 3 | -3 | 0 | 0 | 0 | |
| x ₄ | 3 | 2 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 0 | |
| x ₁ | 2 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| x ₆ | 1 | 1 | 0 | -2 | 1 | 0 | -1 | 1 | |
| D _j | | 9 | 0 | -3 | -3 | 0 | 6 | 0 | |

На второй итерации получаем, что оценка $\Delta_2 < 0$, но в столбце A₂ нет положительных элементов. Это означает, что целевая функция не ограничена на допустимом множестве, т.е. $\sup_W z(x) = +\infty$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить симплекс-методом задачу ЛП, предварительно приведя ее к каноническому виду.

$$x_1 - x_2 - x_3 + ax_4 \rightarrow \max$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2$$

$$bx_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 12$$

$$2x_1 + cx_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6;$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

| | a | b | c | | a | b | c | | a | b | c | | a | b | c |
|---|---|---|----|----|---|---|---|----|---|---|----|----|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | -1 | 6 | 5 | 2 | 3 | 11 | 2 | 1 | 2 | 16 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 3 | 1 | 1 | 7 | 4 | 3 | 6 | 12 | 3 | 3 | 4 | 17 | 4 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 2 | -1 | 8 | 6 | 1 | 5 | 13 | 5 | 2 | -1 | 18 | 3 | 1 | 0 |
| 4 | 7 | 2 | 3 | 9 | 2 | 2 | 2 | 14 | 7 | 1 | 5 | 19 | 4 | 1 | 3 |
| 5 | 8 | 3 | 4 | 10 | 5 | 3 | 7 | 15 | 6 | 3 | 8 | 20 | 5 | 2 | 6 |

2. Проверить, является ли точка x^0 решением задачи ЛП:

$$\begin{aligned} a) \quad & 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 \rightarrow \max \\ & -5x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 + 14x_5 = -7 \\ & x_1 - 5x_2 - 10x_3 - 4x_4 + 20x_5 = -10 \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{aligned}$$

$$x^0 = (2, 0, 0, 3, 0)$$

$$\begin{aligned} b) \quad & x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \min \\ & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ & 2x_1 - 2x_3 - 6x_4 + 2x_5 = 4 \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{aligned}$$

$$x^0 = (2, 1, 0, 0, 0)$$

3. Используя теорию симплекс-метода, найти все значения k , при которых точка $x^* = (1, 2, 0, 1, 0)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} & 3x_1 + 12x_2 + kx_3 - 5x_4 - 2kx_5 \rightarrow \max \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ & 3x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ & -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = -7; \\ & x_j \geq 0, j = \overline{1,5} \end{aligned}$$

§5. Метод искусственного базиса и М-метод решения произвольной задачи линейного программирования

В случае, если задача линейного программирования задана в произвольной форме, то отсутствует необходимая информация для использования базового симплексного метода, то есть исходный базис. Для отыскания начальной базисной точки может быть использован прием, заключающийся в создании специальной задачи, связанной с исходной следующим образом: при решении созданной задачи симплексным методом либо будет получена искомая базисная точка, либо будет обнаружена пустота допустимого множества исходной задачи.

Пусть ЗЛП задана в каноническом виде (1)-(3). Введем новые (искусственные) переменные в ограничения задачи так, чтобы в результате образовался единичный базис (появилась возможность выписать исходную базисную точку):

$$\begin{aligned} Ax + Ez &= b \quad (b \geq 0) \\ x &\geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что начальная базисная точка может быть выписана в виде $(x_j = 0, j = \overline{1, n}; z_i = b_i, i = \overline{1, m})$. Такое преобразование исходной задачи не является эквивалентным. Однако, как легко заметить, точкам $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, где все $z_i = 0$ соответствуют точки x , являющиеся допустимыми в исходной задаче. Следовательно, желательно составить новую задачу таким образом, чтобы ее решениями являлись векторы вида $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$. Эта цель может быть достигнута за счет создания специальной целевой функции, например, $\sum_{i=1}^m z_i \rightarrow \min$. Итак, свяжем с исходной задачей новую (искусственную) z-задачу вида

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m z_i &\rightarrow \min \\ Ax + Ez &= b \quad (b \geq 0) \\ x \geq 0, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Так как в этой задаче имеется исходная базисная точка, то задача может быть решена базовым симплексным методом. Пусть получено решение $(x_1^0, \dots, x_n^0, z_1^0, \dots, z_m^0)$ со значением целевой функции равным $m_0 = \sum_{i=1}^m z_i^0$

Теорема 1. Если при решении z-задачи получено оптимальное значение целевой функции $m_0 = 0$, то точка (x_1^0, \dots, x_n^0) является базисной в исходной задаче. Если $m_0 > 0$, то допустимое множество исходной задачи пусто.

Таким образом может быть решена проблема отыскания исходной базисной точки, однако непосредственное использование такого приема при решении ЗЛП не является рациональным, так как требует решения фактически двух задач: сначала z-задачи, а затем - исходной. Существует метод, позволяющий объединить эти два этапа.

М-метод. По условию исходной задачи составляется вспомогательная М-задача вида

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_j x_j - M \sum_{i=1}^m z_i &\rightarrow \max \\ Ax + Ez &= b \quad (b \geq 0) \\ x \geq 0, z &\geq 0. \end{aligned}$$

Здесь z - искусственные переменные, введенные в условие задачи с целью обеспечения исходной базисной точки, символом M обозначено - некоторое положительное число. Если M достаточно велико, то слагаемые с положительными z_i уменьшают значение целевой функции, что невыгодно с точки зрения максимизации. Происходит как бы "штрафование" целевой функции за то, что выбрана точка с положительными координатами z_i . В связи с этим

следует ожидать, что в оптимальной точке при достаточно большом M все значения z_i будут равны нулю. Однако это возможно только в случае, если в исходной задаче допустимое множество не пусто. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если исходная задача имеет решение, то существует такое число M^0 , что при всех $M > M^0$ вспомогательная M -задача тоже имеет решение, и в любом ее решении $\begin{pmatrix} x^* \\ z^* \end{pmatrix}$ точка $z^* = 0$, а x^* будет решением исходной задачи.

Следствие 1. Если при решении произвольной задачи линейного программирования M -методом будет получена такая оптимальная точка, что $z^* \neq 0$, то в исходной задаче допустимое множество пусто.

Из теоремы следует, что решение можно осуществлять, фиксируя некоторое большое число M , однако обычно поступают иначе, используя принцип метода искусственного базиса. Число M при этом не фиксируется, оставляется в задаче в качестве параметра, который позволяет осуществлять непрерывное двухэтапное решение задачи. На первом этапе алгоритма осуществляется максимизация второй группы слагаемых $b_0 = -M \sum_{i=1}^m z_i \rightarrow \max$, а

после достижения максимума непрерывно переходят к оптимизации исходной целевой функции, либо делают вывод о неразрешимости исходной задачи. До тех пор пока переменные $z_i > 0$, т.е. являются базисными, и значение целевой функции, и оценки D_j можно представить в виде $a_j + Mb_j$, $j = \overline{1, n}$. Следовательно, если вводить в базис такой вектор A_j , что соответствующее значение $b_j < 0$, то это приведет к увеличению значения b_0 . Максимальное значение будет получено, когда все b_j будут неотрицательными. Очевидно, что при этом возможны две ситуации: $b_0 < 0$ и $b_0 = 0$. Рассмотрим оба эти случая.

1. Оптимальное значение $b_0 < 0$. Наличие такой ситуации на одной из итераций означает, что допустимое множество исходной задачи пусто, т.к. оптимальная точка имеет координаты $z_i > 0$.

2. Оптимальное значение $b_0 = 0$. Такой вариант возможен, в свою очередь, в двух ситуациях:

а) Все искусственные переменные выведены из базиса и равны, как небазисные переменные, нулю. В этом случае получена базисная точка исходной задачи и продолжается оптимизация исходной целевой функции по базовому алгоритму симплексного метода.

б) Искусственные переменные z_i не выведены из базиса, но их значения равны нулю. В этом случае мы имеем дело с вырожденной ситуацией, и базисная точка, полученная на этой итерации, является вырожденной базисной

точкой исходной задачи. Она, как и в предыдущем случае, вообще говоря, не является оптимальной. Следовательно, необходимо продолжить поиск, не уменьшая при этом полученное оптимальное значение $b_0 = 0$. По оценкам $a_j < 0$ (если такие есть) определяется вектор для введения в базис на данной итерации. Процесс продолжается до тех пор, пока не исчезнут такие j , что $a_j < 0, b_j = 0$, соответствующий столбец A_j имеет элементы $a_{ij} > 0$.

Итак, сформулируем окончательный **алгоритм решения произвольной задачи линейного программирования.**

1. Привести задачу к каноническому виду.
2. Проверить наличие единичного базиса среди столбцов матрицы ограничений. Если единичный базис имеется, то перейти к п.5.
3. Ввести в задачу искусственные переменные так, чтобы среди столбцов полученной матрицы появился единичный базис в пространстве R^m , где m - число ограничений задачи.
4. Составить M - задачу: ввести искусственные переменные в целевую функцию с коэффициентами, равными $-M$.
5. Составить исходную таблицу для оформления решения задачи. Если данный пункт выполняется после пункта 2, то фрагмент таблицы завершается одной оценочной строкой, если после пункта 4, то двумя строками для оценок $D_j = a_j + Mb_j$ (первая - для чисел a_j , вторая - для b_j).
6. Вычислить оценки всех векторов-ограничений задачи по формулам $D_j = \sum_{i \in I} c_i a_{ij} - c_j$. При наличии искусственных векторов в базисе получим выражения вида $a_j + Mb_j$. Поместить a_j в первую оценочную строку, b_j - во вторую (нижнюю).
7. При наличии двух оценочных строк проверить, если все $b_j \geq 0$, то перейти к п.11, иначе - к п.9 с числами b_j . Если осталась одна оценочная строка, то проверить условие $D_j \geq 0$. Если это условие выполняется, то перейти к п.12.
8. Просмотреть векторы-столбцы A_j , для которых $a_j < 0$. Если среди них существует такой, что все его координаты $a_{ij} \leq 0$, то перейти к п.13, иначе - к п.9 с числами $D_j = a_j$.
9. Определить направляющий элемент для выполнения итерации по методу Жордана-Гаусса. Номер столбца k может быть выбран любым среди тех j , для которых $\Delta_j < 0$. Номер строки l определяется следующим образом:

$$\bar{x}_l = \min_{a_{lk} > 0} \frac{\bar{x}_i}{a_{ik}}, \text{ где } \bar{x}_i - \text{ базисные координаты проверяемой базисной точки,}$$

a_{lk} - направляющий элемент.

10. Перейти к новой базисной точке. Осуществить преобразования Жордана - Гаусса с направляющим элементом a_{lk} . Выбросить из рассмотрения искусственный вектор, если он на данной итерации стал небазисным. Перейти к п.6.
11. Проанализировать значение целевой функции в данной базисной точке $z(x_B) = a_0 + Mb_0$. Если $b_0 = 0$, то проверить наличие искусственных векторов в базисе. Если искусственных векторов в базисе нет, то вычеркнуть вторую оценочную строку и перейти к выполнению п.7. Если искусственные переменные имеются среди базисных (они при этом равны нулю), то проверить неравенство $a_j \geq 0$ для тех номеров j , для которых $b_j = 0$. Если неравенства выполняются, то получено решение задачи. Перейти к п.15. Если среди a_j , таких что $b_j = 0$ существуют такие, что $a_j < 0$, то перейти к п.8, где проверке будут подвергаться только те векторы A_j , для которых $a_j < 0$, $b_j = 0$. Если в выражении $a_0 + Mb_0$ имеет место неравенство $b_0 < 0$, то перейти к п.14.
12. Проверка единственности решения.
Если среди небазисных векторов есть такие, что $\Delta_j = 0$, то в задаче имеется бесчисленное множество решений. Исключение составляет случай, когда была сделана замена переменных $x_s = x_s' - x_s''$. В этом случае, если одна из переменных x_s' или x_s'' является базисной, то оценка второй обязательно равна нулю. Этот факт означает бесчисленное множество пар, с помощью которых может быть получено значение переменной x_s . Если среди небазисных векторов, кроме тех, о которых сказано выше, нет таких, которые имеют нулевые оценки, то в задаче существует единственное решение. Если имеет место случай, когда для всех небазисных векторов $\Delta_j \neq 0$, то задача имеет единственное решение. Перейти к п.15.
13. Останов. Задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции на допустимом множестве. Перейти к п.15.
14. Останов. Задача не имеет решения из-за пустоты исходного допустимого множества.
15. Выписать ответ.

Пример 1. Решить ЗЛП .

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_3 - x_4 &\rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 7x_3 + 2x_4 &= 13 \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1,4} \end{aligned}$$

Решение.

Линейное программирование

Так как в задаче нет начального базиса, составим М-задачу.

$$3x_1 + 7x_3 - x_4 - Mz_1 - Mz_2 - Mz_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + z_1 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + z_2 = 5$$

$$3x_1 + 7x_3 + 2x_4 + z_3 = 13$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$$

Запишем данные в таблицу.

| В | C _В | \bar{x} | 3 | 0 | 7 | -1 | -M | -M | -M | Θ |
|----------------|----------------|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| | | | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | z ₁ | z ₂ | z ₃ | |
| z ₁ | -M | 4 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| z ₂ | -M | 5 | 1 | -2 | 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| z ₃ | -M | 13 | 3 | 0 | 7 | 2 | 0 | 0 | 1 | 4 $\frac{1}{3}$ |
| α | | 0 | -3 | 0 | -7 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| β | | -21 | -5 | 1 | -12 | -3 | 0 | 0 | 0 | |
| x ₁ | 3 | 4 | 1 | 1 | 2 | 1 | | 0 | 0 | 2 |
| z ₂ | -M | 1 | 0 | -3 | 1 | -1 | | 1 | 0 | 1 |
| z ₃ | -M | 1 | 0 | -3 | 1 | -1 | | 0 | 1 | 1 |
| α | | 12 | 0 | 3 | -1 | 4 | | 0 | 0 | |
| β | | -2 | 0 | 6 | -2 | 2 | | 0 | 0 | |
| x ₁ | 3 | 2 | 1 | 7 | 0 | 3 | | | 0 | |
| x ₃ | 7 | 1 | 0 | -3 | 1 | -1 | | | 0 | |
| z ₃ | -M | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | 1 | |
| α | | 13 | 0 | 0 | 0 | 3 | | | 0 | |

На данной итерации получено, что третье уравнение в системе, определяющей x , является лишним. Исключая его, получаем эквивалентную систему.

Так как все $A_j = \alpha_j \geq 0$, то останов, найдена оптимальная точка $x^* = (2, 0, 1, 0)$.

$L(x^*) = 13$. Поскольку на небазисном векторе оценка $D_2 = 0$, то в задаче имеется бесчисленное множество решений.

Пример 2. Решить ЗЛП .

$$\begin{aligned}
 &x_1 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max \\
 &2x_1 + 4x_2 - x_4 = 9 \\
 &-3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 3 \\
 &x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\
 &x_j \geq 0, j = \overline{1,4}
 \end{aligned}$$

Решение.

Так как в задаче присутствует только один базисный вектор A_3 , составим М-задачу, добавив искусственные переменные в 1 и 2 ограничение.

$$\begin{aligned}
 x_1 + 3x_3 - x_4 - Mz_1 - Mz_2 &\rightarrow \max \\
 2x_1 + 4x_2 - x_4 + z_1 &= 9 \\
 -3x_1 + 2x_2 + 3x_4 + z_2 &= 3 \\
 x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\
 x_j &\geq 0, j = \overline{1,4}.
 \end{aligned}$$

Запишем данные в таблицу.

| В | C_B | \bar{x} | 1 | 0 | 3 | -1 | -M | -M | Θ |
|----------|-------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | | | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | z_1 | z_2 | |
| z_1 | -M | 9 | 2 | 4 | 0 | -1 | 1 | 0 | 9/4 |
| z_2 | -M | 3 | -3 | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 | 3/2 |
| x_3 | 3 | 4 | 1 | 5 | 1 | 2 | 0 | 0 | 4/5 |
| α | | 12 | 2 | 15 | 0 | 7 | 0 | 0 | |
| β | | -12 | 1 | -6 | 0 | -2 | 0 | 0 | |
| z_1 | -M | 4 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | |
| z_2 | -M | 7/5 | -17/5 | 0 | -2/5 | 11/5 | 0 | 1 | |
| x_2 | 0 | 4/5 | 1/5 | 1 | 1/5 | 2/5 | 0 | 0 | |
| α | | 0 | -1 | 0 | -3 | 1 | 0 | 0 | |
| β | | -36/5 | 11/5 | 0 | 6/5 | 2/5 | 0 | 0 | |

Как видно из данной таблицы, дальнейшее улучшение решения невозможно, так как во 2-й оценочной строке не оказалось отрицательных элементов. Следовательно, достигнуто оптимальное решение М-задачи. Но искусственные переменные z_1, z_2 не выведены из базиса и не равны нулю, следовательно исходная задача не имеет решения, так как ее допустимое множество пусто.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить М-методом задачу ЛП, предварительно приведя ее к каноническому виду.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 &\rightarrow \min \\
 x_1 - 2x_2 + x_4 &= -3 \\
 3x_2 - x_4 + x_5 &\leq 5 \\
 x_2 + x_5 &\geq 3 \\
 x_3 - 2x_4 &= 2 \\
 x_j &\geq 0, j = \overline{1,5}
 \end{aligned}$$

2. Решить М- методом задачу ЛП.

$$\begin{aligned}
 & x_1 - x_2 + x_3 - 3x_5 \rightarrow \max \\
 & -2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = a \\
 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - \frac{b}{b+1}x_5 = 1 \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 + \frac{c}{c+1}x_4 + x_5 = 8; \\
 & x_j \geq 0, j = \overline{1,5}.
 \end{aligned}$$

| | а | в | с | | а | в | с | | а | в | с | | а | в | с |
|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 6 | 6 | 2 | 2 | 11 | 2 | 2 | 3 | 16 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 2 | 1 | 2 | 7 | 7 | 2 | 2 | 12 | 4 | 2 | 3 | 17 | 6 | 2 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 8 | 2 | 1 | 3 | 13 | 6 | 2 | 3 | 18 | 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 1 | 2 | 9 | 4 | 1 | 3 | 14 | 3 | 1 | 4 | 19 | 6 | 3 | 4 |
| 5 | 5 | 2 | 2 | 10 | 6 | 1 | 3 | 15 | 6 | 1 | 4 | 20 | 3 | 4 | 4 |

§5. Двойственные задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования, записанную в произвольной форме:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min) \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, \quad i = \overline{1, m}. \\
 & x_j \geq 0 \quad (\leq, \text{нет требований на знак}), \quad j = \overline{1, n}.
 \end{aligned}$$

Данную задачу будем называть исходной. Под двойственной задачей (ДЗ) к исходной понимается задача линейного программирования, которая строится по следующим правилам, приведенным в таблице.

| Исходная задача | Двойственная задача |
|---|---|
| $\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$ | $\sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ | $y_i \geq 0$ |
| $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ | $y_i \leq 0$ |

| | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ | $y_i - \text{любого знака}$ |
| $x_j \geq 0$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j$ |
| $x_j \leq 0$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \leq c_j$ |
| $x_j - \text{любого знака}$ | $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$ |

Замечание. Когда целевая функция в исходной задаче минимизируется, таблица прочитывается справа налево.

Данная таблица позволяет сформулировать несколько общих правил построения двойственных задач.

- Каждому i -му ограничению исходной задачи соответствует переменная y_i в ДЗ и, наоборот, каждому k -му ограничению ДЗ соответствует переменная x_k исходной задачи.
- Матрицы ограничений в исходной и двойственной задачах взаимно транспонированы.
- Правые части ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции в ДЗ, а коэффициенты целевой функции исходной задачи - правыми частями ограничений в ДЗ.
- Если целевая функция в исходной задаче максимизировалась (минимизировалась), то в ДЗ целевая функция минимизируется (максимизируется);

Используя данное правило построим ДЗ к ЗЛП, записанной в симметричной форме. В ДЗ целевая функция минимизируется : $\sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$.

Все ограничения в симметричной форме задачи имеют вид $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$, поэтому на все переменные ДЗ будет присутствовать требование неотрицательности $y_i \geq 0, i = \overline{1, m}$. На все переменные в симметричной форме присутствует требование неотрицательности, поэтому ограничения ДЗ будут иметь вид $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j, j = \overline{1, n}$. Итак, мы получили задачу

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1, n} \\ & y_i \geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Если провести аналогичные рассуждения для построения ДЗ для ЗЛП, записанной в канонической форме, то мы получим задачу вида:

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j=1, \dots, n.$$

Пример 1. Построить ДЗ к следующей задаче

$$4x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 \rightarrow \min$$

$$4x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 7$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 6$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0$$

Решение.

В ДЗ к исходной задаче будет 3 переменных (в исходной задаче 3 ограничения) и 4 ограничения (в исходной задаче 4 переменных). Поскольку в исходной задаче целевая функция минимизируется, воспользуемся таблицей слева направо. Для иллюстрации построим аналогичную таблицу для данной конкретной задачи.

| Исходная задача | Двойственная задача |
|---|--------------------------------------|
| $4x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 \rightarrow \min$ | $7y_1 + 6y_2 - y_3 \rightarrow \max$ |
| $4x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 \leq 7$ | $y_1 \leq 0$ |
| $-x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 6$ | $y_2 \geq 0$ |
| $-x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$ | $y_3 - \text{любого знака}$ |
| $x_1 \geq 0$ | $4y_1 - y_2 - y_3 \leq 4$ |
| $x_2 \leq 0$ | $-y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 5$ |
| $x_3 - \text{любого знака}$ | $-y_1 - y_2 - y_3 = -1$ |
| $x_4 - \text{любого знака}$ | $-3y_1 - y_2 = -6$ |

Заметим, что прежде чем строить двойственную задачу, исходную можно вначале привести к симметричной или канонической форме, а затем по шаблону к полученной форме задачи построить двойственную. При этом полученные разными способами двойственные задачи будут эквивалентными.

Выпишем основные практически значимые свойства, которые справедливы для пары двойственных задач. Рассмотрим, например, в качестве пары двойственных задач симметричную и двойственную к ней. В матричной форме они записываются следующим образом:

$$c^T x \rightarrow \max \qquad b^T y \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{ll} Ax \leq b & A^T y \geq c \\ x \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

Свойство 1. Задача двойственная к двойственной является исходной.

Свойство 2. Для любых x допустимых в исходной задаче и y допустимых в двойственной справедливо неравенство

$$c^T x \leq b^T y$$

Свойство 3. Если исходная задача не имеет решения из-за неограниченности целевой функции на допустимом множестве, то допустимое множество двойственной задачи пусто.

Свойство 4. Возможен вариант, когда допустимые множества исходной и двойственной задач одновременно пусты.

В качестве примера рассмотрим следующую двойственную пару

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max & -4y_1 + y_2 \rightarrow \min \\ -3x_1 - x_2 \leq -4 & -3y_1 + 3y_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 1 & -y_1 + y_2 = 2 \\ & y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{array}$$

Свойство 5. Если существует точка x^0 , допустимая в исходной задаче и точка y^0 , допустимая в двойственной задаче, такие, что $c^T x^0 = b^T y^0$, то x^0 - решение исходной, а y^0 - решение двойственной задачи.

Теорема 1. (Первая теорема двойственности). *Если одна из задач (двойственная или исходная) имеет решение, то и двойственная к ней имеет решение, причем оптимальные значения целевых функций совпадают.*

Теорема 2. (Вторая теорема двойственности) *Для того, чтобы допустимая в исходной задаче точка x^0 и допустимая в двойственной задаче точка y^0 являлись соответственно решениями исходной и двойственной задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (условия дополняющей нежесткости):*

$$\begin{array}{ll} x_j^0 \left(c_j - \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^0 \right) = 0, \quad j = \overline{1, n} & \text{или} \quad (x^0)^T (c - A^T y^0) = 0 \\ y_i^0 \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 \right) = 0, \quad i = \overline{1, m} & \text{или} \quad (y^0)^T (b - Ax^0) = 0. \end{array}$$

Замечание 1. В симплекс - процедуре осуществляется перебор базисов B (невырожденных) подматриц исходной матрицы A таким образом, что

1. На каждой итерации метода вектор $x_B = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\bar{x} = B^{-1}b$ является допустимым в исходной задаче, т.е. $Ax_B = b, \quad x_B \geq 0$;

2. На заключительной итерации, кроме того, когда получена оптимальная точка, оценки всех векторов A_j неотрицательны

$$D_j = c_B^T B^{-1} A_j - c_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}$$

или

$$c_B^T B^{-1} A = y^T A = A^T y \geq c,$$

т.е. вектор $y = c_B^T B^{-1} A$ является допустимым в двойственной задаче, кроме того, он является решением двойственной задачи. При этом заметим, что часть ограничений двойственной задачи выполняется в виде равенств $(A^T y)_j = c_j, j \in I$, где I - множество базисных индексов (так как оценки базисных векторов всегда равны нулю $D_j = 0, j \in I$). Такие точки y называются базисными в двойственной задаче.

Рассмотрим примеры применения изложенной теории двойственности к решению задач линейного программирования.

Пример 3. На основании графического анализа двойственной задачи исследовать разрешимость следующих задач и в случае разрешимости найти оптимальное значение целевой функции.

$$\begin{aligned} \text{а) } & 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Решение.

Двойственные к предложенным задачам относятся к задачам линейного программирования в R^2 и поэтому их можно решать описанным в §1 графическим методом. Двойственная к задаче а) имеет вид:

$$\begin{aligned} & 3y_1 + y_2 \rightarrow \max \\ & -y_1 + 3y_2 \leq 6 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 9 \\ & y_1 - y_2 \leq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

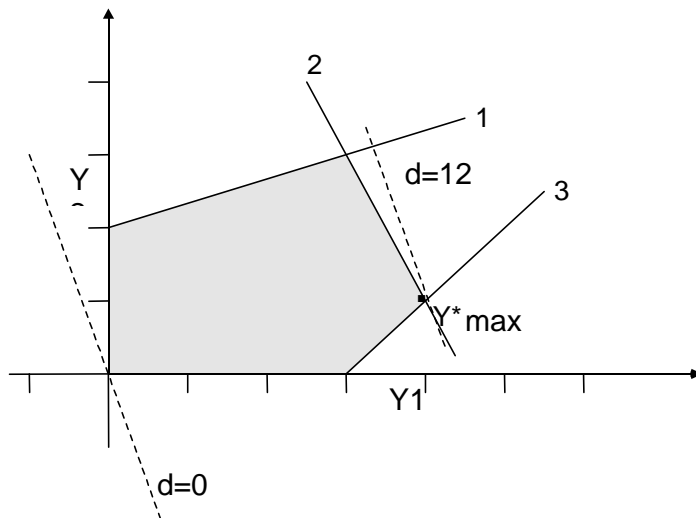


Рис.6

Графическое решение данной задачи (Рис. 6) показывает, что $Y_{\max}^* = (4,1)$ с $z_{\max}^* = 13$. В силу первой теоремы двойственности исходная задача также имеет решение, причем оптимальное значение равно 13.

Двойственная задача к задаче б) имеет вид:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &\rightarrow \max \\ -y_1 + y_2 &\leq 2 \\ y_1 - 3y_2 &\leq 1 \\ y_1 - 2y_2 &\leq 2 \end{aligned}$$

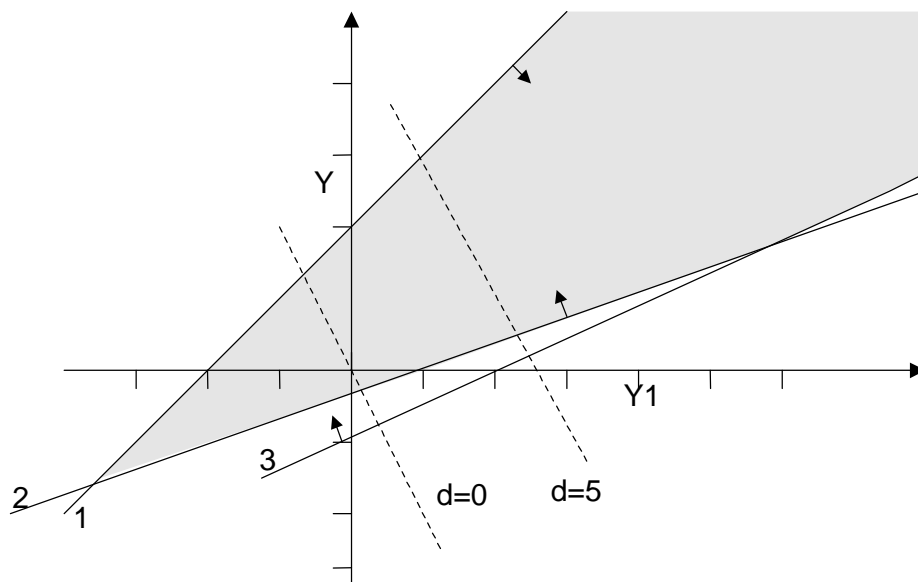


Рис.7

Графический анализ показывает, что двойственная задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции, поэтому по свойству 3 исходная задача неразрешима из-за пустоты допустимого множества.

Пример 4. Определить, являются ли данные векторы x и y оптимальными решениями данной задачи и двойственной к ней:

$$\begin{aligned}x_1 + 10x_2 + 8x_3 &\rightarrow \max \\x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\x &= (1, 0, 1), \quad y = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)\end{aligned}$$

Решение. Решение данной задачи осуществляется в несколько этапов:

- 1) подставим точку $x = (1, 0, 1)$ в ограничения исходной задачи; так как точка удовлетворяет ограничениям, переходим к следующему этапу;
- 2) построим двойственную задачу

$$\begin{aligned}2y_1 &\rightarrow \min \\y_1 + y_2 &\geq 1 \\4y_1 + 2y_2 &\geq 10 \\y_1 - y_2 &\geq 8;\end{aligned}$$

- 3) подставим точку $y = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ в ограничения двойственной задачи; точка

удовлетворяет ограничениям, переходим к следующему этапу;

- 4) подставим точку $x = (1, 0, 1)$ в целевую функцию исходной задачи, а точку $y = \left(\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ - в целевую функцию двойственной задачи; полученные значения совпадают, поэтому по свойству 4 данные точки являются соответственно решением исходной и двойственных задач.

Пример 5. Найти решение следующей ЗЛП путем графического анализа двойственной задачи:

$$\begin{aligned}5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\rightarrow \max \\4x_1 + x_3 + x_4 &= 16 \\6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.\end{aligned}$$

Решение.

Двойственная задача запишется в виде

$$\begin{aligned}16y_1 + 4y_2 &\rightarrow \min \\4y_1 + 6y_2 &\geq 5 \\-4y_2 &\geq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Графический анализ этой задачи показан на следующем рисунке.

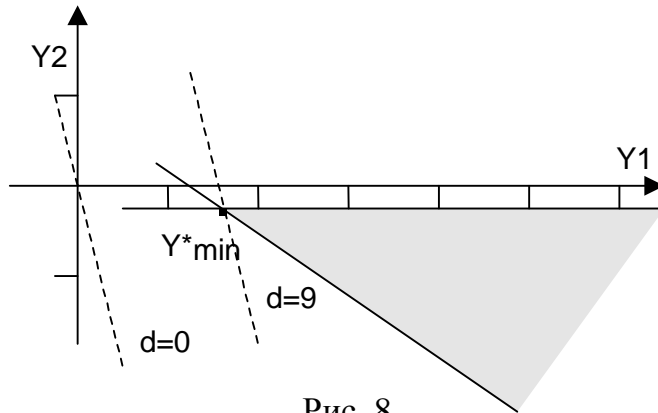


Рис. 8

Оптимальным решением является вектор $Y_{\min}^* = \left(\frac{13}{8}, -\frac{1}{4}\right)$, $z_{\min}^* = 25$. На основании второй теоремы двойственности для вектора x^* , являющегося решением исходной задачи должны выполняться равенства $x_1^*(4y_1^* + 6y_2^* - 5) = 0$
 $x_3^*(y_1^* - y_2^* - 1) = 0$

$$x_2^*(-4y_2^* - 1) = 0 \quad x_4^*(y_1^* + y_2^* - 1) = 0.$$

Подставляя координаты вектора Y_{\min}^* , получаем, что переменные x_3 и x_4 исходной задачи должны обращаться в нуль. Тогда из исходной системы получаем $4x_1 = 16$, откуда $x_1 = 4$, и $6x_1 - 4x_2 = 4$, откуда $x_2 = 5$. Следовательно, решением исходной задачи является вектор $X_{\max}^* = (4, 5, 0, 0)$. При этом $z_{\max}^* = 5 * 4 + 5 = 25$.

Пример 6. Определить решение двойственной задачи к задаче из примера 1 § 4, используя решение исходной задачи.

Решение.

В соответствии с замечанием 1 оптимальным решением двойственной

задачи является вектор $y = c_B^T B^{-1} = (3, 2, 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, где матрица B^{-1}

является матрицей обратной к оптимальной базисной матрице

$$B = [A_3 A_1 A_5] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить двойственные задачи к следующим исходным и проверить свойство 1 двойственных задач:

1) $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0;$$

2) $3x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 - 3x_4 = 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

3) $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \rightarrow \min$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \geq 8$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

2. На основании графического анализа двойственной задачи исследовать разрешимость следующих задач и в случае разрешимости найти оптимальное значение целевой функции:

1) $2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 \rightarrow \max$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 5$$

$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 4$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq -2$$

$$x_1 - 4x_2 + 4x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

2) $x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 \rightarrow \min$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 4$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \geq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_4 \geq 0;$$

4) $2x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

3) $3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$

3. Для каждой из пары двойственных задач возможны три варианта ответа: задача разрешима (Р), функция не ограничена (Н), область пустая (П). Это позволяет, вообще говоря, рассмотреть 9 ситуаций: РР (обе задачи разрешимы), РН (первая разрешима, во второй целевая функция не ограничена) и т.д. Указать все возможные ситуации.

4. Привести примеры двойственных пар, обладающих следующими свойствами.

1) обе задачи имеют оптимальные решения;

2) одна задача имеет неограниченную допустимую область, вторая - пустую область;

- 3) допустимые области обеих задач пустые;
 4) допустимые области обеих задач неограниченные.
 5. Определить, являются ли данные векторы x и y решениями данной задачи и двойственной к ней:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &\rightarrow \max \\ 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 &= 11 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x = (1, 0, 2), \quad y = \left(\frac{3}{14}, \frac{1}{14} \right).$$

6. Решить двойственные задачи, используя решение исходных задач симплексным методом:

1) $x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$
 $3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5$
 $x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$
 $-x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

2) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$
 $x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 6$
 $-x_1 \quad \quad \quad + x_3 \quad \leq 2$
 $2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

3) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$
 $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10$
 $x_1 \quad \quad \quad + x_3 + x_4 = 7$
 $-3x_1 \quad \quad \quad + 2x_3 + x_5 = 4$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

§7. Транспортная задача

Транспортная задача формулируется следующим образом. Имеется m пунктов производства A_1, A_2, \dots, A_m однородного продукта и n пунктов потребления B_1, B_2, \dots, B_n . Заданы объемы производства $a_i, i = \overline{1, m}$ каждого пункта A_i и размеры спроса каждого пункта $b_j, j = \overline{1, n}$ в одних и тех же единицах измерения. Известна также матрица $C = (c_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ расходов c_{ij} , связанных с перевозкой единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j . Требуется составить план перевозок, обеспечивающий при минимальных суммарных расходах удовлетворение всех пунктов потребления за счет имеющегося в пунктах производства продукта.

Приведенная формулировка предполагает наличие равенства (условия баланса)

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Такая задача называется закрытой транспортной задачей. Математическая постановка этой задачи имеет следующий вид

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где x_{ij} - количество продукта, перевозимое из пункта A_i в пункт B_j .

Без ограничения общности всегда можно считать, что $a_i > 0, i = \overline{1, m}$ и $b_j > 0, j = \overline{1, n}$.

Задача (1)-(4) является задачей линейного программирования, записанной в канонической форме. Она имеет mn переменных и $m + n$ ограничений. Любая допустимая точка задачи может быть записана в виде матрицы

$$X = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} .$$

Как известно, не любая задача линейного программирования имеет решение. Условия разрешимости транспортной задачи формулируются в следующей теореме.

Теорема 1. Для разрешимости транспортной задачи необходимо и достаточно выполнение следующего условия баланса

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j .$$

Можно показать, что число независимых уравнений системы (2)-(3) равно $m + n - 1$. Отсюда, в частности, следует, что любая допустимая базисная точка транспортной задачи содержит не более $m + n - 1$ положительных координат.

Рассмотрим два метода нахождения исходной базисной точки для транспортной задачи: метод "северо-западного угла" и метод минимального элемента.

Метод "северо-западного угла"

Алгоритм построения исходной базисной точки складывается из нескольких шагов, на каждом из которых определяется верхний левый элемент матрицы X . Сформулируем алгоритм метода "северо-западного угла".

Шаг 0. Полагаем $i_0 = 1, j_0 = 1, a'_i = a_i, b'_j = b_j \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Шаг 1. Полагаем $x_{i_0 j_0} = \min(a'_{i_0}, b'_{j_0})$. Если $x_{i_0 j_0} = a'_{i_0}$, то переходим к шагу 2, в противном случае - к шагу 4.

Шаг 2. Полагаем $b'_{j_0} = b'_{j_0} - x_{i_0 j_0}$. Индексу i_0 присваиваем значение $i_0 + 1$. Если $i_0 = m$, то переходим к шагу 3, в противном случае к шагу 1.

Шаг 3. Полагаем $x_{i_0 j} = b'_j$ для всех $j \geq j_0$. Решение закончено.

Шаг 4. Полагаем $a'_{i_0} = a'_{i_0} - x_{i_0 j_0}$. Индексу j_0 присваиваем значение $j_0 + 1$. Если $j_0 = n$, то переходим к шагу 5, в противном случае переходим к шагу 1.

Шаг 5. Полагаем $x_{ij_0} = a'_i$ для всех $i \geq i_0$. Решение закончено.

Рассмотрим пример использования данного алгоритма.

Пример 1. Исходные данные:

| $a_i \backslash b_j$ | 30 | 36 | 36 | 22 | 56 |
|----------------------|---|---|---|---|--|
| 45 | 30 3 | 15 4 | | | |
| 70 | | 21 1 | 36 4 | 13 2 | |
| 15 | | | | 9 3 | 6 6 |
| 50 | | | | | 6 8 |
| | | | | | 50 |

В верхнем правом углу в каждой ячейке стоят коэффициенты $c_{ij}, i = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 5}$. Данная задача является закрытой транспортной задачей, так как сумма потребностей в продукте равна сумме имеющегося продукта

$$45+70+15+50=30+36+36+22+56.$$

Результаты работы алгоритма записаны в в нижнем левом углу ячейки. Получена исходная базисная точка

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 36 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

со значением целевой функции равным 804.

Метод "северо-западного угла" может оказаться очень "далеким" от оптимального, так как при построении начальной базисной точки этим методом мы совсем не реагируем на коэффициенты целевой функции c_{ij} . Важно иметь простой метод, позволяющий строить начальную базисную точку во многих случаях близкую к оптимальной. Таким методом является некоторая модификация метода "северо-западного угла" - метод минимального элемента.

Алгоритм метода минимального элемента

Шаг 0. Полагаем $a'_i = a_i, b'_j = b_j$ $(i, j) \in W$, где $W = \{(i, j) : i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$.

Шаг 1. Определяем пару индексов (i_0, j_0) из условия $\min_{(i, j) \in W} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$.

Шаг 2. Полагаем $x_{i_0 j_0} = \min(a'_{i_0}, b'_{j_0})$. Если $x_{i_0 j_0} = a'_{i_0}$, то переходим к шагу 3, в противном случае - к шагу 6.

Шаг 3. Полагаем $b'_{j_0} = b'_{j_0} - x_{i_0 j_0}$.

Шаг 4. $W = W \setminus \{(i_0, j) : j = \overline{1, n}\}$.

Шаг 5. Если множество W состоит из элементов одной строки i_k , то полагаем $x_{i_k j} = b'_j$ для всех $(i_k, j) \in W$. Решение закончено. В противном случае переходим к шагу 1.

Шаг 6. Полагаем $a'_{i_0} = a'_{i_0} - x_{i_0 j_0}$.

Шаг 7. $W = W \setminus \{(i, j_0) : i = \overline{1, m}\}$.

Шаг 8. Если множество W состоит из элементов одного столбца j_k , то полагаем $x_{i j_k} = a'_i$ для всех $(i, j_k) \in W$. Решение закончено. В противном случае переходим к шагу 1.

Данным методом найдем исходную базисную точку для примера 1.

Пример 2.

| | | | | | |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|
| b_j | 30 | 36 | 36 | 22 | 56 |
| a_i | | | | | |
| 45 | 3 | 4 | 2 | 4 | 5 |
| | | | $36^{(2)}$ | | $9^{(5)}$ |
| 70 | 3 | 1 | 4 | 2 | 4 |
| | | $36^{(1)}$ | | $22^{(3)}$ | $12^{(5)}$ |
| 15 | 4 | 3 | 5 | 3 | 6 |
| | | | | | $15^{(5)}$ |
| 50 | 2 | 4 | 3 | 6 | 8 |
| | $30^{(4)}$ | | | | $20^{(5)}$ |

Для наглядности каждый элемент снабжен индексом, равным номеру итерации, на которой был получен данный элемент. В результате получили следующую базисную точку

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 36 & 0 & 9 \\ 0 & 36 & 0 & 22 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

со значением целевой функции, равным 545. Данное значение явно меньше, чем значение целевой функции на базисной точке, полученной методом "северо-западного угла".

Замечание 1. Признаком вырожденности транспортной задачи является существование $r < m$, $s < n$, для которых выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^r a_{i_k} = \sum_{l=1}^s b_{j_l} .$$

В этом случае при использовании приведенных алгоритмов может оказаться, что среди $n + m - 1$ базисных координат есть нулевые.

Пример 3. Построим методом "северо-западного угла" исходную базисную точку для следующей задачи

| | | | | | |
|----------------------|---|----|----|---|---|
| $b_j \backslash a_i$ | | 10 | 4 | 9 | 6 |
| 6 | 6 | 3 | 4 | 2 | 4 |
| 8 | 4 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 10 | | 4 | 3 | 5 | 3 |
| 5 | | 2 | 4 | 3 | 6 |
| | | | 0* | 9 | 1 |
| | | | | | 5 |

Здесь при вычислении элемента x_{22} оказалось $a'_2 = b'_2 = 4$. Поэтому, например, заполняется только вторая строка и полагается $b'_2 = 0$. После чего $x_{32} = 0$. Звездочкой помечен базисный элемент, равный нулю.

Зная исходную базисную точку, мы можем продолжить решение транспортной задачи методом потенциалов, который является несколько иной формой изложения симплексного метода, связанной со спецификой транспортной задачи. В первую очередь заметим, что целевая функция в транспортной задаче минимизируется, поэтому при выборе вектора, который будет вводиться в базис на очередной итерации, будет выбираться вектор с отрицательной оценкой. Для определения вида оценок в транспортной задаче воспользуемся замечанием 1 к §6, в соответствии с которым оценка j -й переменной представляет собой разность между левой и правой частями j -го ограничения двойственной задачи $D_j = y^T A_j - c_j$, при подстановке в него вектора y , который можно найти из условия $D_k = y^T A_k - c_k = 0, k \in J_B$.

Задача, двойственная к транспортной задаче имеет вид

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \min$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

где $u_i, i = \overline{1, m}$ - переменные двойственной задачи, соответствующие ограничениям (2), а $v_j, j = \overline{1, n}$ - переменные двойственной задачи, отвечающие ограничениям (3). В соответствии с данным видом двойственной задачи оценки в транспортной задаче будут иметь вид

$$D_{ij} = u_i - v_j - c_{ij} \quad i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$$

причем переменные $u_i, i = \overline{1, m}$ и $v_j, j = \overline{1, n}$ представляют собой произвольное решение системы уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in W_B, \quad (5)$$

где W_B - множество базисных пар индексов. Заметим, что система (5) имеет $n + m$ переменных и $m + n - 1$ уравнение. Ранг системы равен $m + n - 1$. Отсюда следует, что одну из переменных можно выбрать произвольно, например, $u_1 = 0$, а все остальные переменные найти по цепочке.

Сформулируем теперь критерий оптимальности для транспортной задачи. Пусть $X = (x_{ij}^0), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ - некоторое базисное решение транспортной задачи, W_B - множество базисных пар индексов данного базисного решения, $u_i^0, i = \overline{1, m}$ и $v_j^0, j = \overline{1, n}$ - произвольное решение системы

$$u_i + v_j = c_{ij}, \quad (i, j) \in W_B.$$

Если существует пара индексов $(i, j) \notin W_B$, для которой

$$u_i^0 + v_j^0 > c_{ij},$$

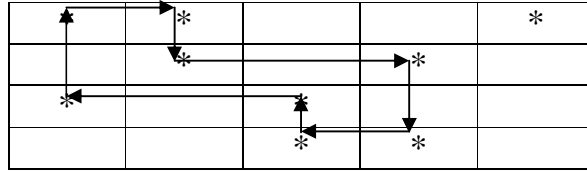
то существует базисное решение $X = (x_{ij})$, для которого

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^0, \quad (6)$$

если для всех пар индексов $(i, j) \notin W_B$ выполнено $u_i^0 + v_j^0 \leq c_{ij}$, то $X = (x_{ij}^0), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ - решение задачи. Заметим, что для транспортной задачи гарантируется построение новой базисной точки, так как эта задача при соблюдении баланса всегда разрешима. Отметим также, что неравенство (6) является нестрогим в связи с возможностью вырожденности базисных точек. Как следует из алгоритма симплексного метода, если существует вектор $A_{i_0 j_0}$ с положительной оценкой, то вектор $A_{i_0 j_0}$ должен быть введен в базис. Для введения вектора в базис нужно знать его текущие координаты. Заметим, что эти координаты являются коэффициентами разложения вектора $A_{i_0 j_0}$ по текущему базису. В транспортной задаче для определения координат используется понятие цикла.

Определение. Говорят, что множество пар индексов (i, j) образует цикл, если их можно расположить, например, в следующей последовательности: $(i_0, j_0) \rightarrow (i_0, j_1) \rightarrow (i_1, j_1) \rightarrow \dots \rightarrow (i_k, j_k) \rightarrow (i_k, j_0) \rightarrow (i_0, j_0)$. Отметим, что каждые две рядом стоящие пары индексов должны иметь одинаковые номера строк или одинаковые номера столбцов. Сами пары, входящие в цикл, называются элементами цикла..

Рассмотрим пример цикла.



Цикл, который используется в алгоритме решения транспортной задачи, строится следующим образом. Ставятся (*) в клетках из множества W_B и в клетке (i_0, j_0) , которая будет вводиться в базис. Просматриваются все строки таблицы и вычеркиваются те строки, в которых имеется не более одной (*). Затем вычеркиваем те столбцы, в которых содержится не более одного элемента. Затем снова просматриваются строки и т.д. Оставшиеся элементы образуют цикл.

Когда цикл построен, можно следующим образом найти коэффициенты вводимого вектора: перенумеровать все элементы цикла, присвоив вводимому элементу 0, следующему - 1 и т.д.; коэффициенты разложения вектора $A_{i_0 j_0}$ равны +1 по векторам из цикла с нечетными номерами, -1 - по элементам цикла с четными номерами и 0 по векторам, не входящим в цикл. Обозначим через W^+ множество индексов (i, j) с четными номерами, через W^- - множество индексов (i, j) с нечетными номерами.

Зная координаты вектора $A_{i_0 j_0}$, его можно ввести в базис по правилам симплексного метода. Поскольку координаты вводимого вектора равны +1 или -1, то значение $q = \min_{(i,j) \in W^-} x_{ij}^0 = x_{i^* j^*}^0$. Вектор с $(i^*, j^*) \in W_B$, на котором достигается этот минимум, считается в дальнейшем небазисным. Остальные базисные координаты новой базисной точки пересчитываются по формуле:

$$x_{ij}^H = x_{ij}^0 + q, \quad (i, j) \in W^+;$$

$$x_{ij}^H = x_{ij}^0 - q, \quad (i, j) \in W^-;$$

$x_{ij}^H = x_{ij}^0$ по элементам, не входящим в цикл.

Вычисление нового значения функции цели может быть произведено по формуле

$$L^H = L - qD_{i_0 j_0}.$$

Может оказаться, что $q = \min_{(i,j) \in W^-} x_{ij}^0$ достигается в нескольких нечетных

элементах цикла. Тогда небазисным для новой базисной точки считается только один из них, например тот, которому соответствует наибольшее значение функции цели. Остальные элементы считаются базисными со значением в новой базисной точке равными нулю. В этом случае мы имеем вырожденную базисную точку.

Алгоритм метода потенциалов

Итерация 0.

0.1. Определяется начальный базис с помощью любого из алгоритмов построения начальной базисной точки.

0.2. Вычисляется значение функции цели $L(x^0) = \sum_{i,j \in W} c_{ij} x_{ij}^0$, Ω - множество базисных индексов.

0.3. Полагаем $k=0$.

Итерация $k+1$.

Пусть на k -той итерации получена базисная точка x^k со значением целевой функции $L(x^k)$.

$k+1.1$. Полагают $u_1 = 0$ и определяют $v_j = c_{1j} - u_1, (i, j) \in W$. Если некоторое v_s вычислено, то определяют $u_i = c_{is} - v_s, (i, s) \in W$, и т.д., пока не будут вычислены все $u_i, i = \overline{1, m}$ и $v_j, j = \overline{1, n}$.

$k+1.2$. Вычисляют оценки небазисных векторов.

$$D_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

$k+1.3$. Выбирают $D_{i_0 j_0} = \max_{i,j} D_{ij}$.

$k+1.4$. Если $D_{i_0 j_0} \leq 0$, то останов, x^k - решение задачи.

$k+1.5$. По правилу вычеркивания определяют цикл, образованный парой (i_0, j_0) вместе с базисными парами индексов.

Пусть W^+ - множество четных элементов цикла, W^- - множество нечетных элементов цикла без (i_0, j_0) .

$k+1.6$. Определяют $Q = \min_{(i,j) \in W^-} x_{ij}^k$.

$k+1.7$. Полагают

$$\begin{aligned} x_{i_0 j_0}^{k+1} &= Q, \\ x_{ij}^{k+1} &= x_{ij}^k - Q, \quad (i, j) \in W^-, \\ x_{ij}^{k+1} &= x_{ij}^k + Q, \quad (i, j) \in W^+, \\ x_{ij}^{k+1} &= x_{ij}^k, \quad (i, j) \in W \setminus (W^- \cup W^+). \end{aligned}$$

$k+1.8$. Определяют $c_{i_l j_l} = \max_{(i,j) \in W^-, x_{ij}=0} c_{ij}$ и элемент $c_{i_l j_l}$ считают небазисным.

$k+1.9$. Вычисляют $L(x^{k+1}) = L(x^k) - QD_{i_0 j_0}$.

$k+1.10$. Полагают $k=k+1$.

Пример. 3

Итерация 0. Определяем начальный базис методом минимального элемента.

| | | | | | |
|----------------------|----|---|---|---|---|
| $b_j \backslash a_i$ | 12 | 8 | 7 | 7 | 6 |
| 6 | 7 | 4 | 3 | 2 | 5 |
| 8 | 3 | 4 | 3 | 5 | 1 |
| 12 | 0 | 4 | 2 | 3 | 6 |
| 14 | 7 | 1 | 8 | 4 | 5 |
| | 0 | 2 | 6 | 6 | 1 |
| | 12 | | | | |
| | | 8 | 5 | 1 | |

$$L(x^0) = 0 \cdot 12 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 1 = 76$$

$$W = \{(1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

Итерация 1.

1.1 Помечаем звездочками места, занимаемые базисными элементами. Полагаем $u_1 = 0$.

$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2, \quad u_4 = c_{44} - v_4 = 2, \quad v_2 = c_{42} - u_4 = -1,$$

$$v_3 = c_{43} - u_4 = 6, \quad u_2 = c_{23} - v_3 = -3, \quad v_1 = c_{21} - u_2 = 6,$$

$$v_1 = c_{21} - u_2 = 6, \quad v_5 = c_{25} - u_2 = 4, \quad u_3 = c_{31} - v_1 = -6.$$

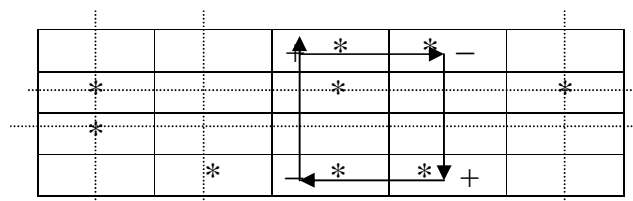
1.2 Оценки D_{ij} записываем на свободные места таблицы.

| | | | | | |
|----------------------|----|-----|----|----|----|
| $v_j \backslash u_i$ | 6 | -1 | 6 | 2 | 4 |
| 0 | -1 | -5 | ③ | * | -1 |
| -3 | * | -8 | * | -6 | * |
| -6 | * | -11 | -2 | -7 | -8 |
| 2 | -3 | * | * | * | 1 |

1.3 $(i_0, j_0) = (1, 3)$.

1.4. $D_{13} = 3 > 0$.

1.5. Отмечаем звездочкой элемент (1,3) и по правилу вычеркивания определяем цикл.



Цикл образуют элементы $(1,3) \rightarrow (1,4) \rightarrow (4,4) \rightarrow (4,3)$.

$$W^+ = \{(4,4)\}, \quad W^- = \{(1,4), (4,3)\}.$$

1.6 $Q = \min(6,5) = 5$.

1.7 $x_{13}^0 = Q = 5, x_{14}^1 = 6 - 5 = 1, x_{43}^1 = 5 - 5 = 0, x_{44}^1 = 1 + 5 = 6,$
 $x_{21}^0 = 0, x_{23}^1 = 2, x_{25}^1 = 6, x_{31}^1 = 12, x_{42}^1 = 8.$

1.8 Имеется только один элемент $(4,3)$ из W , для которого $x_{43}^0 = 0$. Поэтому он становится небазисным. Новая базисная точка имеет вид

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1.9 $L(x^1) = L(x^0) - x_{13}^1 D_{13} = 76 - 5 * 3 = 61$

Итерация 2.

2.1, 2.2

| | | | | | |
|----------------------|----|----|----|----|----|
| $v_j \backslash u_i$ | 3 | -1 | 3 | 2 | 1 |
| 0 | -4 | -5 | * | * | -4 |
| 0 | * | -5 | * | -3 | * |
| -3 | * | -8 | -2 | -4 | -8 |
| 2 | -2 | * | -3 | * | -2 |

2.3, 2.4. $D_{i_0 j_0} = \max D_{ij} = -2 < 0$.

Решение закончено. $x^* = x^1, L(x^*) = 61$.

Открытая транспортная задача

Открытой транспортной задачей называется транспортная задача, в которой не выполнено условие баланса. При этом возможны два случая.

Случай 1. $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$. В этом случае математическая постановка задачи имеет вид.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = \overline{1, n} \tag{9}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

Случай 2. $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$. В этом случае математическая постановка задачи имеет вид:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (12)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

Рассмотрим решение задачи (7)-(9). В ограничениях (8) введем дополнительные переменные $x_{m+1, j}$, $j = \overline{1, n}$.

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} + x_{m+1, j} = \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (13)$$

Если сложить все ограничения (13) и вычесть из них сумму ограничений (7), то получим равенство

$$\sum_{j=1}^n x_{m+1, j} = a_{m+1}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{где } a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i > 0.$$

В результате задача может быть записана в виде

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m+1}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n}.$$

Так как коэффициенты функции цели при дополнительных переменных равны нулю, то $c_{m+1, j} = 0$, $j = \overline{1, n}$. Таким образом, открытая транспортная задача (7)-(9) сводится к закрытой транспортной задаче добавлением одного ограничения, при этом условие баланса выполняется. Следовательно, новая задача разрешима. Таким же способом может быть сведена к закрытой и задача (10) - (12).

Пример 2. $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 4,$

$b_1 = 8, b_2 = 15, b_3 = 20, b_4 = 7.$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\sum_i a_i = 13$, $\sum_j b_j = 15$. Добавляем в матрице четвертую строку с коэффициентами $c_{4j} = 0$ и полагаем $a_4 = 50 - 13 = 37$. Эта задача может быть решена методом потенциалов.

Пример 2.

$$a_1 = 20, a_2 = 10, a_3 = 10,$$

$$b_1 = 8, b_2 = 7, b_3 = 8, b_4 = 7.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\sum_i a_i = 40$, $\sum_j b_j = 30$. Добавляем к матрице пятый столбец с коэффициентами $c_{j5} = 0$ и полагаем $b_5 = 10$. Эта задача может быть решена методом потенциалов.

Задачи для самостоятельного решения

Решить методом потенциалов следующие задачи.

$$1) a_1 = 22, a_2 = 10, a_3 = 8,$$

$$b_1 = 10, b_2 = 7, b_3 = 8, b_4 = 15.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) a_1 = 25, a_2 = 15, a_3 = 5,$$

$$b_1 = 10, b_2 = 7, b_3 = 8, b_4 = 5.$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение задач линейного программирования средствами EXCEL

Решение задачи линейного программирования в среде EXCEL осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом

1. Ввод условий задачи

1.1. Создание формы для ввода условий задачи.

Форма для ввода условий задачи

$$\begin{aligned}
 &c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max (\min) \\
 &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq, =) b_1 \\
 &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq, =) b_2 \\
 &\dots \\
 &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq, =) b_m \\
 &l_1 \leq x_1 \leq d_1, l_2 \leq x_2 \leq d_2, \dots, l_n \leq x_n \leq d_n
 \end{aligned}$$

имеет следующий вид

| ПЕРЕМЕННЫЕ | | | | | | | |
|------------------------|-------|-------|-----|-------|---|------------------------------------|--------------|
| имя | имя 1 | имя 2 | ... | имя n | | | |
| значение | | | | | | | |
| нижн. гр | l1 | l2 | ... | ln | | | |
| верх. гр | d1 | d2 | ... | dn | | | |
| коэф.в ЦФ | c1 | c2 | ... | cn | Функция, реализующая целевую функцию | направление оптимизации (max, min) | |
| ОГРАНИЧЕНИЯ | | | | | | | |
| вид | | | | | левая часть | знак | правая часть |
| название ограничения 1 | a11 | a12 | ... | a1n | Функция, реализующая левую часть 1-го ограничения | | b1 |
| название ограничения 2 | a21 | a22 | ... | a2n | Функция, реализующая левую часть 2-го ограничения | | b2 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| название ограничения m | a31 | a32 | ... | a3n | Функция, реализующая левую часть m-го ограничения | | bm |

2. *Ввод исходных данных.* Заполняются ячейки, содержащие: нижние и верхние границы переменных, коэффициенты целевой функции, коэффициенты ограничений, знаки ограничений, направление оптимизации целевой функции.
3. *Ввод зависимостей из математической модели.* Заполняются ячейки содержащие: функцию, реализующую целевую функцию задачи, функции, реализующие левые части ограничений задачи.

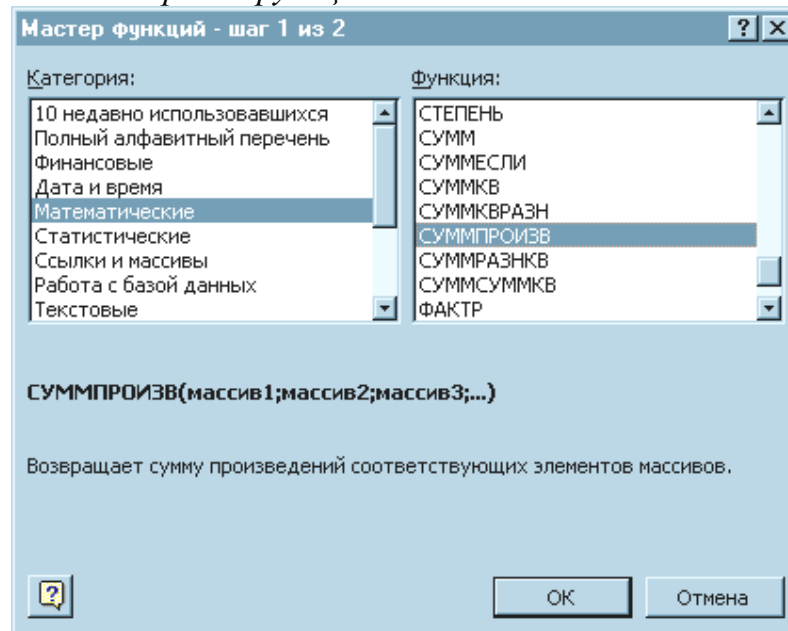
3.1. *Ввод зависимости для целевой функции.*

3.1.1. *Поместить курсор в ячейку, отведенную под значение целевой функции.*

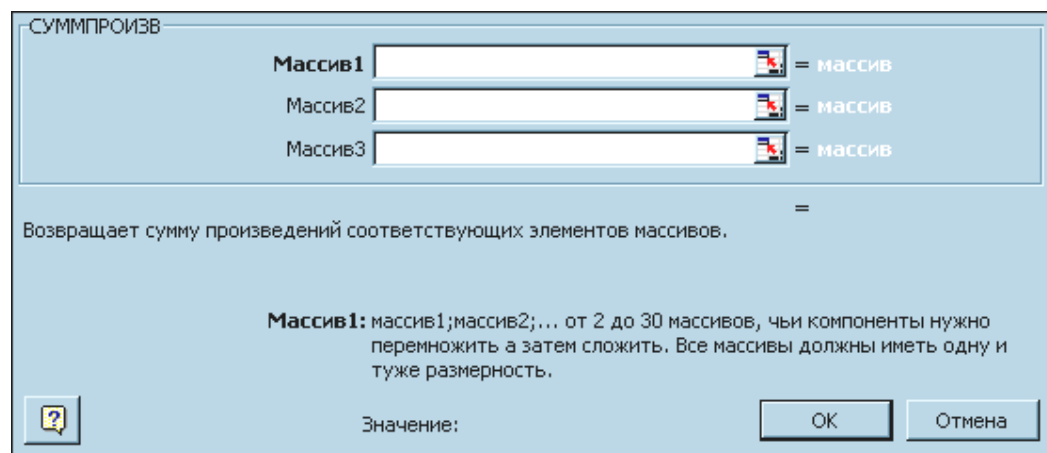
3.1.2. *Выбрать кнопку **Мастер функций**.*

3.1.3. *Выбрать в окне **Категория** категорию **математические***

3.1.4. *Выбрать функцию **СУММПРОИЗВ**.*



3.1.5. *Заполнить диалоговое окно функции **СУММПРОИЗВ**.*



В массив 1 нужно занести диапазон ячеек, содержащих значения переменных. В массив 2 – диапазон ячеек, содержащих коэффициенты целевой функции.

3.2. Ввод зависимостей для левых частей ограничений.

3.2.1. Поместить курсор в ячейку, отведенную под левую часть ограничения.

3.2.2. Выбрать кнопку Мастер функций.

3.2.3. Выбрать окне **Категория** категорию **математические**

3.1.6. Выбрать функцию **СУММПРОИЗВ**.

3.1.7. Заполнить диалоговое окно для функции **СУММПРОИЗВ**. Занести в массив 1 диапазон ячеек, содержащих значения переменных (использовать при этом абсолютные ссылки), в массив 2 – диапазон ячеек содержащих коэффициенты данного ограничения.

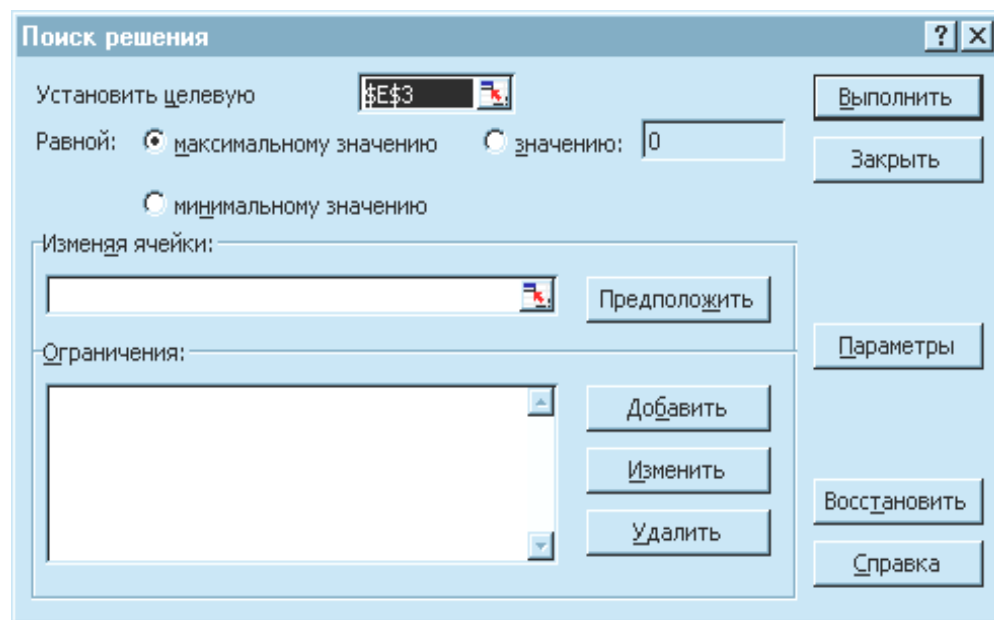
3.1.8. Копировать содержимое ячейки в буфер,

3.1.9. Вставить содержимое буфера в ячейки, отведенные под левые части остальных ограничений..

4. Ввод основных параметров модели в диалоговом окне **Поиск решения**.

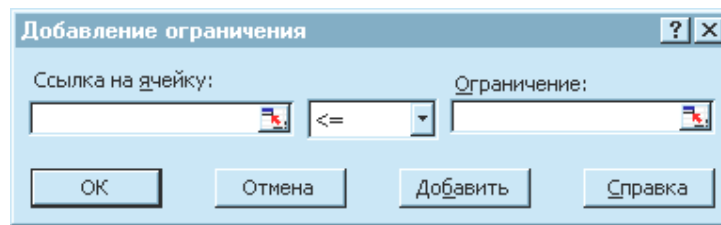
4.3. Войти в меню **Сервис** и выбрать пункт **Поиск решения**.

4.4. Заполнить параметры диалогового окна **Поиск решения**.



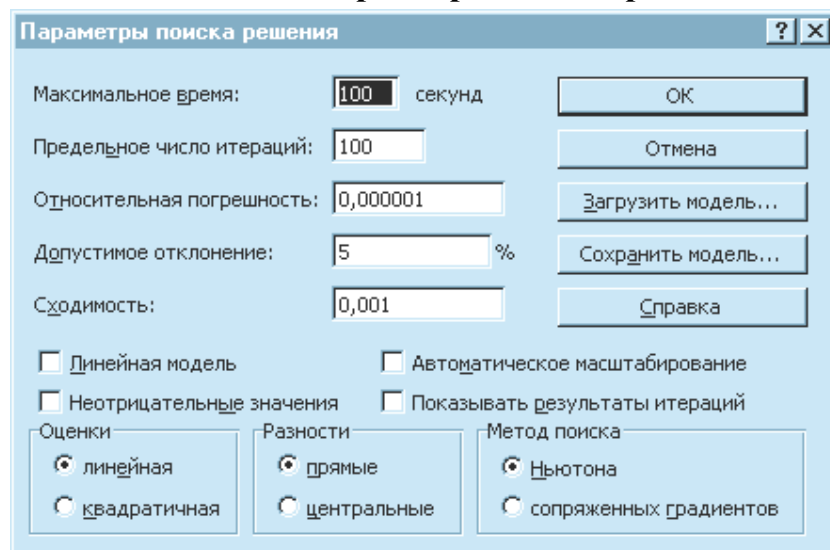
4.4.1. В пункте **Установить целевую** указать ячейку, отведенную под целевую функцию.

4.4.2. В соответствии с решаемой задачей выбрать направление целевой функции.



4.4.3. *Нажать кнопку **Добавить**.* Появится диалоговое окно для построения 4.4.4. ограничений задачи. В левой части указывается ячейка (группа ячеек), в которой содержится левая часть ограничения, в центре - знак ограничения, в правой части - ячейка (группа ячеек) с правой частью ограничения. После ввода каждого ограничения нужно нажимать на кнопку **Добавить**. Когда все ограничения задачи построены, нужно нажать на кнопку **Отмена** и вернуться в диалоговое окно **Поиск решения**.

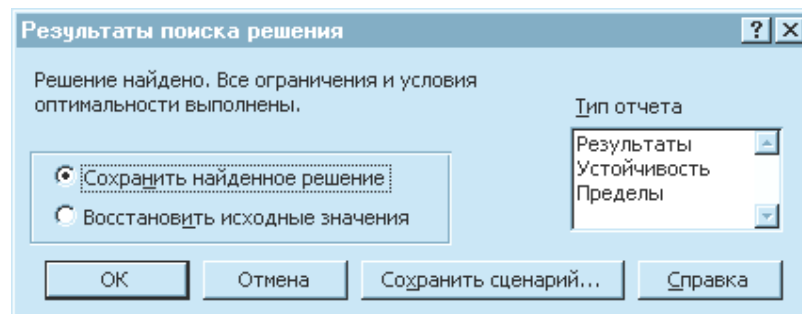
4.4.5. *Нажать кнопку **Параметры** диалогового окна **Поиск решения**.* Появится диалоговое окно **Параметры поиска решения**.



С помощью команд, находящихся в этом диалоговом окне, можно вводить условия для решения задач оптимизации всех классов. В ряде пунктов данного окна записаны значения, используемые по умолчанию. Команды, используемые по умолчанию, подходят для большей части практических задач. Команда **Максимальное время** служит для назначения времени в секундах, выделяемого на поиск решения задачи. В это поле можно ввести значение, не превышающее 32767 с (более 9 часов). Значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства задач. Команда **Предельное число итераций** служит для назначения числа итераций...

4.4.5. *Установить флажок **Линейная модель**.* Это обеспечит применение симплекс – метода.

4.4.6. Нажать на кнопку **Выполнить**. Начнется решение составленной математической модели задачи. Через какое то время появится диалоговое окно **Результаты поиска решения**.



Нужно выбрать интересующие виды отчетов по решению задачи и проанализировать полученное решение. Каждый из выбранных типов отчета создается на отдельном листе. **Отчет по результатам** состоит из трех таблиц. **Таблица 1** приводит сведения о целевой функции. В столбце **Исходно** приведены значения целевой функции до начала вычислений. **Таблица 2** приводит значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи. **Таблица 3** показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий. **Отчет по устойчивости** состоит из двух таблиц. В **Таблице 1** приводятся следующие значения переменных: результат решения задачи; редуцированная стоимость, т.е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменится целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение; коэффициенты целевой функции; предельные значения приращения каждого коэффициента целевой функции, при которых сохраняется набор базисных переменных в оптимальном решении. В **Таблице 2** приводятся аналогичные значения для ограничений: величина использованных ресурсов; теневая цена, т.е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу; значения приращения каждого ресурса, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение. **Отчет по пределам** показывает, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи производственного планирования

Пример 1. Предприятие выпускает три вида продукции: Прод1, Прод2, Прод3, Прод4. Требуется определить, в каком количестве надо выпускать эти продукты, чтобы получить максимальную прибыль. Известно, что для изготовления данных продуктов требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырьевые, финансы. Нормы расхода (количество ресурса каждого вида, необхо-

димое для выпуска единицы продукции каждого типа), а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции приведены в следующей таблицы.

| ресурс | Прод1 | Прод2 | Прод3 | Прод4 |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| Трудовые | 60 | 70 | 120 | 130 |
| Сырье | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Финансы | 6 | 5 | 4 | 3 |
| Прибыль | 4 | 6 | 10 | 13 |

Математическая модель данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
 &60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max \\
 &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16 \\
 &6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110 \\
 &4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100 \\
 &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

1. Составим форму для данной задачи линейного программирования

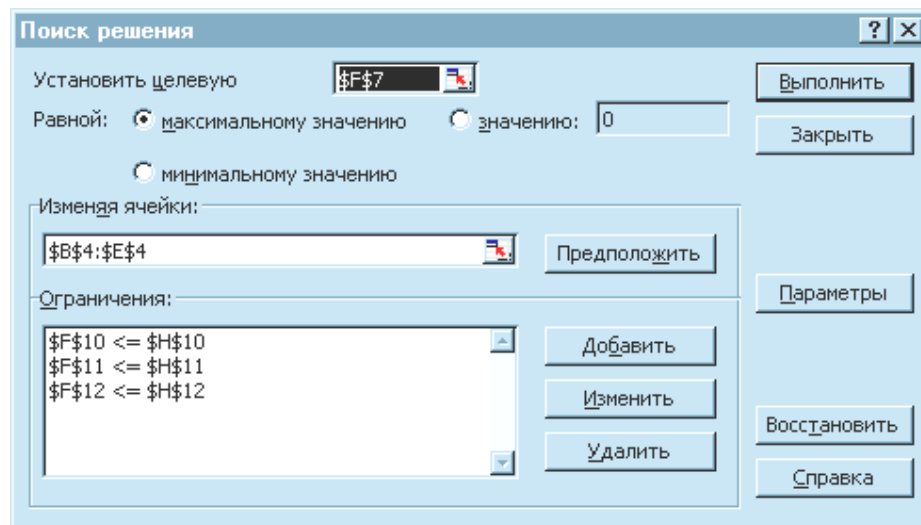
| | | ПЕРЕМЕННЫЕ | | | | | |
|------------|-------------|-------------|-------|-------|------|--------------|--|
| имя | прод1 | прод2 | прод3 | прод4 | | | |
| значение | | | | | | | |
| нижн. гр | | | | | | | |
| верх. гр | | | | | | | |
| коэф. в ЦФ | 60 | 70 | 120 | 130 | макс | | |
| | | ОГРАНИЧЕНИЯ | | | | | |
| вид | левая часть | | | | знак | правая часть | |
| трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | <= | 16 | |
| сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | <= | 110 | |
| финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | <= | 150 | |

2. Введем зависимости из математической модели

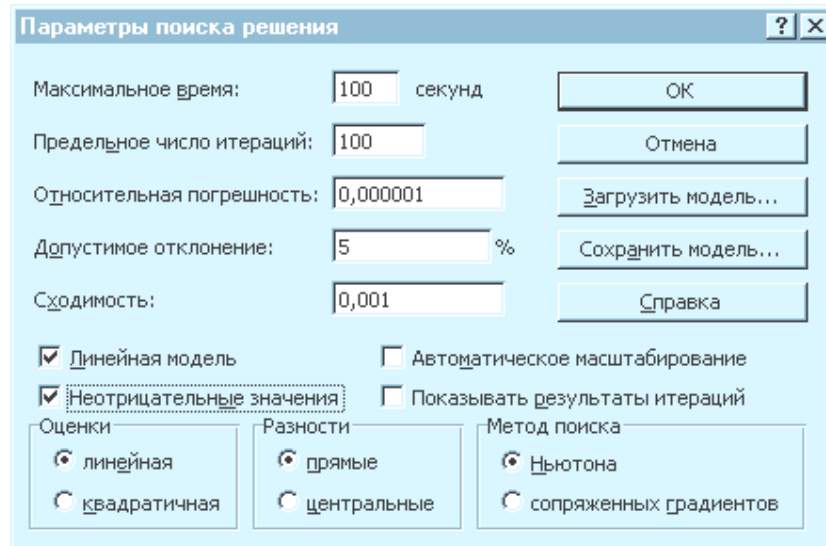
Линейное программирование

| ПЕРЕМЕННЫЕ | | | | | | | |
|-------------|-------|-------|-------|-------|------------------------------------|------|--------------|
| имя | прод1 | прод2 | прод3 | прод4 | | | |
| значение | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| нижн. гр | | | | | | | |
| верх. гр | | | | | | | |
| коэф.в ЦФ | 60 | 70 | 120 | 130 | =СУММПРОИЗВ(B4:E4;B7:E7) | макс | |
| ОГРАНИЧЕНИЯ | | | | | | | |
| вид | | | | | | знак | правая часть |
| трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$E\$4;B10:E10) | <= | 16 |
| сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$E\$4;B11:E11) | <= | 110 |
| финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | =СУММПРОИЗВ(\$B\$4:\$E\$4;B12:E12) | <= | 100 |

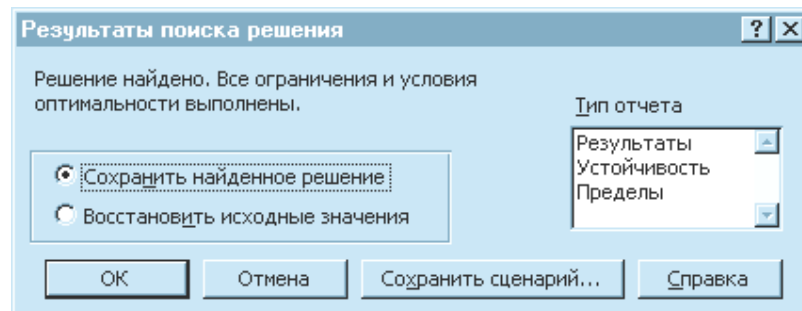
3. Вызовем диалоговое окно Поиск решения. В нем устанавливается целевая ячейка (F7), изменяемые ячейки (B3:E3), указывается направление поиска (максимизация) . Далее выбирается команда **Добавить** и в появившемся диалоговом окне **Добавление ограничения** вводятся ограничения: $F10 \leq N10$, $F11 \leq N11$, $F12 \leq N12$.



Условия неотрицательности переменных можно ввести в диалоговом окне **Параметры поиска решения**. В окне **Параметры поиска решения** устанавливается также флажок **Линейная модель**.



4. Запустим программу на выполнение из окна поиск решения. На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения**. В данном диалоговом окне сделан вывод о том, что найдено оптимальное решение.



Результат решения задачи приведен в таблице

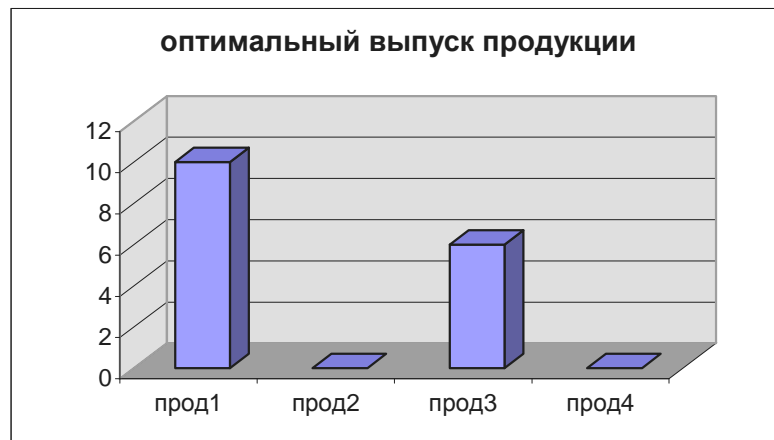
| ПЕРЕМЕННЫЕ | | | | | | | | |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------------|------|--------------|--|
| имя | прод1 | прод2 | прод3 | прод4 | | | | |
| значение | 10 | 0 | 6 | 0 | | | | |
| ниж. гр | | | | | | | | |
| верх. гр | | | | | | | | |
| коэфв ЦФ | 60 | 70 | 120 | 130 | 1320 | макс | | |
| ОГРАНИЧЕНИЯ | | | | | | | | |
| вид | | | | | левая часть | знак | правая часть | |
| трудные | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | ← | 16 | |
| сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | 84 | ← | 110 | |
| финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | 100 | ← | 100 | |

Данная таблица показывает, что максимальная прибыль (F7=1320) будет достигнута предприятием при следующем выпуске продукции:

Линейное программирование

прод1=B4=10, прод2=C4=0, прод3=D4=6, прод4=E4=0. В специально отведенных ячейках таблицы отражается количество использованных ресурсов: трудовых=F10=16, сырья=F11=84, финансов=F12=100.

5. Представим результаты решения задачи графически.



6. Проведем анализ полученного решения. Анализ решения осуществляется на основании трех видов отчетов, представленных в окне **Результаты поиска решения**: результаты, устойчивость, пределы. Начнем с **Отчета по результатам**. Данный отчет находится на отдельном листе

Microsoft Excel 8.0a Отчет по результатам

Рабочий лист: [Лист в F: metod excel_lab1.doc]Лист1

Отчет создан: 03.08.00 15:20:32

Целевая ячейка (Максимум)

| Ячейка | Имя | Исходно | Результат |
|--------|--------------|---------|-----------|
| \$F\$7 | коэф.в ЦФ B5 | 0 | 1320 |

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Исходно | Результат |
|--------|----------------|---------|-----------|
| \$B\$4 | значение прод1 | 0 | 10 |
| \$C\$4 | значение прод2 | 0 | 0 |
| \$D\$4 | значение прод3 | 0 | 6 |
| \$E\$4 | значение прод4 | 0 | 0 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Значение | формула | Статус | Разница |
|---------|-------------|----------|------------------|------------|---------|
| \$F\$10 | трудовые B5 | 16 | \$F\$10<=\$H\$10 | связанное | 0 |
| \$F\$11 | сырье B5 | 84 | \$F\$11<=\$H\$11 | не связан. | 26 |
| \$F\$12 | финансы B5 | 100 | \$F\$12<=\$H\$12 | связанное | 0 |

Отчет состоит из трех таблиц. Таблица 1 приводит сведения о целевой функ-

ции. В столбце **Исходно** приведены значения целевой функции до начала вычислений – 0, а в столбце **Результат** – значение целевой функции в оптимальном решении - 1320. Таблица 2 приводит значения искомым переменных, полученные в результате решения задачи. Таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений задачи: трудовые, сырье, финансы. В столбце **Формула** приведены ограничения в том виде, в котором они были введены в диалоговом окне **Поиск решения**, в столбце **Значение** приведены величины использованного ресурса. Трудовые ресурсы использованы в количестве 16, сырье – 84, финансы – 100. В графе **Разница** показано количество неиспользованного ресурса. Трудовые ресурсы использованы полностью, остаток сырья составляет 26, финансы использованы полностью. Если ресурс используется полностью, то в столбце **Состояние** указывается **связанное**; при неполном использовании ресурса в этом столбце указывается **несвязанное**.

Второй тип отчета – **Отчет по устойчивости**. Данный отчет находится на отдельном листе и состоит из двух таблиц.

Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Лист в F: metod exel_lab1.doc]Лист1
Отчет создан: 03.08.00 15:20:33

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|--------|----------------|-------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| \$B\$4 | значение прод1 | 10 | 0 | 60 | 40 | 12 |
| \$C\$4 | значение прод2 | 0 | -10 | 70 | 10 | 1E+30 |
| \$D\$4 | значение прод3 | 6 | 0 | 120 | 30 | 13,33333333 |
| \$E\$4 | значение прод4 | 0 | -20 | 130 | 20 | 1E+30 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---------|-------------|-------------------|--------------|--------------------------|-----------------------|-----------------------|
| \$F\$10 | трудовые B5 | 16 | 20 | 16 | 3,545454545 | 6 |
| \$F\$11 | сырье B5 | 84 | 0 | 110 | 1E+30 | 26 |
| \$F\$12 | финансы B5 | 100 | 10 | 100 | 60 | 36 |

В столбце **Результирующее значение** таблицы 1 приводится описанный ранее результат решения задачи. Столбец **Нормированная стоимость** показывает, что при принудительном включении единицы прод1 в оптимальное решение целевая функция не изменится, прод2 – уменьшится на 10, прод3 – не изменится, прод4 – уменьшится на 20. Столбцы **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** показывают, что если прибыль от реализации прод1 будет изменяться в пределах от 60-40 до 60+12, то оптималь-

ное решение задачи не изменится, аналогично для прод2 – от 70-10 до 70+(1E+30), прод3 – от 120-30 до 120+13,333333333, прод4 – 130-20 до 130+(1E+30).

В столбце **Результирующее значение** таблицы 2 приводятся величины использованных ресурсов. Столбец **Теневая цена** показывает, что при увеличении трудовых ресурсов на единицу оптимальное значение целевой функции увеличится на 20, при увеличении сырья на единицу целевая функция не изменится, при увеличении на единицу финансов оптимальное значение целевой функция возрастет на 10. Теневая цена позволяет определить максимальную цену по которой стоит покупать дополнительные единицы ресурсов. Столбцы **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** показывают, что изменение трудовых ресурсов в пределах от 16-3,545454 до 16+6 не приводит к изменению оптимального набора выпускаемых продуктов, аналогично для сырья – от 110-(1E+30) до 110+26, для финансов – от 100-60 до 100+36.

Третий тип отчета – **Отчет по пределам**. Данный отчет состоит из одной таблицы.

| Ячейка | Целевое Имя | значение | | | | |
|---------------|---------------------------|-----------------|--------------------------|------------------|---------------------------|------------------|
| \$F\$7 | коэф.в ЦФ | 1320 | | | | |
| Ячейка | Изменяемое Имя | значение | Нижний предел | результат | Верхний предел | результат |
| \$B\$4 | значение прод1 | 10 | 0 | 720 | 10 | 1320 |
| \$C\$4 | значение прод2 | 0 | 0 | 1320 | 0 | 1320 |
| \$D\$4 | значение прод3 | 6 | 0 | 600 | 6 | 1320 |
| \$E\$4 | значение прод4 | 0 | 0 | 1320 | 0 | 1320 |

В таблице указаны нижние и верхние пределы, в которых может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение .

ЛИТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах.- М: Высш. шк, 1986.-320 с.
2. Аснина А. Я., Баева Н. Б., Чернышова Г. Д. Вычислительные методы линейной оптимизации
3. Ашманов С. А. Линейное программирование. - М: Наука, 1981.-304 с.
4. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях.- М.: Наука, 1991.- 448 с.
5. Банди Б. Основы линейного программирования. – М: Радио и связь, 1989.-176 с.
6. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию.- М: Высш. шк, 1975.-261 с.
7. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0. – СПб.: ВHV-Санкт-Петербург,1997.- 280 с.
8. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. –М.: Наука, 1969.- 384 с.
9. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи линейного программирования транспортного типа.- М: Наука, 1969.- 304 с.

Авторы: Азарнова Татьяна Васильевна
Каширина Ирина Леонидовна
Чернышова Галина Дмитриевна

Редактор Тихомирова О.А.